

УДК 539.3

ЧИСЛОВЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПЛОСКОЇ ЗАДАЧІ ДЕФОРМАЦІЙНОЇ ТЕОРІЇ ПЛАСТИЧНОСТІ ПРО ДЕФОРМУВАННЯ МЕТАЛЕВОГО КУТНИКА

Ігор КУЗЬ

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна*

Варіаційно-різницевий метод побудови різницевих схем розповсюджено на незв'язні області з криволінійною межею. За допомогою цього методу розв'язана плоска задача деформаційної теорії пластичності, яка моделює деформування металевго кутника.

Ключові слова: варіаційно-різницевий метод, незв'язна область з криволінійною межею, деформаційна теорія пластичності, напружений стан, металевий кутник.

Дослідження напружено-деформованого стану з'єднувальних елементів конструкцій під дією нерівномірного навантаження є необхідним етапом розрахунку їхньої міцності та надійності. Оскільки такі елементи конструкцій часто мають криволінійну межу [1] і займають незв'язну область, то застосування аналітичних методів розв'язування відповідних крайових задач дуже обмежене.

Мета нашої праці – за допомогою числового методу розв'язати плоску задачу деформаційної теорії пластичності про деформування металевго кутника.

1. Формулювання задачі. Розглядається плоска задача деформаційної теорії пластичності (теорії малих пружно-пластичних деформацій Іллюшина) за активного навантаження в незв'язній області V з криволінійною межею Σ (рис.1), яка моделює напружено-деформований стан у металевому кутнику. З математичного погляду вона полягає у розв'язуванні рівнянь рівноваги у кутнику

$$(C_{ijkl}u_{k,l})_j + X_i = 0 \quad (1)$$

при використанні мішаних крайових умов на його поверхні $\Sigma (\Sigma_u \cup \Sigma_\sigma = \Sigma)$

$$u_i \Big|_{\Sigma_u} = u_i^0, \quad C_{ijkl}u_{k,l}n_j \Big|_{\Sigma_\sigma} = S_i^0. \quad (2)$$

Тут C_{ijkl} - компоненти тензора модулів пружності; u_i, X_i, S_i^0, n_j - компоненти векторів переміщень, об'ємних і поверхневих сил, а також зовнішньої нормалі до поверхні Σ_σ відповідно; $u_{i,j} \equiv \partial u_i / \partial x_j$. За однаковими індексами, які трапляються в одному виразі двічі, відбувається підсумовування від одиниці до двох.

У випадку плоскої деформації

$$u_1 = u_x(x, y), \quad u_2 = u_y(x, y), \quad u_3 = u_z \equiv 0. \quad (3)$$

Щоб отримати задачу деформаційної теорії пластичності для початково ізотропного матеріалу, треба в (1), (2) прийняти

$$C_{ijkl}(\varepsilon_u) = \lambda(\varepsilon_u)\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\varepsilon_u)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}),$$

$$\mu(\varepsilon_u) = \mu(1 - \omega(\varepsilon_u)), \quad \lambda(\varepsilon_u) = K - \frac{2}{3}\mu(\varepsilon_u), \quad (4)$$

де ε_u – інтенсивність тензора деформацій ($\varepsilon_u = \sqrt{e_{ij}e_{ij}}$, $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}$),

K – модуль об'ємного стиску, $\omega(\varepsilon_u)$ – функція пластичності Іллюшина [2].

