

УДК 539.3

ДВОВІСНИЙ ЗГИН МОМЕНТАМИ НА НЕСКІНЧЕННІСТІ КУСКОВО-ОДНОРІДНОЇ ПЛАСТИНИ З ПРЯМОЛІНІЙНОЮ ТРІЩИНОЮ З УРАХУВАННЯМ КОНТАКТУ ЇЇ БЕРЕГІВ

Іван ЗВІЗЛО

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Досліджено згин кусково-однорідної ізотропної пластини з прямолінійною межею поділу матеріалів розподіленими згинними моментами на нескінченності, коли в одній із півплощин наявна тріщина, береги якої контактують по всій довжині під дією зовнішнього навантаження. Із застосуванням методів теорії функції комплексної змінної отримано систему сингулярних інтегральних рівнянь, яку розв'язано чисельно за допомогою методу механічних квадратур. На підставі числового аналізу розв'язку задачі побудовано графічні залежності контактного тиску та коефіцієнтів інтенсивності зусиль і моментів при різних значеннях відношення модулів Юнга матеріалів пластини.

Ключові слова: пластинка, тріщина.

Формулювання задачі. Дослідимо задачу про згин кусково-однорідної ізотропної пластини завтовшки $2h$ з прямолінійною межею поділу матеріалів розподіленими згинними моментами на нескінченності, коли в одній із півплощин наявна тріщина, береги якої контактують по всій довжині під дією зовнішнього навантаження (див. рис. 1).

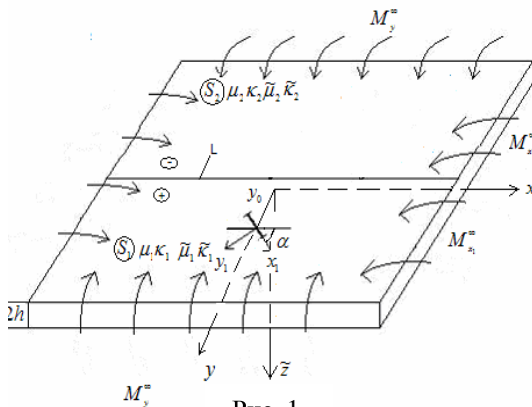


Рис. 1.

Виберемо глобальну декартову систему координат $Ox\bar{z}$ з координатною площиною Oxy у серединній площині пластини, спрямувавши вісь Ox вздовж лінії поділу матеріалів, яку позначимо через L . Півплощину, для якої $y > 0$ ($y < 0$), позначимо через S_1 (S_2). Величинам, які належать до S_j півплощини, будемо приписувати індекс j . З тріщиною завдовжки $2l$ зв'яжемо локальну систему координат $O_1x_1y_1$ з початком координат O_1 у

центрі тріщини, направивши вісь O_1x_1 по тріщині. Відрізок дійсної осі O_1x_1 , для якого $|x_1| \leq l$, позначимо через L_1 . y_0 – ордината центру тріщини у глобальній системі координат, а $z_0 = iy_0$ – комплексна координата цього центру. Граничним значенням відповідних величин при $y_1 \rightarrow \pm 0$ будемо приписувати значки « \pm ». Позначимо контактне зусилля між берегами тріщини через N , а розподілені

згинальні моменти на нескінченності – через $M_{x_1}^\infty, M_{x_2}^\infty, M_y^\infty$. Вважаємо, що до деформування пластини береги тріщини були вільними від зовнішнього навантаження.

Надалі використовуватимемо такі позначення: $\partial_x = \partial/\partial x$, μ_j – модуль зсуву; E_j – модуль Юнга; ν_j – коефіцієнт Пуассона; $\kappa_j = (3 - \nu_j)/(1 + \nu_j)$, $\tilde{\kappa}_j = (3 + \nu_j)/(1 - \nu_j)$, $\tilde{\mu}_j = [2D_j(1 - \nu_j)]^{-1}$, $D_j = 2E_j h^3 / (3(1 - \nu_j^2))$, σ_{yy} , σ_{xy} – компоненти тензора напружень; u_{II} , v_{II} – компоненти вектора переміщень у плоскій задачі; $P = N_y + \partial_x H_{xy}$ – узагальнена в сенсі Кірхгофа перерізувальна сила; M_y – згинальний момент; w – прогин пластини.

