

УДК 539.3

ВИЗНАЧЕННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ТЕМПЕРАТУРНИХ ПОЛІВ І НАПРУЖЕНЬ У ЗІСТИКОВАНИХ СМУГАХ НА ПІДСТАВІ ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНОЇ ФОРМУЛИ ОБЕРНЕННЯ ЛАПЛАСА

Тетяна СОЛЯР

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3б 79053 Львів, Україна*

Наведено алгоритм розрахунку нестационарних температурних полів і спричинених ними напружень для пластин з довільною кількістю смуг, який ґрунтується на безпосередньому обчисленні зображення Лапласа і модифікованої формулі Пруднікова для його обернення.

Ключові слова: зістиковані смуги, перетворення Лапласа, температурні поля, напруження.

Розглянуто задачу про визначення нестационарних температурних полів і напружень у зістикованих тонких безмежних смугах, які нагріваються через торцеві поверхні шляхом конвективного теплообміну з середовищем змінної в часі температури. Через лицеві поверхні $z = \pm h$ відбувається конвективний теплообмін з середовищем нульової температури. Розв'язок цієї задачі в зображеннях Лапласа має дещо простий вигляд. Зокрема, в [1] розв'язок задачі теплопровідності без урахування тепловіддачі з лицевих поверхонь записано у матричному вигляді за допомогою рекурентних формул. В [1] також зазначено, що побудова оригіналів в аналітичному вигляді пов'язана зі складністю знаходження коренів знаменника у зображенні розв'язку, що вимагає проведення достатньо складних обчислень при знаходженні температури. Тому в явному вигляді у літературі такі розв'язки записано для окремих випадків (двох-трьох смуг). Мета нашої праці – розробити алгоритм розрахунку нестационарних температурних полів і напружень для пластин з довільною кількістю смуг, який ґрунтується на безпосередньому обчисленні зображення Лапласа та чисельно-аналітичній формулі для його обернення.

Приймемо, що пластина складається з N смуг. Позначимо через l_j, a_j, λ_j і V_j ширину, коефіцієнти температуропровідності та теплопровідності і тепловіддачу j -ї смуги відповідно.

Рівняння теплопровідності для j -ї смуги, що займає область $x_{j-1} < x < x_j, -\infty < y < \infty, -h < z < h$ має вигляд

$$\frac{\partial^2 t_j}{\partial x^2} - \text{Bi}_j t_j - \frac{\partial t_j}{\partial \theta} = 0, \quad j = 1, \mathbf{K}, \mathbf{N} \quad (1)$$

Тут x – координата, що віднесена до деякої характерного розміру H пластинки; h – півтовщина пластинки; $\text{Bi}_j = \frac{\alpha_j^z H^2}{\lambda_j h}$; α_j^z – коефіцієнти тепловіддачі з плоских границь; $\theta = \frac{\mathbf{a}_k \tau}{H^2}$; $\mathbf{a}_j' = \frac{\mathbf{a}_j}{\mathbf{a}_k}$; k – вибраний номер деякої смуги.

Граничні умови за конвективного теплообміну такі:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial n} + \alpha_1 t_1 &= \alpha_1 f_1 \quad \text{при } \mathbf{x} = 0, \\ \lambda_N \frac{\partial t_N}{\partial n} + \alpha_N t_N &= \alpha_N f_N \quad \text{при } \mathbf{x} = \mathbf{x}_N, \end{aligned} \quad (2)$$

де α_1/H , α_N/H – коефіцієнти тепловіддачі з границь першої і останньої смуги; f_1 і f_N – температури середовищ, які омивають ці границі.

Зображення для температури запишемо у вигляді

$$\varphi_j = \hat{T}_{j-1} \text{ch } p_j (x - x_{j-1}) - \hat{Q}_{j-1} \frac{\text{sh } p_j (x - x_{j-1})}{\lambda_j p_j}, \quad (3)$$

де x_{j-1} , \hat{T}_{j-1} , \hat{Q}_{j-1} – відповідно координата, зображення температури та віднесеного до H потоку тепла на лівій межі j -ї смуги; $p_j = \sqrt{\text{Bi}_j + s/\mathbf{a}_j}$; s – параметр перетворення Лапласа за часовою координатою θ . Зазначимо, що $\hat{Q}_{j-1} = -\lambda_j \left. \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \right|_{x=x_{j-1}}$. Із подання (3) випливає, що функції (\hat{T}_j, \hat{Q}_j) в кінці і на початку смуги пов'язані матричним співвідношенням вигляду [1]

$$\begin{pmatrix} \hat{T}_j \\ \hat{Q}_j \end{pmatrix} = \mathbf{M}_j \begin{pmatrix} \hat{T}_{j-1} \\ \hat{Q}_{j-1} \end{pmatrix}, \quad j=1, 2, \dots, \mathbf{N}, \quad (4)$$