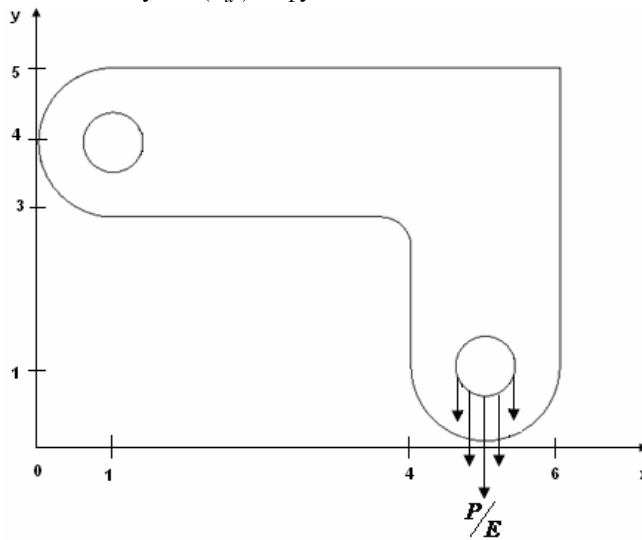


Рис. 1. Геометрія кутника з прикладеним до нього навантаженням

Для матеріалу з лінійним зміцненням $\omega(\varepsilon_u)$ має вигляд

$$\omega(\varepsilon_u) = \begin{cases} (1 - \gamma) \frac{\varepsilon_u - \varepsilon_s}{\varepsilon_u} & \text{при } \varepsilon_u > \varepsilon_s \\ 0 & \text{при } \varepsilon_u \leq \varepsilon_s, \end{cases} \quad (5)$$

де ε_s – межа текучості; $\gamma = \mu'/\mu$ (μ' – модуль зміцнення).

2. Метод розв'язування задачі. Для числового розв'язування задачі (1) - (5) зручно використовувати її варіаційне формулювання [3], яке полягає у мінімізації лагранжіана

$$L = \int_V W dV - \int_V X_i u_i dV - \int_{\Sigma_\sigma} S_i^0 u_i d\Sigma, \quad (6)$$

де $W = \frac{1}{2}C_{ijkl}(\varepsilon_u)u_{i,j}u_{k,l}$ - питома енергія пружно-пластичної деформації.

Запишемо лагранжіан (6) у канонічній області V_0 , якою може бути прямокутник або область, складена з них. Для цього використаємо дискретне взаємно-однозначне відображення сітки в криволінійній області V на рівномірну прямокутну сітку області V_0 (рис.2)

$$x_i = x_i(\beta^1, \beta^2) \quad (i = 1, 2). \quad (7)$$

Тоді $J = \det(A_i^j)$, $g_{ij} = A_i^m A_j^m$, де $A_i^j = \partial x_i / \partial \beta^j$ - матриця Якобі цього відображення. За допомогою (7) запишемо питому енергію деформації W у координатах $\vec{\beta}$

$$W = \frac{1}{2}C^{ijkl}u_{i,j}u_{k,l} = \frac{1}{2}C^{ijkl}(\vec{\beta})B_j^m B_l^n u_{i\psi m} u_{k\psi n} = \frac{1}{2}D^{imkn}(\vec{\beta})u_{i\psi m} u_{k\psi n},$$

де $u_{i\psi m} \equiv \partial u_i / \partial \beta^m$, $B_j^m = \partial \beta^m / \partial x_j$, $D^{imkn} = C^{ijkl} B_j^m B_l^n$.

Об'ємні та поверхневі інтеграли перетворюються за формулами

$$\int_V \vec{X} \vec{u} dv = \int_{V_0} J \vec{X} \vec{u} dv, \quad \int_{\Sigma} \vec{S}^0 \vec{u} d\Sigma = \int_{\Sigma_0} q(\vec{\beta}) \vec{S}^0 \vec{u} d\Sigma, \quad (8)$$

де

$$q(\vec{\beta}) = \begin{cases} \sqrt{g_{11}}, & \beta^2 = \{0, l_2\}, \\ \sqrt{g_{22}}, & \beta^1 = \{0, l_1\}. \end{cases}$$

Отже, лагранжіан у прямокутнику V_0 набуде вигляду

$$L_0 = \frac{1}{2} \int_{V_0} J D^{imkn} u_{i\psi m} u_{k\psi n} dv - \int_{V_0} J \vec{X} \vec{u} dv - \int_{\Sigma_0} q(\vec{\beta}) \vec{S}^0 \vec{u} d\Sigma, \quad (9)$$

де $dv = d\beta^1 d\beta^2$.

