ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2008. Вип. 69. С. 183–188 *Ser. Mech.-Mat. 2008. Vol. 69. P. 183–188*

УДК 539.3

АСИМПТОТИЧНИЙ АНАЛІЗ ТЕМПЕРАТУРНИХ НАПРУЖЕНЬ У ТОНКІЙ СТРІЧЦІ ДЛЯ ПРОТЯЖНИХ ЗОН НАГРІВУ У ВАКУУМІ

Іван ПРОКОПИШИН[1], Дмитро ХЛЄБНІКОВ[1], Йосип ГРОБЕР[2], Артур ЩУКІН[2]

[1]Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна
[2]Компанія Сідрабе, вул. Крустпілс, 17 LV-1073 Рига, Латвія

Розглянуто квазістаціонарну задачу про температурні напруження у тонкій металевій стрічці при нанесенні покриття у вакуумі. Для протяжних технологічних зон отримано асимптотичні вирази для напружень у формі інтегралів Фур'є. Проведено числовий аналіз асимптотичних полів напружень.

Ключові слова: тонка стрічка, вакуумне покриття, температурні напруження, перетворення Фур'є.

Нанесення металевого покриття на тонку стрічку у вакуумі супроводжується нагрівом, який зумовлює температурні напруження [9]. Температурні поля у стрічці для різних технологічних процесів досліджені у праці [4], формули для напружень отримано у [2], а числовий аналіз для локальних зон нагріву проведено у [6]. Далі подаємо асимптотичний аналіз напружень у стрічці для протяжних зон нагріву.

Формулювання задачі. Тонка металева стрічка товщини δ та ширини $2h$ рухається з постійною швидкістю v через технологічну зону. Нерухому прямокутну систему координат Oxy розмістимо в центрі зони, вісь Ox спрямуємо вздовж стрічки в напрямі її руху (рис. 1).

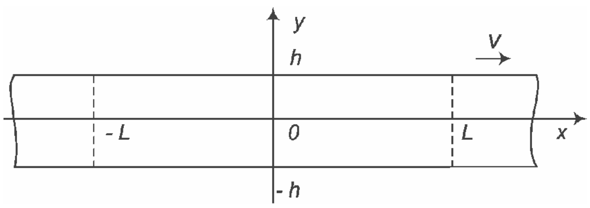

Рис. 1.

Під дією стаціонарного теплового потоку вздовж стрічки усталюються квазістаціонарні поля температури і напружень.

Визначення температурного поля. Для моделювання температурного поля у стрічці взято припущення:

1) стрічка нескінчена, а розподіл температури – квазістаціонарний;
2) джерело нагріву має сталу інтенсивність W по зоні $-L \le x \le L$;
3) торці стрічки та її поверхня поза зоною нагріву – теплоізольовані;

4) температура стала по товщині стрічки.

Позначимо:

$T(x)$ – температура стрічки в точках з координатою x;

$T_0 = T(-\infty)$ – температура стрічки в нескінченості до зони нагріву;

$\Theta(x) = T(x) - T_0$ – відносна температура стрічки;

λ – коефіцієнт теплопровідності матеріалу стрічки;

c – питома теплоємність матеріалу стрічки;

ρ – густина матеріалу стрічки;

$s = \rho chv / \lambda$ – безрозмірна швидкість стрічки;

$\xi = x/h$, $\eta = y/h$ – безрозмірні координати;

$2l = 2L/h$ – безрозмірна довжина зони нагріву.

За прийнятих гіпотез задача теплопровідності в нерухомій системі координат Oxy формулюється так [3]:

$$\lambda \frac{d^2\Theta}{dx^2} - \rho cv \frac{d\Theta}{dx} + \frac{W}{\delta} f(x) = 0, \quad f(x) = \begin{cases} 1, |x| \le L \\ 0, |x| > L \end{cases}, \quad \lim_{x \to -\infty} \Theta = 0. \tag{1}$$

Її розв'язок легко знайти методом інтегрального перетворення Фур'є [7]

$$\Theta(\xi) = \frac{2Wh^2}{\pi\delta\lambda} \int_0^\infty \frac{t \cos t\xi + s \sin t\xi}{t^2(t^2 + s^2)} \sin lt \, dt. \tag{2}$$

Обчислюючи інтеграл, отримаємо [2]

$$\Theta(\xi) = \frac{Wh^2}{\delta\lambda s} \begin{cases} 2sh(sl) e^{s\xi} / s, & \xi < -l, \\ l + \xi + \left(1 - e^{-s(l-\xi)}\right) / s, & |\xi| \le l, \\ 2l, & \xi > l, \end{cases} \tag{3}$$

Температурні напруження. Напруження в стрічці виражають через функцію напружень Ері [1]

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \tag{4}$$

яка задовольняє рівняння

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = -\alpha E \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2}, \tag{5}$$