де \mathbf{M}_j – квадратна матриця з елементами

$$\mathbf{m}_{11}^{(j)} = \mathbf{m}_{22}^{(j)} = \text{ch}(p_j l_j), \quad \mathbf{m}_{12}^{(j)} = -\frac{\text{sh}(p_j l_j)}{\lambda_j p_j}, \quad \mathbf{m}_{21}^{(j)} = -\lambda_j p_j \text{sh}(p_j l_j).$$

На підставі формули (4) маємо

$$\begin{pmatrix} \hat{T}_j \\ \hat{Q}_j \end{pmatrix} = D_j \begin{pmatrix} \hat{T}_0 \\ \hat{Q}_0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

де $D_j = M_j * M_{j-1} * K * M_1$, \hat{T}_0 , \hat{Q}_0 – зображення температури і віднесеного до H потоку тепла на границі першої смуги. Підставляючи ці співвідношення у граничні умови, для визначення величин \hat{T}_0 , \hat{Q}_0 отримуємо систему рівнянь вигляду

$$\hat{Q}_0 + \alpha_1 \hat{T}_0 = \alpha_1 \mathcal{F}_1,$$

$$(-d_{22} + \alpha_N d_{12}) \hat{Q}_0 + (-d_{21} + \alpha_N d_{11}) \hat{T}_0 = \alpha_N \mathcal{F}_N, \quad (6)$$

де d_{ij} – елементи матриці D_N ; \mathcal{F}_1 , \mathcal{F}_N – зображення Лапласа від функцій f_1 , f_N .

Формули (5), (6) дають змогу розраховувати зображення температур і потоків тепла на межах довільної смуги, на підставі яких зображення від температури у довільних точках пластини визначають за формулою (3).

Частковий розв'язок, що відповідає знайдений температурі, має вигляд [4]

$$\sigma_{t,y} = -\alpha_{t,j} E_j T, \quad \sigma_{t,x} = 0, \quad \tau_{t,xy} = 0, \quad (7)$$

де $\alpha_{t,j}$, E_j – коефіцієнт лінійного температурного розширення та модуль Юнга j – і смуги.

Ці напруження будуть виникати у закріпленій у поздовжньому напрямі (в напрямі осі Oy) пластині. Розглянемо випадок, коли пластина не навантажена. Знайдемо головний вектор Y і момент M зусиль, прикладених у поздовжньому напрямі, які відповідають розв'язку (7). Зображення Лапласа від цих величин такі:

$$\hat{Y} = -\sum_{j=1}^N \alpha_{t,j} E_j A_j, \quad \hat{M} = -\sum_{j=1}^N \alpha_j E_j B_j,$$

$$\text{де } A_j = \frac{1}{P_j \lambda_j} (\hat{Q}_{j-1} - \hat{Q}_j), \quad B_j = \frac{1}{P_j \lambda_j} (x_{j-1} \hat{Q}_{j-1} - x_j \hat{Q}_j) - \frac{1}{P_j} (\hat{T}_j - \hat{T}_{j-1}),$$

$$P_j = p_j^2.$$

Щоб пластина була ненавантаженою, прикладемо до неї знайдені зусилля і момент з протилежним знаком.

Деформації, які будуть виникати у пластині при такому навантаженні, шукаємо у вигляді $\epsilon_y = cx + d$, де c і d – сталі. З умови, що для j – і смуги

напруження $\sigma_x = 0$ маємо: $\varepsilon_x = -\nu_j \varepsilon_y$, де ν_j – коефіцієнт Пуассона. Тоді для $j - i$ смуги запишемо

$$\sigma_y = \mathbf{E}_j(\mathbf{c}\mathbf{x} + \mathbf{d}). \tag{8}$$

Головний вектор \mathbf{Y}' і момент \mathbf{M}' , які відповідають цим зусиллям, матимуть вигляд

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{c}\mathbf{X}_2 + \mathbf{d}\mathbf{X}_1, \mathbf{M}' = \mathbf{c}\mathbf{X}_3 + \mathbf{d}\mathbf{X}_2,$$

де $\mathbf{X}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^N \mathbf{E}_j (\mathbf{x}_j^k - \mathbf{x}_{j-1}^k).$

Прирівнюючи $\mathbf{Y}' = -\mathbf{Y}$, $\mathbf{M}' = -\mathbf{M}$ для знаходження сталих \mathbf{c} , \mathbf{d} одержимо систему рівнянь

$$\begin{aligned} \mathbf{c}\mathbf{X}_2 + \mathbf{d}\mathbf{X}_1 &= -\mathbf{Y}, \\ \mathbf{c}\mathbf{X}_3 + \mathbf{d}\mathbf{X}_2 &= -\mathbf{M}. \end{aligned}$$

Додавши вирази (7) і (8), отримуємо зображення для напружень у зістикованих смугах.