Замінивши в (9) усі континуальні функції сітковими, інтеграли – скінченими сумами, похідні – різницевиими похідними, отримаємо різницевий аналог лагранжіана L_0^h .

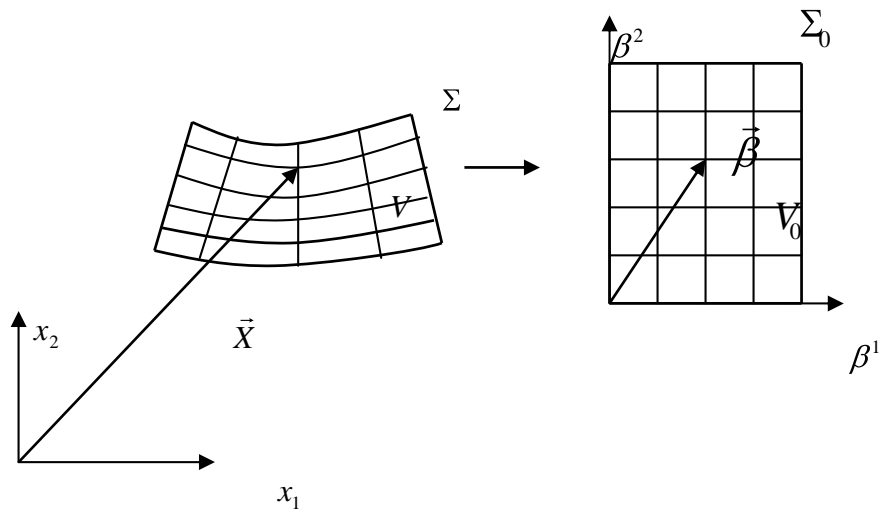


Рис. 2. Відображення сітки в криволінійній області V на рівномірну прямокутну сітку області V_0

Для визначення стаціонарної точки L_0^h у випадку деформаційної теорії пластичності отримаємо системи нелінійних алгебричних рівнянь

$$\vec{P}(\vec{u}) + \vec{F} = 0,$$

які розв'язуються ітераційними методами [4].

Описаний варіаційно-різницевий метод в областях з криволінійною межею реалізований у вигляді пакета програм на мові FORTRAN з підпрограмою побудови сіток на DELPHI.

3. Результати числових досліджень. На рис. 1 зображено геометрію кутника і прикладене до нього навантаження. Верхній отвір закріплений, а зовнішня поверхня кутника вільна від навантажень ($\sigma_{nn} = 0, \sigma_{n\tau} = 0$). До нижнього отвору кутника прикладене нерівномірне вертикальне навантаження вздовж нижнього півкола, яке є найбільшим ($P/E = 0,3$) у нижній точці ($x = 5$) цього кола і спадає до нуля на горизонтальному діаметрі.

Усі обчислення проводили у безрозмірних величинах. Модуль пружності $E = 1$, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,3$, межа текучості $\sigma_s = 0,5$, параметр зміцнення $\gamma = 0,2$. Отримані діаграми розподілу напружень σ_{xx}/E , σ_{yy}/E та інтенсивності тензора напружень σ_u/E зображені відповідно на рис. 3-5.