(α – коефіцієнт лінійного температурного розширення, E – модуль Юнга) та крайові умови

$$F\Big|_{y=\pm h} = \frac{\partial F}{dy}\Big|_{y=\pm h} = 0\,. \tag{6}$$

Метод інтегрального перетворення Фур'є [6,7] для напружень $\overline{\sigma}_m = \lambda\delta\sigma_m \big/ 4\alpha E W h^2$, $m = xx,\, yy,\, xy$, отримаємо вирази [2]

$$\overline{\sigma}_{xx}(\xi,\eta) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty p\,(t,\eta)\,\varphi(t,\xi)\sin lt\,dt\,, \tag{7}$$

$$\overline{\sigma}_{yy}(\xi,\eta) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty q\,(t,\eta)\,\varphi(t,\xi)\sin lt\,dt\,, \tag{8}$$

$$\overline{\sigma}_{xy}(\xi,\eta) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty r\,(t,\eta)\,\psi(t,\xi)\sin lt\,dt\,, \tag{9}$$

де

$$p\,(t,\eta) = \frac{\left(sh\,t - t\,ch\,t\right)ch\,t\eta + t\eta\,sht\,sh\,t\eta}{t^2(t^2+s^2)(sh\,2t+2t)},\ \varphi(t,\xi) = t\cos t\xi + s\sin t\xi\,,$$

$$q\,(t,\eta) = \frac{1}{t^2(t^2+s^2)}\left(\frac{\left(sh\,t + t\,ch\,t\right)ch\,t\eta - t\eta\,sh\,t\,sh\,t\eta}{sh\,2t+2t} - \frac{1}{2}\right),$$

$$r\,(t,\eta) = \frac{t\,cht\,sh\,t\eta - t\eta\,sh\,t\,ch\,t\eta}{t^2(t^2+s^2)(sh\,2t+2t)},\ \psi(t,\xi) = t\sin t\xi - s\cos t\xi\,.$$

Аналіз напруженого стану. Підінтегральні функції у виразах (7)-(9) обмежені в нулі, а при великих t мають асимптотику $O(t^{-3})$. Це дає змогу наблизити їх інтегралами зі скінченою верхньою границею, які для $l < 50$ ефективно обчислюють числовими методами [6]. На практиці існують технологічні процеси з протяжними зонами – $l > 100$.

Виконати граничний перехід при $l \to \infty$ безпосередньо у формулах (7)-(9) неможливо, оскільки концентрація напружень відбувається у зонах $\xi = \pm l$. Тому введемо нові координати ξ' за формулами $\xi = \pm l + \xi'$. Отримаємо зображення

$$\varphi(t,\xi)\sin lt = \frac{1}{2}\left[\left(t\cos\xi' t + s\sin\xi' t\right)\sin 2lt \pm \left(-t\sin\xi' t + s\cos\xi' t\right)(1-\cos 2lt)\right],$$

$$\psi(t,\xi)\sin lt = \frac{1}{2}\left[\left(t\sin\xi' t - s\cos\xi' t\right)\sin 2lt \pm \left(t\cos\xi' t + s\sin\xi' t\right)(1-\cos 2lt)\right].$$

За теоремою Рімана-Лебега [5] для абсолютно інтегрованої на відрізку $[a,b]$ функції виконуються рівності $\lim\limits_{l\to\infty}\int\limits_a^b f(t)\sin lt\,dt = \lim\limits_{l\to\infty}\int\limits_a^b f(t)\cos lt\,dt = 0$. Тому для асимптотичних напружень $\tilde{\sigma}_m = \lim\limits_{l\to\infty}\overline{\sigma}_m$ в зонах $\xi = \pm l$ маємо

$$\tilde{\sigma}_{xx}(\xi',\eta) = \pm\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty p(t,\eta)(-t\sin\xi' t + s\cos\xi' t)dt\,, \tag{10}$$

$$\tilde{\sigma}_{yy}(\xi',\eta) = \pm\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty q(t,\eta)(-t\sin\xi' t + s\cos\xi' t)dt\,, \tag{11}$$

$$\tilde{\sigma}_{xy}(\xi',\eta) = \pm\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty r(t,\eta)(t\cos\xi' t + s\sin\xi' t)dt\,. \tag{12}$$

Зазначимо, що напруження $\tilde{\sigma}_{xx}$ та $\tilde{\sigma}_{yy}$ симетричні по η, а напруження $\tilde{\sigma}_{xy}$ – кососиметричні.