Отримані співвідношення дають змогу визначати зображення температури та напружень. Температуру та напруження знаходили за формулою числово-аналітичного обернення Лапласа, яка побудована на підставі формули Пруднікова і має вигляд [2]

$$t(\mathbf{x}, \theta) \cong \frac{1}{I} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \exp(s_n \theta) + \frac{1}{1 - \exp(-c)} \left[t_0 + t'_0 \left[\frac{\theta}{I} + \frac{1}{\exp(c) - 1} \right] \right], \tag{9}$$

де $0 < \theta < I$, $F_n = \frac{t'_0}{s_n} - \left(\frac{t_0}{s_n} + \frac{t'_0}{s_n^2} \right)$, $s_n = \frac{(c + 2\pi ni)}{I}$, $\frac{t'_0}{s_n} = t'_0(\mathbf{x}, s_n)$, $t_0 = t(\mathbf{x}, 0)$,

$t'_0 = \left. \frac{\partial t}{\partial \theta} \right|_{\theta=0}$, \mathbf{c} – параметр. Значення \mathbf{c} вибирають так, щоб при $\theta > I$ температура була близькою до свого асимптотичного значення в усій пластині.

Про ефективність цієї формули свідчать праці [2, 3].

Готує Євген Тарасович Розглянуто пластинку, яка складається з трьох смуг. Базовими вибрано дані для першої смуги ($\mathbf{k} = 1$) і прийmemo, що \mathbf{H} – повна ширина пластини. Відносні значення всіх характеристик приймали однаковими, за винятком $\lambda_2' = \mathbf{m}$, $\alpha_{t,2}' = \mathbf{m}$, $\mathbf{E}_2' = \mathbf{m}$. Тут позначено $\lambda_j' = \lambda_j / \lambda_k$, $\alpha_{k1}' = \alpha_1 / \alpha_k$, $\mathbf{E}_j' = \mathbf{E}_j / \mathbf{E}_k$. Параметрам у формулі обернення (9) надавали значень: $I = 10$, $\mathbf{c} = 7$. В рядах утримували до 300 членів, що забезпечувало точність обчислень : 0.1%. Вважали, що нагрівання одностороннє, тобто $\mathbf{f}_1 = \mathbf{C}$, $\mathbf{f}_N = 0$.

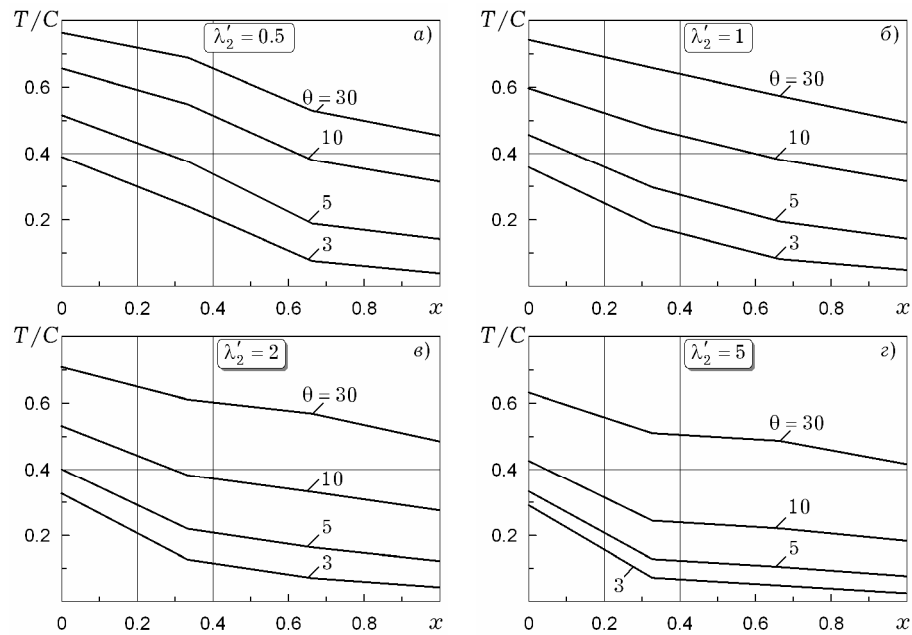


Рис. 1. Розподіл температури у пластинці з трьома зістикованими смугами

На рис. 1. зображено розподіл віднесеної до величини C температури по поперечному перерізі пластинки за значень часового параметра $\theta = 3, 5, 10, 30$. Чотирьом рисункам відповідають значення $m = 0.5, 1, 2, 5$.