Контакт берегів тріщини розуміємо на підставі [3]. За рахунок контакту берегів тріщини задачу розбиваємо на дві задачі: плоску задачу теорії пружності та задачу згину пластини, користуємося класичною теорією згину пластини.

Згідно з формулюванням задачі на берегах тріщини маємо такі крайові умови:

$$\sigma_{y_1 y_1}^\pm = -N / (2h), \quad \sigma_{x_1 y_1}^\pm = 0, \quad x_1 \in L_1 \quad (1)$$

$$P = 0, \quad M_{y_1}^\pm = hN, \quad x_1 \in L_1, \quad (2)$$

$$[\partial_{x_1} v_{II}] + h [\partial_{x_1 y_1}^2 w] = 0, \quad x_1 \in L_1, \quad (3)$$

де індекс 1 свідчить про прив'язку до системи координат $O_1 x_1 y_1$; квадратні дужки у формулі (3) означають стрибок відповідної величини на берегах тріщини.

На межі поділу матеріалів виконуються умови ідеального механічного контакту

$$\sigma_{yy}^{(1)} - i\sigma_{xy}^{(1)} = \sigma_{yy}^{(2)} - i\sigma_{xy}^{(2)}, \quad u_{II}^{(1)} + iv_{II}^{(1)} = u_{II}^{(2)} + iv_{II}^{(2)}, \quad x \in L, \quad (4)$$

$$(\partial_x w + i\partial_y w)^+ = (\partial_x w + i\partial_y w)^-, \quad (M_y + iP)^+ = (M_y + iP)^-, \quad x \in L. \quad (5)$$

Треба знайти напружено-деформований стан пластини.

Побудова розв'язку задачі. При визначенні плоского напруженого стану введемо комплексні потенціали $\Phi_P^{(j)}(z)$ і $\Psi_P^{(j)}(z)$ та $\Phi_{P_1}^{(j)}(z)$ і $\Psi_{P_1}^{(j)}(z)$ відповідно у системах координат Oxy та $O_1 x_1 y_1$.

Запишемо формули переходу для комплексних потенціалів від системи координат Oxy до системи координат $O_1 x_1 y_1$

$$\begin{aligned} \Phi_{P_1}^{(j)}(z_1) &= \Phi_P^{(j)}(z_1 e^{i\alpha} + z_0), \quad z = z_1 e^{i\alpha} + z_0, \\ \Psi_{P_1}^{(j)}(z_1) &= e^{2i\alpha} \left(\Psi_P^{(j)}(z_1 e^{i\alpha} + z_0) + \overline{z_0} \Phi_P^{(j)}(z_1 e^{i\alpha} + z_0) \right) \end{aligned} \quad (6)$$

і навпаки

$$\begin{aligned} \Phi_P(z) &= \Phi_{P_1}(z_1), \quad z_1 = e^{-i\alpha}(z - z_0), \\ \Psi_P(z) &= e^{-2i\alpha} [\Psi_{P_1}(z_1) - \overline{z_0} \Phi_{P_1}'(z_1)], \end{aligned} \quad (7)$$

$$\Psi_P(z) + \bar{z}\Phi'_P(z) = e^{-2i\alpha} [\Psi_{P1}(z_1) + \bar{z}_1\Phi'_{P1}(z_1)],$$

де α – кут між лінією тріщини і віссю абсцис глобальної системи координат.