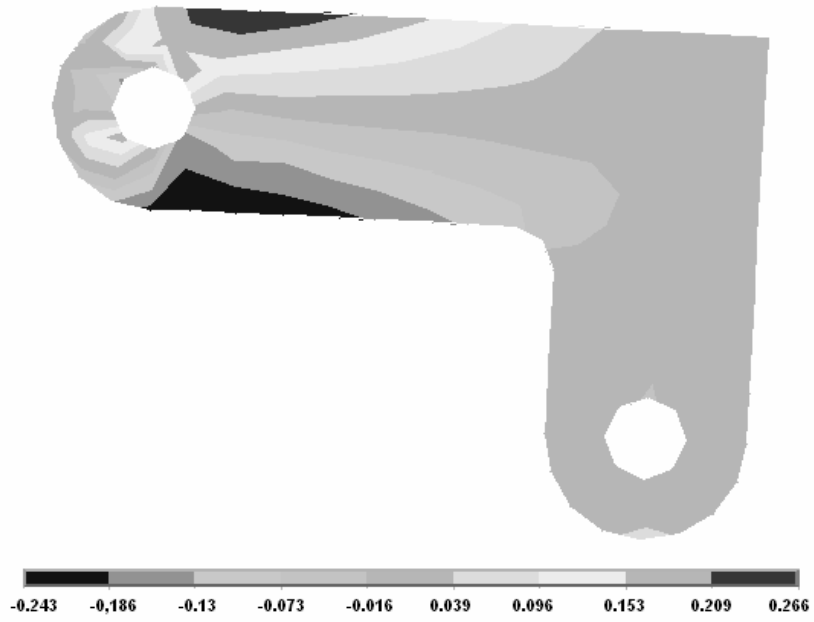
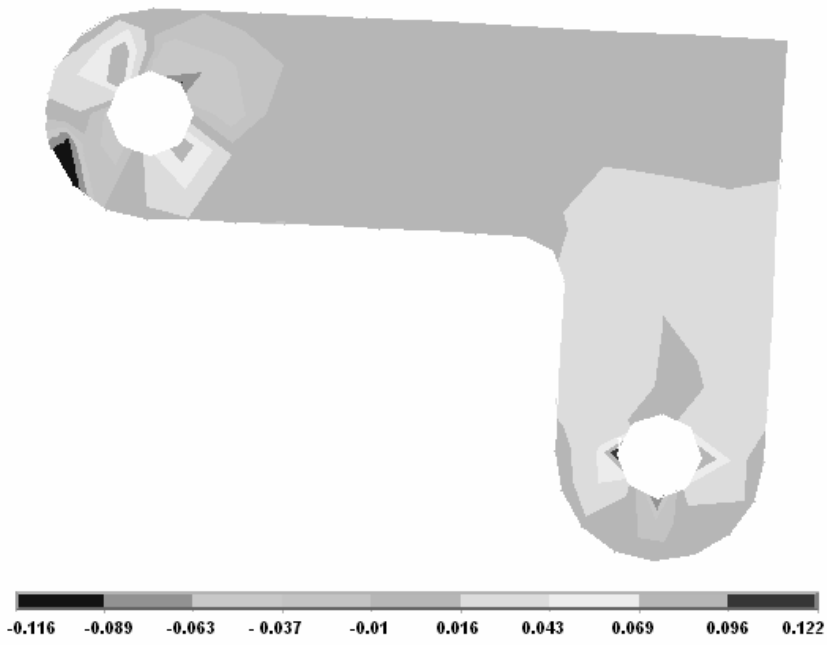


Рис. 3. Діаграма розподілу напружень σ_{xx}/E



4. Діаграма розподілу напружень σ_{yy}/E

Рис.