Відповідні відносні напруження $\sigma_y' = \sigma_y / C \alpha_{t1} E_1$ показано на рис. 2.

Розглянуто також пластинку, яка складається з восьми смуг однакової ширини. За базову вибрано восьму смугу. Відносні значення всіх характеристик приймали однаковими за винятком $\lambda_5' = \lambda_6' = \lambda_7' = m$, $\alpha_{t,1}' = \alpha_{t,3}' = \alpha_{t,5}' = \alpha_{t,7}' = 2$, $\alpha_3' = \alpha_5' = \alpha_7' = m$, $f_1 = 0$, $f_N = C = \text{const}$ (нагрівання одностороннє). На рис. 3 зображено розподіл температури в часі на стиках пластинок при $x = x_0, x_3, x_6, x_8$ (криві 1-4). Відносні напруження в поперечному напрямі за згаданих вище значень часового параметра зображено на рис. 4.

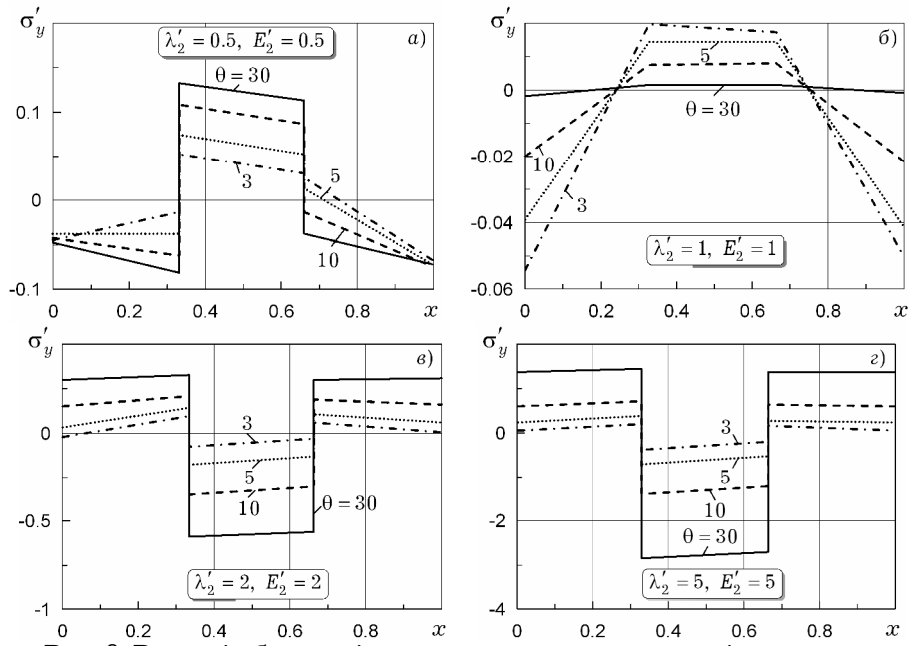


Рис. 2. Розподіл безрозмірних напружень у пластинці з трьома зістикованими смугами