Правильні залежності [6]

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}^{(j)} - i\sigma_{xy}^{(j)} &= \Phi_P^{(j)}(z) + \overline{\Phi_P^{(j)}(z)} + z\overline{\Phi_P^{(j)}(z)} + \overline{\Psi_P^{(j)}(z)}, \\ 2\mu_j(u'_x + iv'_x) &= \kappa_j\Phi_P^{(j)}(z) - \overline{\Phi_P^{(j)}(z)} - z\overline{\Phi_P^{(j)}(z)} - \overline{\Psi_P^{(j)}(z)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Комплексні потенціали подамо у вигляді

$$\begin{aligned} \Phi_P^{(1)}(z) &= \Phi_{II}^{(1)}(z) + \Phi_T(z), & \Psi_P^{(1)}(z) &= \Psi_{II}^{(1)}(z) + \Psi_T(z), \\ \Phi_P^{(2)}(z) &= \Phi_{II}^{(2)}(z), & \Psi_P^{(2)}(z) &= \Psi_{II}^{(2)}(z), \end{aligned} \quad (9)$$

де комплексні потенціали $\Phi_{II}^{(j)}(z)$ і $\Psi_{II}^{(j)}(z)$ пов'язані з прямолінійною межею, а $\Phi_T(z)$ і $\Psi_T(z)$ – з тріщиною, і їх візьмемо у вигляді [1]

$$\begin{aligned} \Phi_T(z) &= \int_{L_1} g'(t)/(2\pi(t-z_1))dt, \\ \Psi_T(z) &= e^{-2i\alpha}/(2\pi) \int_{L_1} [\overline{g'(t)}/(t-z_1) - \bar{T}e^{i\alpha}g'(t)/(t-z_1)^2]dt, \\ T &= te^{i\alpha} + z_0, & g'(t) &= 2\mu_1/(i(1+\kappa_1))\partial_{x_1}([u_1] + i[v_1]). \end{aligned} \quad (10)$$

Введемо аналітичне продовження функції $\Phi_{II}^{(j)}(z)$ з області S_j в область S_{3-j} за формулою

$$\Phi_{II}^{(j)}(z) = -\overline{\Phi_{II}^{(j)}(z)} - z\overline{\Phi_{II}^{(j)}(z)} - \overline{\Psi_{II}^{(j)}(z)}, \quad \overline{\Phi}(z) = \overline{\Phi(\bar{z})}. \quad (11)$$

Тому формули (8) можемо переписати у вигляді

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}^{(1)} - i\sigma_{xy}^{(1)} &= \Phi_T(z) + \Phi_{II}^{(1)}(z) + R_1(z), \\ \sigma_{yy}^{(2)} - i\sigma_{xy}^{(2)} &= \Phi_{II}^{(2)}(z) - \overline{\Phi_{II}^{(2)}(z)} + (z - \bar{z})\overline{\Phi_{II}^{(2)}(z)}, \\ 2\mu_1\partial_x(u + iv) &= \kappa_1(\Phi_T(z) + \Phi_{II}^{(1)}(z)) - R_1(z), \\ 2\mu_2\partial_x(u + iv) &= \kappa_2\Phi_{II}^{(2)}(z) + \overline{\Phi_{II}^{(2)}(z)} - (z - \bar{z})\overline{\Phi_{II}^{(2)}(z)}, \end{aligned} \quad (12)$$

де

$$R_1(z) = \overline{\Phi_T(z)} + z\overline{\Phi_T(z)} + \overline{\Psi_T(z)} - \Phi_{II}^{(1)}(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi_{II}^{(1)}(z)}.$$

Введемо функції

$$\theta_P(z) = \Phi_{II}^{(1)}(z) + \Phi_{II}^{(2)}(z), \quad \Phi_P(z) = \mu_{3-j}\kappa_j\Phi_{II}^{(j)}(z) - \mu_j\Phi_{II}^{(3-j)}(z), \quad z \in S_j. \quad (13)$$

