ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2008. Вип. 69. С. 177–182 *Ser. Mech.-Mat. 2008. Vol. 69. P.177–182*

УДК 539.375; 539.4:536.543

ДОВГОВІЧНІСТЬ ПЛАСТИНИ З ДВОЯКО-ПЕРІОДИЧНОЮ СИСТЕМОЮ ПРЯМОЛІНІЙНИХ ПОВЗУЧО-ВТОМНИХ ТРІЩИН

Ростислав ЛЕСІВ

Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

З допомогою раніше побудованого автором кінетичного рівняння визначено довговічність пластини з двояко-періодичною системою повзучо-втомних тріщин в умовах високої температури. Розглянуто частковий випадок, зокрема аналог задачі Ґріффітса для такої системи тріщин, побудовано графічну залежність залишкової довговічності пластини від початкового розміру тріщини.
Ключові слова: довговічність, двояко-періодична система, повзучо-втомна тріщина, коефіцієнт інтенсивності напружень.

Руйнування елементів конструкцій, які працюють в умовах змінного в часі навантаження з довготривалими циклами та при високих температурах, відбувається в результаті росту повзучо-втомної тріщини і досягнення нею критичного розміру. Ця проблема стає особливо актуальною для тіл, які вже містять дефекти типу тріщин.

Сьогодні питання поширення повзучо-втомної тріщини досліджено ще недостатньо добре. Здебільшого відомі теоретичні результати зводяться до опису експериментальних даних (див., наприклад, [1-3]) і узагальнення їх у вигляді певного кінетичного рівняння, такі задачі розглядають як однопараметричні. Проте, задачі про поширення повзучо-втомної тріщини багатопараметричні і треба розвивати теорії, які б враховували всі головні параметри цього явища.

На підставі такої теорії у цій праці зробили спробу побудувати математичну модель, яка б достатньо добре описувала поширення в пластині двояко-періодичної системи повзучо-втомних тріщин і допомагала б визначити на цій основі період їхнього росту.

Формулювання задачі і метод її розв’язку. Розглянемо нескінчену пластинку послаблену двояко-періодичною системою прямолінійних тріщин довжини $2l_0$, центри яких розміщені у вузлах квадратної решітки зі стороною d (рис. 1).

Вважають, що пластина нагріта до високої температури, а на нескінченності розтягується рівномірно розподіленими, змінними в часі зусиллями інтенсивності p (рис. 2), направленими перпендикулярно до лінії розміщення тріщини. Задача полягає у визначенні кількості циклів $N = N_*$, коли довжина повзучо-втомної тріщини підросте до критичного розміру $l(N_*) = l_*$ і відбудеться руйнування.

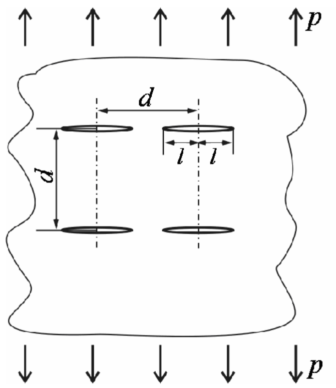

Рис. 1. Схема навантаження пластини послабленої двояко-періодичною системою тріщин

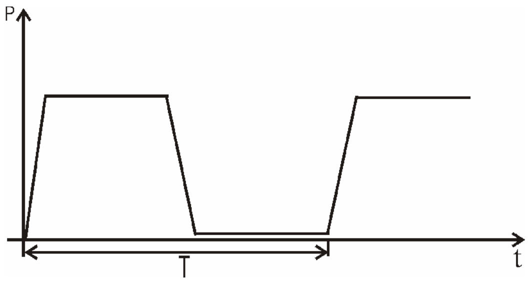

Рис.2. Схема зміни в часі параметра p зовнішнього навантаження

Оскільки в цьому випадку напружено-деформований стан у пластині симетричний стосовно лінії розміщення тріщини, то поширення повзучо-втомної тріщини буде описуватися згідно з [4,5] рівнянням

$$\frac{dl}{dN} = \frac{\alpha E}{4.5\sigma_{of}} \frac{\left[\delta_{\max} + AT\left[\delta_{\max}\delta_{fC}^{-1}\right]^m\right]}{\left(\delta_{fC} - \delta_{\max}\right)}, \tag{1}$$

за початкових і кінцевих умов

$$\begin{aligned} N &= 0, \quad l(0) = l_0; \\ N &= N_*, \quad l(N_*) = l_*, \end{aligned} \tag{2}$$

де критичну довжину тріщини визначають з такого критерію

$$\delta_{\max}(l_*) = \delta_{fC}\,. \tag{3}$$

Тут N – кількість циклів; E – модуль пружності; σ_{of} – границя плинності матеріалу; $\delta_{\max}$ – максимальне розкриття у вершині тріщини; δ_{fC} – критичне значення $\delta_{\max}$; A, m – параметри істинної діаграми розтягу матеріалу.