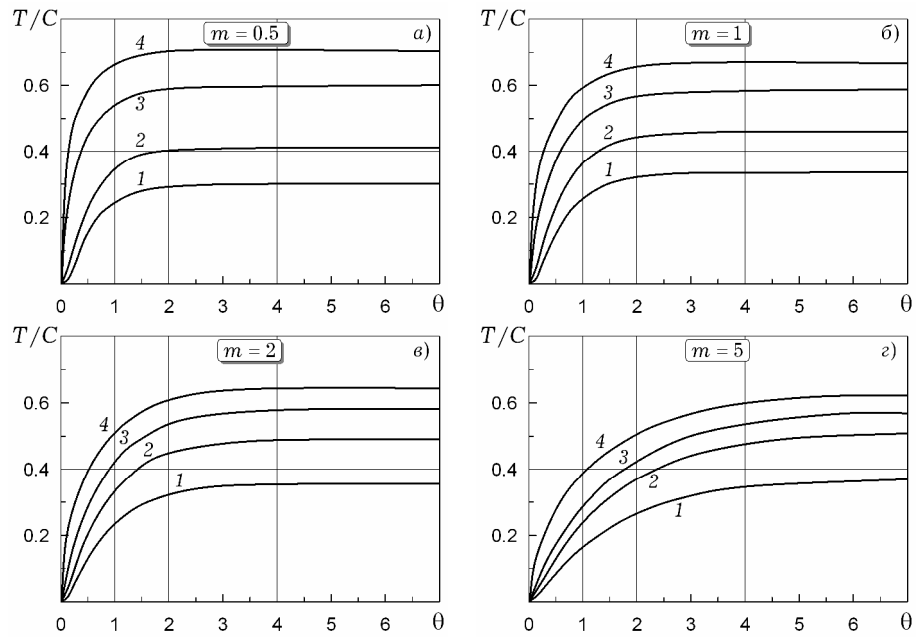


Рис. 3. Температури у пластинці з восьми зістикованих смуг

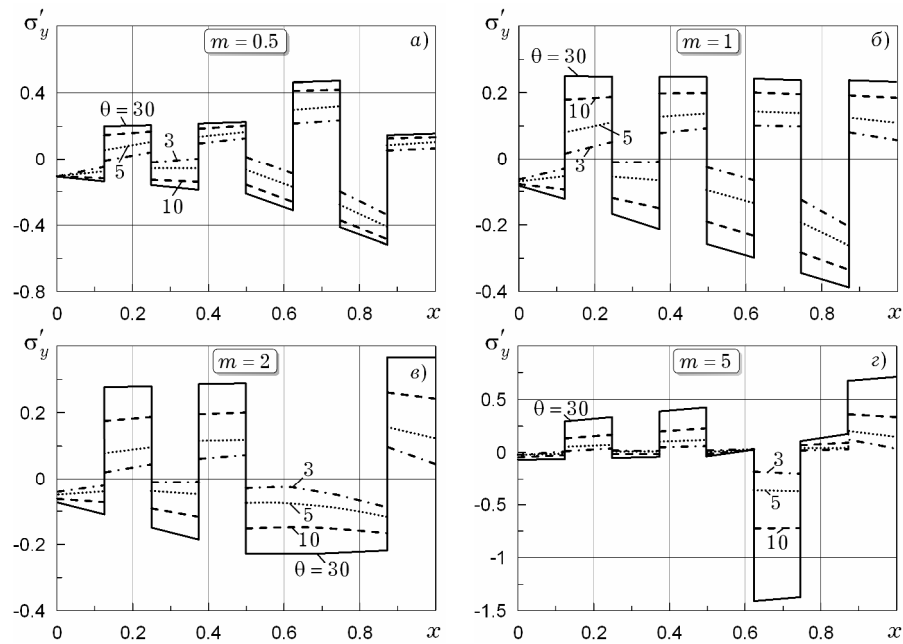


Рис. 4. Розподіл безрозмірних напружень у пластинці з восьми зістикованих смуг у різні моменти часу

На підставі проведених розрахунків можна зробити висновок, що розподіл температури і напружень у неоднорідних пластинах має достатньо складний характер та суттєво залежить від характеристик матеріалу. Визначення напруженого стану композитних пластин треба проводити з повним урахуванням структури тіл. Проведення розрахунків з допомогою спрощених підходів, які ґрунтуються на процедурах усереднення можуть, очевидно, привести до суттєвих похибок в оцінці напруженого стану кусково-однорідних пластин. Запропонований підхід є ефективним і дає змогу досліджувати складні задачі термомеханіки структурованих тіл.

1. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. – М., 1964.
2. Кушнір Р.М., Максимович В.М., Соляр Т.Я. Визначення нестационарних температур на основі уточнених формул обернення перетворення Лапласа // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2002. – 37, № 2. – С.18–26.
3. Кушнір Р.М., Соляр Т.Я. Термопружний стан багатозв'язних пластинок за їх нагріву // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2006. – 42, № 6. – С. 27–33.

4. *Подстригач Я.С., Коляно Ю. М.* Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. – К., 1972.

DEFINITION OF NON-STATIONARY TEMPERATURE FIELDS AND STRESSES IN JOINED STRIPS BASED ON NUMERICAL-ANALITICAL INVERSION FORMULA LAPLACE

Tetyana Solyar

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics,
NASU Naukova str. 3b 79053 Lviv, Ukraine

An algorithm is proposed for calculation of non-stationary temperature fields and stresses induced by them for plates with arbitrary number of strips which is based on direct calculation of the Laplace presentation and Prudnikov modified formula for its inversion.

Key words: joined strips, Laplace transform, temperature fields, stresses.

Стаття надійшла до редколегії 20.12.2006

Прийнята до друку 19.11.2008