Враховуючи (12) і (13), та задовольняючи умови ідеального механічного контакту на лінії поділу матеріалів (4), отримаємо задачу лінійного спряження

$$T^+(x) - T^-(x) = 0, \quad R^+(x) - R^-(x) = 0, \quad x \in L, \quad (14)$$

де

$$\begin{aligned} T(z) = & \left(\theta_P(z) + \overline{\Phi}_T(z) + z\overline{\Phi}'_T(z) + \overline{\Psi}_T(z), \quad z \in S_1 \right) \cup \left(\theta_P(z) - \Phi_T(z), \quad z \in S_2 \right), \\ R(z) = & \left(\Phi_P(z) - \mu_2 \left[\overline{\Phi}_T(z) + z\overline{\Phi}'_T(z) + \overline{\Psi}_T(z) \right], z \in S_1 \right) \cup \\ & \cup \left(\Phi_P(z) - \mu_2 \kappa_1 \Phi_T(z), z \in S_2 \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Розв'язавши крайові задачі (14), враховуючи (15), знайдемо

$$\theta_P(z) = \left(-\overline{\Phi}_T(z) - z\overline{\Phi}'_T(z) - \overline{\Psi}_T(z), \quad z \in S_1 \right) \cup \left(\Phi_T(z), \quad z \in S_2 \right), \quad (16)$$

$$\Phi_P(z) = \left(\mu_2 \left[\overline{\Phi}_T(z) + z\overline{\Phi}'_T(z) + \overline{\Psi}_T(z) \right], \quad z \in S_1 \right) \cup \left(\mu_2 \kappa_1 \Phi_T(z), \quad z \in S_2 \right). \quad (17)$$

Враховуючи (13), одержимо

$$\Phi_{II}^{(j)}(z) = \left(A_j^{-1} (\Phi_P(z) + \mu_j \theta_P(z)), z \in S_j \right) \cup \left(-A_{3-j}^{-1} (-\Phi_P(z) + \mu_j \kappa_{3-j} \theta_P(z)), z \in S_{3-j} \right),$$

де

$$A_j = \mu_j + \mu_{3-j} \kappa_j. \quad (18)$$

Перейшовши у систему координат $O_1x_1y_1$, з першої крайової умови (1) отримаємо

$$-N(x_1)/(2h) = \int_{L_1} \left[L(t, x_1) g'(t) + M(t, x_1) \overline{g'(t)} \right] dt. \quad (19)$$

У рівності (19)

$$\begin{aligned} L(t, x_1) = & 1/(\pi(t - x_1)) + A_4 e^{i\alpha} / (2\pi) \left(1/(t e^{-i\alpha} - x_1 e^{i\alpha} - 2iy_0) + 2i(t \sin \alpha + y_0)(1 - e^{-2i\alpha}) \times \right. \\ & \times (t e^{i\alpha} - x_1 e^{-i\alpha} + 2iy_0)^{-2} - 8(t \sin \alpha + y_0)(x_1 \sin \alpha + y_0) e^{-2i\alpha} / (t e^{i\alpha} - x_1 e^{-i\alpha} + 2iy_0)^3 \Big) - \\ & - A_3 e^{-i\alpha} / (2\pi(t e^{i\alpha} - x_1 e^{-i\alpha} + 2iy_0)), \\ M(t, x_1) = & A_4 e^{-i\alpha} / (2\pi) \left(1/(t e^{i\alpha} - x_1 e^{-i\alpha} + 2iy_0) - 2i(t \sin \alpha + y_0) \times \right. \\ & \times (t e^{-i\alpha} - x_1 e^{i\alpha} - 2iy_0)^{-2} - e^{-i\alpha}(t - x_1) / (t e^{i\alpha} - x_1 e^{-i\alpha} + 2iy_0)^2 \Big), \end{aligned} \quad (20)$$

де

$$A_3 = (\mu_1 \kappa_2 - \mu_2 \kappa_1) / A_2, \quad A_4 = (\mu_2 - \mu_1) / A_1.$$