На рис. 2, 3 для параметра $s = 416{,}5$ показано лінії рівня напружень $\tilde{\sigma}_{xx}$ та $\tilde{\sigma}_{yy}$ в координатах (ξ',η). Напруження $\tilde{\sigma}_{xx}$ максимальні на краях стрічки $\eta = \pm 1$ при $\xi = l$. Максимальні еквівалентні напруження за енергетичною теорією формозміни $\tilde{\sigma}_e = \left(\tilde{\sigma}_{xx}^2 - \tilde{\sigma}_{xx}\tilde{\sigma}_{yy} + \tilde{\sigma}_{yy}^2 + 3\tilde{\sigma}_{xy}^2\right)^{\frac{1}{2}}$ збігаються з максимальними напруженнями $\tilde{\sigma}_{xx}$. Напруження $\tilde{\sigma}_{xy}$ значно менші від напружень $\tilde{\sigma}_{xx}$ та $\tilde{\sigma}_{yy}$. В області $\eta = 0$, $\xi = l$ простежуються від'ємні (стискаючі) напруження $\tilde{\sigma}_{yy}$.

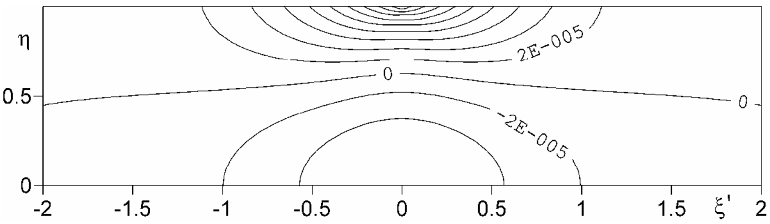

Рис. 2

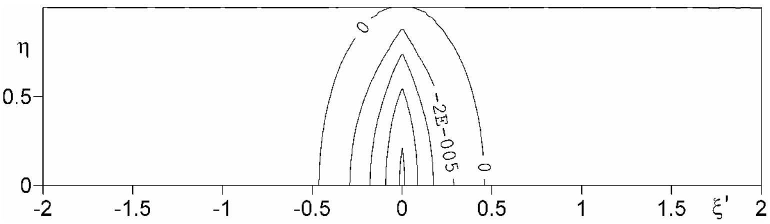

Рис. 3

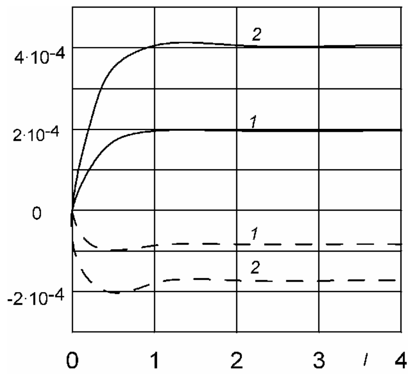

Рис. 4.

На рис. 4 показано залежність максимальних розтягуючих напружень $\tilde{\sigma}_{xx}$ (суцільні лінії) та максимальних стискуючих напружень $\tilde{\sigma}_{yy}$ (штрихові лінії) у стрічці від параметра l . Криві 1 побудовано для значення параметра $s = 416,5$, а криві 2 – $s = 200$. Легко бачити, що вже при $l = 3$ напруження близькі до своїх асимптотичних значень.

---

1. *Боли Б., Уэйнер Дж.* Теория температурных напряжений. – М., 1964.
2. *Гробер И.Л., Хлебников Д.Г.* Температурные напряжения в бесконечной ленте при локальном нагреве в вакууме // Нанесение покрытий в вакууме. – Рига, 1986. – С.96–104.
3. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопропроводность твердых тел. – М., 1964.
4. *Клебанов Ю.Д., Нерсисян Р.Г., Сумароков В.Н.* Нагрев в вакууме движущегося полосового проката поверхностными стационарными источниками// Создание машин и исследование процессов получения вакуумных конденсационных покрытий: Труды ВНИИМЕТМАШ. – 1977. – № 51. – С.99–105.
5. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа.– М., 1989. Т. 3.
6. *Прокопишин І., Хлєбніков Д., Гробер Й., Щукін А.* Аналіз температурних напружень у тонкій стрічці за локального нагріву у вакуумі// Машинознавство. – 2008. – 3 с. (у друці).
7. *Снеддон И.* Преобразование Фурье. – М., 1955.
8. *Уфлянд Я.С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Л., 1967.
9. *Mattox D.M.* Handbook of Physical Vapor Deposition. – William Andrew Inc., 1998.

ASYMPHTOTIC ANALYSIS OF THERMAL STRESSES IN INFINITE THIN TAPE FOR LONG HEATING ZONES IN VACUUM

Ivan Prokopyshyn[1], Dmytro Khlebnikov[1],

Yosyp Grobers[2], Artur Schukin[2]

[1]*Ivan Franko National University of L'viv,*
Universytetska Str., 1 79000 L'viv, Ukraine
[2]*Sidrabe Inc., Krustpils iela, 17 LV-1073 Riga, Latvia*

Quasi-steady thermal stresses state of metal foil during vacuum deposition is considered. Asymptotic expressions for stresses in form of Fourier integrals are obtained for long heating zones.. Asymptotic stresses fields are analyzed.

Key words: metal foil, vacuum deposition, thermal stresses, Fourier transform.

Стаття надійшла до редколегії 24.05.2007
Прийнята до друку 19.11.2008