Отже, задача зведеться до розв'язку рівняння (1) при умовах (2) і (3), де треба знати функцію розкриття у вершині тріщини $\delta_{\max}$. Цю величину визначаємо наближено з допомогою відомого [6] методу еквівалентних напружених станів. Згідно з цим методом за допоміжну задачу вибираємо задачу Ґріффітса, для якої

$$\delta_{\max}^{(G)}(l_1) = -8 l_1 \sigma_{of} E^{-1} \ln\left[\cos\left(\pi p / 2\sigma_{of}\right)\right], \tag{4}$$

$$K_{\mathrm{I}\max}^{(G)} = p\sqrt{\pi l_1}. \tag{5}$$

Тут $2l_1$ – довжина тріщини для задачі Ґріффітса, $K_{\mathrm{I}\max}$ - максимальне значення коефіцієнта інтенсивності напружень. Для розглядуваної нами задачі коефіцієнт інтенсивності напружень визначаємо з допомогою даних [7] так:

$$\begin{aligned} K_{\mathrm{I}\max} = p(\pi l)^{\frac{1}{2}}\big(1 + 8,8\cdot 10^{-2}\pi\lambda^2 + 3,8\cdot 10^{-3}\pi^2\lambda^4 - \\ - 2,6\cdot 10^{-3}\pi^3\lambda^6 + O\left(\lambda^8\right)\big), \quad \lambda = 2ld^{-1}. \end{aligned} \tag{6}$$

Тоді згідно з методом еквівалентних напружених станів величину $\delta_{\max}$ визначаємо так:

$$\delta_{\max} = \delta_{\max}^{(G)}(l_1), \tag{7}$$

де l_1 визначається шляхом прирівнювання співвідношень (5) і (6), тобто

$$l_1 = l\left(1 + 8,8\cdot 10^{-2}\pi\lambda^2 + 3,8\cdot 10^{-3}\pi^2\lambda^4 - 2,6\cdot 10^{-3}\pi^3\lambda^6 + O\left(\lambda^8\right)\right)^2. \tag{8}$$

Підставляючи (8) в (4) і кінцево у (7), знайдемо

$$\begin{aligned} \delta_{\max} = -8\sigma_{of} l E^{-1}\ln\left[\cos\left(\pi p/2\sigma_{of}\right)\right]\big(1 + 8,8\cdot 10^{-2}\pi\lambda^2 + 3,8\cdot 10^{-3}\pi^2\lambda^4 - \\ - 2,6\cdot 10^{-3}\pi^3\lambda^6 + O\left(\lambda^8\right)\big)^2. \end{aligned} \tag{9}$$

На підставі (9), рівняння (1) запишемо так:

$$\begin{aligned} \frac{dl}{dN} = \frac{\alpha E}{4.5\sigma_{of}}\Big[-8\sigma_{of} l E^{-1}\ln\left[\cos\left(\pi p/2\sigma_{of}\right)\right]\times\big(1 + 8,8\cdot 10^{-2}\pi\lambda^2 + 3,8\cdot 10^{-3}\pi^2\lambda^4 \\ -2,6\cdot 10^{-3}\pi^3\lambda^6 + O\left(\lambda^8\right)\big)^2 + AT\Big[-8\sigma_{of} l E^{-1}\ln\left[\cos\left(\pi p/2\sigma_{of}\right)\right]\times \\ \times\big(1 + 8,8\cdot 10^{-2}\pi\lambda^2 + 3,8\cdot 10^{-3}\pi^2\lambda^4 - 2,6\cdot 10^{-3}\pi^3\lambda^6 + O\left(\lambda^8\right)\big)^2\delta_{fC}^{-1}\Big]^m\Big]\times \\ \times\Big(\delta_{fC} - 8\sigma_{of} l E^{-1}\ln\left[\cos\left(\pi p/2\sigma_{of}\right)\right]\times\big(1 + 8,8\cdot 10^{-2}\pi\lambda^2 + 3,8\cdot 10^{-3}\pi^2\lambda^4 - \\ -2,6\cdot 10^{-3}\pi^3\lambda^6 + O\left(\lambda^8\right)\big)^2\Big)^{-1}, \end{aligned} \tag{10}$$