При дослідженні напруженого стану, пов'язаного зі згином пластини, введемо комплексні потенціали $\Phi_3^{(j)}(z)$ і $\Psi_3^{(j)}(z)$, для яких правильні залежності [2]

$$\begin{aligned}\Phi_3^{(j)}(z) + \overline{\Phi_3^{(j)}(z)} + z\overline{\Phi_3^{(j)}(z)} + \overline{\Psi_3^{(j)}(z)} &= \partial_x g_j, \\ \tilde{\kappa}_j\Phi_3^{(j)}(z) - \overline{\Phi_3^{(j)}(z)} - z\overline{\Phi_3^{(j)}(z)} - \overline{\Psi_3^{(j)}(z)} &= f_j,\end{aligned}\quad (21)$$

де

$$g_j = i(\partial_y w - i\partial_x w), \quad f_j = m_j \left[M_y + iC'_0 + i \int_{-a}^t N_y d\tau + iH_{xy} \right], \quad m_j = -2\tilde{\mu}_j. \quad (22)$$

Комплексні потенціали подамо у вигляді

$$\begin{aligned}\Phi_3^{(1)}(z) &= \Phi_{31}(z) + \Gamma_1 + \Phi_{3T}(z), & \Psi_3^{(1)}(z) &= \Psi_{31}(z) + \Gamma'_1 + \Psi_{3T}(z), \\ \Phi_3^{(2)}(z) &= \Phi_{32}(z) + \Gamma_2, & \Psi_3^{(2)}(z) &= \Psi_{32}(z) + \Gamma'_2.\end{aligned}\quad (23)$$

Тут

$$\begin{aligned}\Gamma_j &= -(M_{x_j}^\infty + M_{y_j}^\infty)/(4D_j(1 + \nu_j)), & \Gamma'_j &= (M_{y_j}^\infty - M_{x_j}^\infty)/(2D_j(1 - \nu_j)), \\ \Phi_{3T}(z) &= \int_{L_1} Q(t)/(2\pi(t - z_1))dt, \\ \Psi_{3T}(z) &= -e^{-2i\alpha}/(2\pi) \int_{L_1} [\overline{Q(t)}\tilde{\kappa}_1/(t - z_1) + \overline{T}e^{i\alpha}Q(t) \times \\ &\times (t - z_1)^{-2}]dt, & Q &= -i/(1 + \tilde{\kappa}_1)\partial_x(\partial_x w + i\partial_y w).\end{aligned}\quad (24)$$

Аналітично продовжимо функцію $\Phi_{3j}(z)$ з області S_j в область S_{3-j} за формулою, аналогічною до (11), і введемо функції

$$\theta_3(z) = \Phi_{31}(z) + \Phi_{32}(z), \quad \Phi_3(z) = \tilde{\mu}_{3-j}\tilde{\kappa}_j\Phi_{3j}(z) - \tilde{\mu}_j\Phi_{33-j}(z), \quad z \in S_j, \quad (25)$$

тоді, враховуючи умови ідеального механічного контакту, як це зроблено в плоскій задачі, отримаємо задачі лінійного спряження для визначення функцій $\theta_3(z)$ і $\Phi_3(z)$, розв'язавши які, та врахувавши (25), можна записати явний вигляд для функцій $\Phi_{3j}(z)$, а на підставі формул (21) – (24) можемо знайти

$$M_{y_1}(x_1) + iC' = \int_{L_1} [L_3(t, x_1)Q(t) + M_3(t, x_1)\overline{Q(t)}]dt + KP_1. \quad (26)$$

