

УДК 539.375

## ПЛАСТИЧНЕ ВІДШАРОВУВАННЯ ЖОРСТКОГО ПІДКРІПЛЕННЯ БЕРЕГА ТРІЩИНИ ЗА НАЯВНОСТІ ПЕРЕПАДУ ГРАНИЦІ ТЕКУЧОСТІ

Георгій СУЛИМ, Марта КРИВЕНЬ

Львівський національний університет імені Івана Франка,  
вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна

Досліджено розвиток пластичних смуг під час зсуву в околі вершин жорсткого тонкого включення, яке до навантаження перебувало в однобічному механічному контакті з середовищем із великою затримкою текучості. Другий бік включення не контактує з середовищем. Показано, що, окрім пластичної смуги на межі включення-середовище від вершини включення, розвивається також перпендикулярна до включення смуга. Визначено довжини обох смуг залежно від навантаження. Виявлено, що за певного рівня навантаження починає відбуватися розвантаження – смуга на межі включення-середовище починає скорочуватися.

*Ключові слова:* пластична смуга, тонке включення, текучість, навантаження, тріщина, відшарування.

Недосконалість механічного контакту включення й середовища, що є

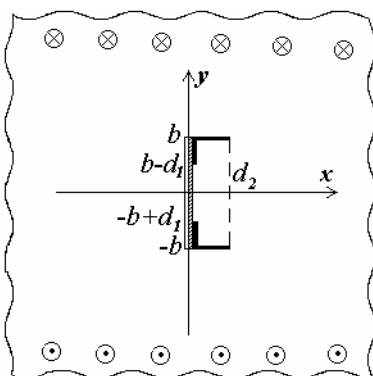


Рис. 1. Схема задачі. Потовщені лінії – пластичні смуги

радіше правилом, аніж винятком, може суттєво впливати на напружено-деформований стан тіла з включенням, зокрема на розвиток пластичних деформацій. Наприклад, відсутність контакту на прикінцевій частині поверхні включення змінює порядок сингулярності поля пружних напружень [1]. З'ясувалось [2, 3], що врахування затримки текучості при переході тіла з пружного стану в пластичний (зуба на діаграмі  $\sigma - \varepsilon$ ) змінює просто радикально передбачувану картину пластичних зон: коли в ідеально пружно-пластичній моделі пластичні деформації формують об'ємні зони, то

урахування затримки текучості призводить до зон, сформованих окремими лініями ковзання. Це й підтверджує експеримент [4]. Тому поєднують в єдиному підході урахування недосконалості механічного контакту включення з середовищем і перепаду межі текучості діаграми напруження-деформація.

Для жорсткого включення, вся поверхня якого до навантаження перебувала в ідеальному механічному контакті з середовищем, пластичні

деформації при його вершині досліджували раніше в [5–7]: спочатку в припущенні про локалізацію пластичних деформацій на межі включення-середовище [5], а згодом і об'ємно розподілених пластичних деформацій з визначенням межі зони пластичних у пружних деформацій [6, 7]. Дослідимо напружено-деформований стан і проаналізуємо розвиток пластичних деформацій у тілі з тонким абсолютно жорстким включенням ( $\mathbf{x} = \mathbf{0}, |\mathbf{y}| \leq \mathbf{b}, |\mathbf{z}| < \infty$ ), ліва частина  $\mathbf{x} = -\mathbf{0}, |\mathbf{y}| \leq \mathbf{b}, |\mathbf{z}| < \infty$  поверхні якого не контактує з середовищем, а права перебуває з ним у ідеальному контакті, коли тіло навантажене напруженнями  $\tau_{xz} = \mathbf{0}, \tau_{yz} = \tau_\infty$  на нескінченності. Пластичні деформації зароджуються у точках, де максимальне зсувне напруження досягає значення верхнього порогу текучості  $\mathbf{k}_1$ , а далі розвиваються вздовж площинок, на яких зсувне напруження дорівнює нижньому порогові текучості  $\mathbf{k}_0$  ( $\mathbf{k}_0 < \mathbf{k}_1$ ). Різниця  $\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_0$  характеризує висоту зуба на діаграмі деформування тіла. Оскільки у випадку ідеального контакту включення з середовищем пластична смуга не може розвиватися на його продовженні [5], а об'ємно розподілені пластичні деформації зі збільшенням навантаження охоплюють точки середовища як завгодно далекі від включення у перпендикулярному до нього напрямі [6, 7], то будемо для однобічно відшарованого включення вважати пластичні деформації локалізованими у двох смугах, які розпочинаються від вершини включення: вертикальній вздовж межі включення-середовище, де до навантаження включення ідеально контактувало з середовищем, і перпендикулярній до включення горизонтальній (рис. 1). Таке припущення, як стане зрозумілим під час розв'язання задачі, забезпечить не перевищення верхнього порогу текучості поза пластичними смугами.