до цього рівняння треба додати умови (2), і умову (3), яка набуде такого вигляду:

$$-8\sigma_{of} l_* E^{-1} \ln\left[\cos\left(\pi p / 2\sigma_{of}\right)\right] \times$$
$$\times\left(1 + 8,8\cdot 10^{-2}\pi\lambda^2 + 3,8\cdot 10^{-3}\pi^2\lambda^4 - \right. \tag{11}$$
$$\left. - 2,6\cdot 10^{-3}\pi^3\lambda^6 + O\left(\lambda^8\right)\right)^2 = \delta_{fC}.$$

Отож, розв'язок задачі виконують інтегруванням рівняння (10) при умовах (2) і (11).

Цю задачу можна дещо спрости, коли початкова тріщина довжини $2l_0$ буде макроскопічною. Тоді її розв’язок зведемо до рівняння [4,5]

$$\frac{dl}{dN} = \frac{\alpha E^2}{4,5}\left[K_{\mathrm{I}\max}^2 \sigma_{of}^{-1} E^{-1} + A\cdot T\left[K_{\mathrm{I}\max}^2 K_{fC}^{-2}\right]^m\right]^2 (K_{fC}^2 - K_{\mathrm{I}\max}^2)^{-1}, \tag{12}$$

де K_{fC} – критичне значення $K_{\mathrm{I}\max}$.

Для визначення періоду докритичного росту тріщини $N = N_*$ до рівняння (12) додаємо початкову і кінцеву умови (2), де критичну довжину $l = l_*$ визначають із критерію Ірвіна [8]

$$K_{\mathrm{I}\max}(p, l_*) = K_{fC}. \tag{13}$$

Тоді з врахуванням (6), співвідношення (12) набудуть вигляду

$$\frac{dl}{dN} = \frac{\alpha E^2}{4,5}\left[p^2\pi l\left(1 + 8,8\cdot 10^{-2}\pi\lambda^2 + 3,8\cdot 10^{-3}\pi^2\lambda^4 - 2,6\cdot 10^{-3}\pi^3\lambda^6 + \right.\right.$$
$$\left. + O\left(\lambda^8\right)\right)^2 \sigma_{of}^{-1} E^{-1} + A\cdot T\left[p^2\pi l\left(1 + 8,8\cdot 10^{-2}\pi\lambda^2 + 3,8\cdot 10^{-3}\pi^2\lambda^4 - \right.\right. \tag{14}$$
$$\left.\left.\left. -2,6\cdot 10^{-3}\pi^3\lambda^6 + O\left(\lambda^8\right)\right)^2 K_{fC}^{-2}\right]^m\right]^2 (K_{fC}^2 - p^2\pi l\left(1 + 8,8\cdot 10^{-2}\pi\lambda^2 + \right.$$
$$\left. + 3,8\cdot 10^{-3}\pi^2\lambda^4 - 2,6\cdot 10^{-3}\pi^3\lambda^6 + O\left(\lambda^8\right)\right)^2)^{-1}.$$

Спростимо рівняння (14), розклавши його за степенями λ і обмежуючись доданками λ^2, отримаємо

$$dN = \frac{4.5}{\alpha E^2}\left(K_{fC}^2 - p^2\pi l\left(1 + 8,8\cdot 10^{-2}\pi\lambda^2\right)\right)\times\left[p^2\pi l\sigma_{of}^{-1} E^{-1}\left(1 + 8,8\cdot 10^{-2}\pi\lambda^2\right) + \right.$$
$$\left. + AT\left(p^2\pi l K_{fC}^{-2}\right)^m\left(1 + 8,8\cdot 10^{-2} m\pi\lambda^2\right)\right]^{-2} dl. \tag{15}$$

Проінтегрувавши диференційне рівняння (15) в межах від 0 до N_*, та від l_0 до l_*, одержимо остаточне рівняння для визначення періоду докритичного росту двояко-періодичної системи повзучо-втомних тріщин

$$N_* = \int_{l_0}^{l_*} \frac{4.5}{\alpha E^2}\left(K_{fC}^2 - p^2\pi l\left(1 + 8,8\cdot 10^{-2}\pi\lambda^2\right)\right)\times\left[p^2\pi l\sigma_{of}^{-1}E^{-1}\left(1 + 8,8\cdot 10^{-2}\pi\lambda^2\right) + \right.$$
$$\left. + AT\left(p^2\pi l K_{fC}^{-2}\right)^m\left(1 + 8,8\cdot 10^{-2}m\pi\lambda^2\right)\right]^{-2} dl. \tag{16}$$