У рівності (26)

$$\begin{aligned}L_3(t, x_1) &= -1/(4\pi\tilde{\mu}_1) \left\{ 2\tilde{\kappa}_1/(t - x_1) + \tilde{A}_4 e^{i\alpha} \left(-\tilde{\kappa}_1^2/(t e^{-i\alpha} - x_1 e^{i\alpha} - 2iy_0) - 2i(t \sin \alpha + y_0) \times \right. \right. \\ &\times (1 - e^{-2i\alpha})(t e^{i\alpha} - x_1 e^{-i\alpha} + 2iy_0)^{-2} + 8(t \sin \alpha + y_0)(x_1 \sin \alpha + y_0)e^{-2i\alpha} \times \\ &\left. \left. \times (t e^{i\alpha} - x_1 e^{-i\alpha} + 2iy_0)^{-3} \right) + \tilde{A}_3 e^{-i\alpha}/(t e^{i\alpha} - x_1 e^{-i\alpha} + 2iy_0) \right\}, \\ M_3(t, x_1) &= -\tilde{\kappa}_1\tilde{A}_4 e^{-i\alpha}/(4\pi\tilde{\mu}_1) \left(1/(t e^{i\alpha} - x_1 e^{-i\alpha} + 2iy_0) - 2i(t \sin \alpha + y_0) \times \right.\end{aligned}\quad (27)$$

$$\times (t e^{-i\alpha} - x_1 e^{i\alpha} - 2iy_0)^{-2} - e^{-i\alpha} (t - x_1) / (t e^{i\alpha} - x_1 e^{-i\alpha} + 2iy_0)^2),$$

$$KP_1 = (M_y^\infty (1 + e^{-2i\alpha}) + M_{x_1}^\infty (1 - e^{-2i\alpha})) / 2,$$

де

$$\tilde{A}_3 = (\tilde{\mu}_1 \tilde{\kappa}_2 - \tilde{\mu}_2 \tilde{\kappa}_1) / \tilde{A}_2, \quad \tilde{A}_4 = (\tilde{\mu}_2 - \tilde{\mu}_1) / \tilde{A}_1.$$

Введемо позначення

$$\begin{aligned} Q_1(t) &= [\partial_{xy}^2 w] / (1 + \tilde{\kappa}_1) = \operatorname{Re} Q, \\ Q_2(t) &= -[\partial_{xx}^2 w] / (1 + \tilde{\kappa}_1) = \operatorname{Im} Q, \\ g'(t) &= g_1'(t) + i g_2'(t). \end{aligned} \quad (28)$$

З крайової умови (3) одержимо

$$g_1'(t) = \beta Q_1(t), \quad \beta = -hE_1 / (1 - \nu_1). \quad (29)$$

Використавши (29), виділивши у (19) і (26) дійсну й уявну частини та підставивши одержані вирази у крайову умову (2), отримаємо систему інтегральних рівнянь

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(KP_1) &= \int_{L_1} [-\operatorname{Re}\{2h^2\beta(L(t, x_1) + M(t, x_1)) + L_3(t, x_1) + M_3(t, x_1)\} Q_1(t) + \\ &\quad + 2h^2 \operatorname{Im}\{L(t, x_1) - M(t, x_1)\} g_2'(t) + \operatorname{Im}\{L_3(t, x_1) - M_3(t, x_1)\} Q_2(t)] dt, \\ 0 &= \int_{L_1} [\beta \operatorname{Im}\{L(t, x_1) + M(t, x_1)\} Q_1(t) + \operatorname{Re}\{L(t, x_1) - M(t, x_1)\} g_2'(t)] dt, \\ \operatorname{Im}(KP_1) &= C' - \\ &\quad - \int_{L_1} [\operatorname{Im}\{L_3(t, x_1) + M_3(t, x_1)\} Q_1(t) + \operatorname{Re}\{L_3(t, x_1) - M_3(t, x_1)\} Q_2(t)] dt, \end{aligned} \quad (30)$$

яку доповнюємо додатковими умовами

$$\int_{L_1} g_2'(t) dt = 0, \quad \int_{L_1} Q_j(t) dt = 0, \quad j = \overline{1, 2} \text{ і } \int_{L_1} t Q_2(t) dt = 0,$$