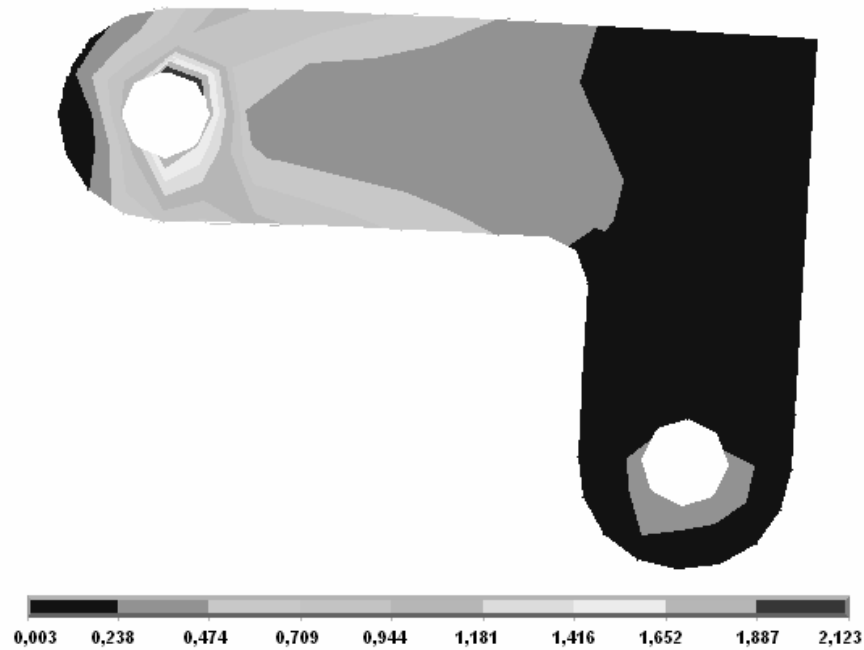


Рис. 5. Діаграма розподілу інтенсивності тензора напружень σ_u/E

На цих рисунках також показано, як буде деформуватися межа кутника.

Як видно з рис. 3, у верхній лівій частині кутника переважають розтягувальні горизонтальні напруження σ_{xx}/E , а у нижній лівій – стискувальні. Розтягувальні напруження σ_{yy}/E з'являються і в околі горизонтального діаметра нижнього отвору кутника (рис. 4).

У пластичному кутнику значення напружень менше, ніж у пружному, та їхній розподіл, особливо в околі лівого отвору, є дещо іншим. Зокрема, розтягувальні напруження σ_{xx}/E з'являються і в нижній частині лівого отвору (рис. 3), максимальні стискувальні напруження σ_{yy}/E з'являються як біля верхнього отвору та біля нижнього (рис. 4).

За допомогою діаграми розподілу інтенсивності тензора напружень σ_u/E (рис. 5) можна визначити області виникнення та розвитку пластичних деформацій. Згідно з умовами текучості Губера-Мізеса пластичне деформування починається тоді, коли інтенсивність тензора напружень σ_u досягає межі текучості σ_s ($\sigma_s=0,5$). Як видно з рис. 5, пластичні деформації зароджуються вздовж правого півкола лівого отвору і розповсюджуються спочатку до нижнього краю кутника вправо приблизно під кутом 45^0 , а потім так само вниз, від цього ж отвору під кутом 45^0 догори до верхнього краю кутника.

Отож, отримані поля напружень допомагають виявити області їхньої найбільшої концентрації та за відповідним критерієм руйнування оцінити міцність кутника.

1. Кузь І.С. Численная реализация вариационно-разностного метода для областей с криволинейной границей // Численный анализ, математическое моделирование и их применение в механике. – М., 1988. – С. 59–63.
2. Ильюшин А.А. Пластичность.- М.; Л., 1948.
3. Победра Б. Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. – М., 1981.
4. Шешенин С. В., Кузь І. С. О прикладных итерационных методах // Вычислительная механика деформируемого твердого тела. – М., 1990. – Вып. 1. – С. 63–75.

NUMERICAL SOLUTION OF PLANE PLASTICITY PROBLEM ABOUT METAL ELBOW STRAIN

Ihor Kuz'

*Ivan Franco National University of Lviv,
Universitetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine*

Variational difference method of building finite difference schemes is extended to curvilinear unconnected domains. Using this method for solving plane plasticity problem stress state of metal elbow is investigated.

Key words: variational difference method, curvilinear unconnected domain, strain theory of plasticity, stress state, metal elbow.

Стаття надійшла до редколегії 31.05.2007
Прийнята до друку 19.11.2008