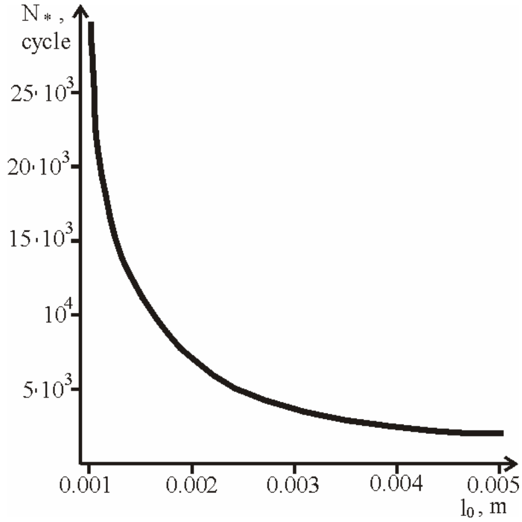

Рис. 3. Графічна залежність залишкової довговічності пластини від початкового розміру тріщини

Для кількісного аналізу співвідношення (16) задамо конкретні значення механічних характеристик і параметрів високотемпературної втоми та повзучості для випадку сталі 321, які досліджувалися в [3]. В результаті отримаємо

$$E = 1,9\cdot 10^5 \text{ MPa}, \quad \sigma_t = 450 \text{ MPa},$$
$$A = 6\cdot 10^{-5},\ m = 1,43,\ d = 0,03 \text{ m}, \tag{17}$$
$$l_* = 0,01 \text{ m},\ K_{fC} = 90 \text{ Mpa}\sqrt{\text{m}},\ p = 200 \text{ MPa}.$$

Враховуючи це, за допомогою числового методу обчислимо співвідношення (16), та подамо графічну залежність залишкового ресурсу пластини $N = N_*$ від початкової довжини тріщини l_0 (рис. 3).

---

1. *Тайра С., Отани Р.* Теория высокотемпературной прочности мате-риалов. – М., 1986.

2. *Koterazawa R.* Creep-Fatigue crack growth of metallic materials at elevated temperatures// Advances in Fracture resistance and structural integrity. – Pergamon, 1994. – P. 497–504.

3. *Gladwin D.N., Miller D.A., Neate G.J., Priest R.H.* Creep, fatigue and creep-fatigue crack growth rates in parent and simulated HAZ type 321 stainless steel.// Fatigue and fracture of engineering materials & structures. 1988. – 11, № 5. – P. 35.

4. *Andrejkiv* O., *Lesiv R.* Mathematical model for estimating the period of creep-fatigue crack growth in construction materials at high temperature.// Acta mechanica et automatica. – 2007. – 1, № 1. – P.7.

5. *Андрейків О.Є., Лесів Р.М.* Визначення періоду докритичного росту повзучо-втомної тріщини в тонкостінних елементах конструкцій.// Збірник тез доповідей «8-й міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові». – Львів.: Національний університет «Львівська політехніка», 23-25 травня 2007, – С. 38.

6. *Андрейкив А.Е., Дарчук А. И.* Усталостное разрушение и долговечность конструкций. – К., 1992.

7. *Саврук М.П.* Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами – К., 1988.

8. *Панасюк В. В., Андрейкив А. Е., Партон В. З.* Основы механики разрушения. – К., 1988.

LIFETIME OF A PLATE WITH DOUBLE-PERIODICAL SYSTEM OF STRAIGHT CREEP-FATIGUE CRACKS

Rostislav Lesiv

Ivan Franco National University of Lviv,
Universitetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine

The lifetime of a plate with double-periodical system of creep-fatigue cracks under high temperature is determined with the help of kinetic equation, which was formulated by the author earlier. The analog of the Griffith problem for such a system was examined, and graphical correlation between residual lifetime of the plate and initial crack length was shown.

Key words: lifetime, double-periodical system, creep-fatigue crack, stress intensity factor.

Стаття надійшла до редколегії 31.05.2007
Прийнята до друку 19.11.2008