які виражають однозначність переміщень, кутів повороту та прогину при обході контуру тріщини. Зведені коефіцієнти інтенсивності зусиль K_j^* і моментів $K_{j_3}^*$ знайдемо за формулами [1,2]

$$\begin{aligned} K_{1_3}^{*\pm} &= K_{1_3}^\pm / (M_y^\infty \sqrt{l}) = \pm 2/3 (3 + \nu_1) / (1 - \nu_1^2) \lim_{t \rightarrow c} \sqrt{2(c-t)} Q_1^*(t), \\ K_{2_3}^{*\pm} &= K_{2_3}^\pm / (M_y^\infty \sqrt{l}) = \pm 2/3 (3 + \nu_1) / (1 - \nu_1^2) \lim_{t \rightarrow c} \sqrt{2(c-t)} Q_1^*(t), \end{aligned} \quad (31)$$

$$K_1^{*\pm} - i K_2^{*\pm} = K_j^\pm h^2 / (M_y^\infty \sqrt{l}) = \mp \lim_{t \rightarrow c} \sqrt{2(c-t)} g'^*(t), \quad (32)$$

де

$$g'^*(t) = h^2 / M_y^\infty g'(t), \quad Q^*(t) = E_1 h^3 / M_y^\infty Q(t). \quad (33)$$

Отриману систему (30) розв'язуємо чисельно за допомогою методу механічних квадратур [1].

Числовий аналіз задачі. Провели числовий аналіз задачі при $\nu_1 = \nu_2 = 0.33$. На рис. 2-3 показано графічну залежність контактного тиску Nh/M_y^∞ при різних відстанях $d = y_0/l$ для $\alpha = 0$, причому крива 1 відповідає приведеній відстані $d = 0.01$, крива 2 – $d = 0.1$, крива 3 – $d = 1$, крива 4 – $d = 10$. Рис. 2 побудовано при $\tilde{n} = E_2/E_1 = 0$ (випадок півплощини), а рис. 3 – при $\tilde{n} = 10^5$ (випадок жорстко защемленої півплощини). При $d \geq 10$, тобто, коли тріщина досить далеко від межі півплощини, то контактний тиск збігається з результатами [3].

Зауважимо таке: коли $\alpha = 90^\circ$ і $\nu_1 = \nu_2 = 0.25$, то отримаємо числові результати статей [5,6].

На рис. 4 і 5 показано графічну залежність коефіцієнтів інтенсивності зусиль і моментів від зміни кута нахилу тріщини α . Рис. 4 побудовано при $\tilde{n} = 0$, а рис. 5 – при $\tilde{n} = 10^5$; в обох випадках $\nu_1 = \nu_2 = 0.33$, $\rho = M_{x_1}^\infty/M_y^\infty = 1$, $d = 1.05$. Для порівняння результатів на цих рисунках розглянуто випадок, коли береги тріщини не контактують; відповідні криві позначено двома штрихами.

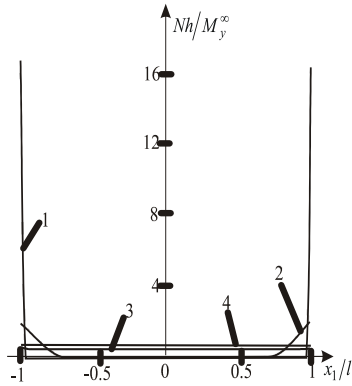


Рис. 2

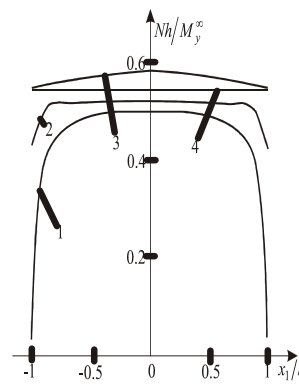


Рис. 3

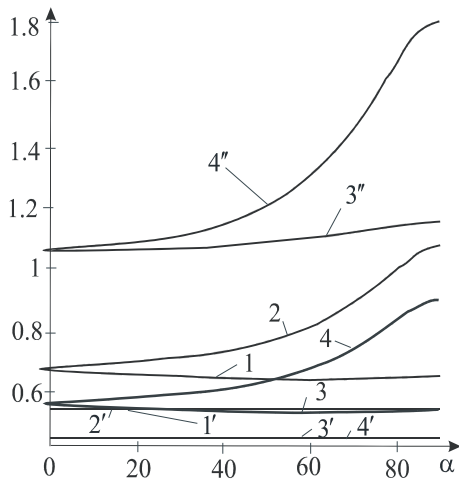


Рис. 4

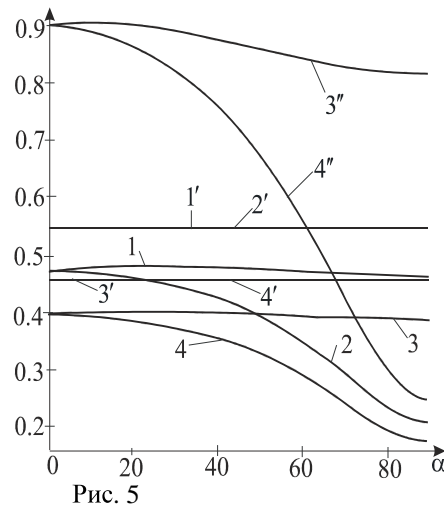


Рис. 5

Відповідність між позначеннями кривих на цих рисунках і коефіцієнтами інтенсивності зусиль K_j^\pm і моментів K_{j3}^\pm така:

$$1, 1' - K_1^+, \quad 2, 2' - K_1^-, \quad 3, 3', 3'' - K_{13}^+, \quad 4, 4', 4'' - K_{13}^-, \quad (34)$$

де криві без штрихів – з врахуванням контакту берегів тріщини, зі штрихом – тріщина в однорідній ізотропній пластині [3].

1. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацишин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – К., 1976.
2. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К., 1981.
3. Шацький І. П. Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами // Доповіді АН УРСР. Сер. А. Фізико-математичні та технічні науки. 1988. – № 7. С. 49–51.
4. Прусов И. П. Метод сопряжения в теории плит. – Минск. – 1975.
5. Шацький І. П., Перепічка В. В. Згин напівнескінченної пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – Т. 28, №2. – 1992. – С. 54–58.
6. Перепічка В. В. Згин напівнескінченної консольної пластини, послабленої розрізом з контактуючими берегами // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 1997. – Т. 40. – №2. – С. 83–86.
7. Мухомелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1966.

8. Опанасович В. К., Слободян Б. С. Згин кусково-однорідної пластини з тріщиною на прямолінійній межі поділу матеріалів з урахуванням контакту її берегів // *Мат. мет. та фіз.-мех. поля.* – 2007. – Т. 50. – № 1. – С. 168–177.

BIAXIAL BEND BY MOMENTS ON ENDLESSNESS OF LUMP-HOMOGENEOUS PLATE WITH RECTILINEAL CRACK TAKING INTO ACCOUNT CONTACT OF ITS BANKS

Ivan Zvizlo

*Ivan Franco National University of Lviv,
Universitetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine*

In work the bend of lump-homogeneous isotropic plate with the rectilineal border of division of materials by the distributed bend moments on endlessness is explored, when there is a crack in one half plane, the banks of which contact on all length under action of the external loading. With application of methods of theory of function of complex variable and complex potentials of Colosov-Mushelishvili the solve of the problem taken to the system of singular integral equalizations, which is solved by the numerical method of mechanical quadratures. The graphic dependences of contact pressure and coefficients of intensity of efforts and moments at different values of geometrical and mechanical parameters of problem is built.

Key words: plate, crack.

Стаття надійшла до редколегії 21.06.2007

Прийнята до друку 19.11.2008