За згаданих умов у тілі виникне антиплоский напружено-деформований стан з асиметричним щодо осі абсцис полем переміщень  $\mathbf{w}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\mathbf{w}(\mathbf{x}, -\mathbf{y})$ . Його визначення зводиться до знаходження полів напружень у верхній півплощині, точніше в області  $\mathbf{D}$  – верхній півплощині без відрізків ( $\mathbf{x} = \mathbf{0}; 0 \leq \mathbf{y} \leq \mathbf{b}$ ) та  $\mathbf{x} = \mathbf{0}; \mathbf{b} \leq \mathbf{y} \leq \mathbf{b} - \mathbf{d}_1$ . Довжини  $\mathbf{d}_1$  вертикальної смуги на межі включення-середовище і горизонтальної  $\mathbf{d}_2$  залежать від величини прикладеного навантаження і будуть визначені нижче.

На межі області  $\mathbf{D}$  напруження є такими:

$$\begin{aligned} \tau_{xz}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) &= \mathbf{0} \quad (-\infty < \mathbf{x} < \mathbf{0}, \mathbf{y} = \mathbf{0}), \quad \tau_{xz}(-\mathbf{0}, \mathbf{y}) = \mathbf{0} \quad (\mathbf{x} = -\mathbf{0}, 0 < \mathbf{y} < \mathbf{b}), \\ \tau_{yz}(\mathbf{x}, \mathbf{b} \pm \mathbf{0}) &= \mathbf{k}_0 \quad (0 < \mathbf{x} < \mathbf{d}_2), \quad \tau_{xz}(+\mathbf{0}, \mathbf{y}) = \mathbf{k}_0 \quad (\mathbf{b} < \mathbf{y} < \mathbf{b} - \mathbf{d}_1), \\ \tau_{yz}(+\mathbf{0}, \mathbf{y}) &= \mathbf{0} \quad (0 < \mathbf{y} < \mathbf{b} - \mathbf{d}_1), \quad \tau_{xz}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \mathbf{0} \quad (-\infty < \mathbf{x} < \mathbf{0}, \mathbf{y} = \mathbf{0}), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \infty} \tau_{yz} = \tau_\infty.$$

Крім того, оскільки ніде в тілі зсувне напруження не може перевищувати верхнього порогу текучості, то всюди в області  $\mathbf{D}$  повинна виконуватися умова

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 < k_1^2. \tag{2}$$

Пружний розв'язок цієї задачі призводить до сингулярності поля напружень у вершинах включення. Це означає, що за будь-якої величини навантаження досягається верхній поріг текучості. Якщо цей поріг нижчий за  $k_0\sqrt{2}$ , то може виникнути більше двох смуг. Коли ж  $k_1 \geq k_0\sqrt{2}$ , крім вертикальної смуги, уздовж якої відбуватиметься пластичне відшаровування, то перпендикулярно до включення розвиватиметься ще одна смуга (див. рис. 1). Інші смуги тоді виникнути не можуть.

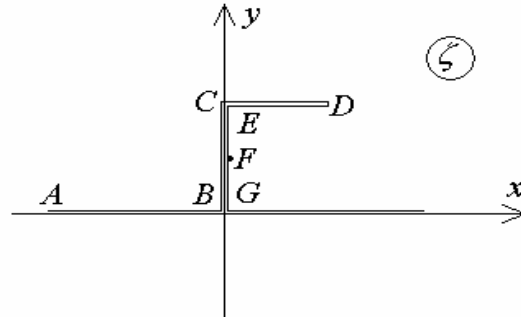


Рис. 2.

Внаслідок умов рівноваги і закону Гука функція  $\tau(\zeta) = \tau_{yz}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + i\tau_{xz}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

аналітична в області **D**. Легко перевірити, що умови (1), (2) цілком визначають конформне відображення, яке виконує функція  $\tau = \tau(\zeta)$  образом області **D** є квадрат (область **G**) в комплексній площині  $\tau$  (рис. 2, 3).

Оскільки виконуване функцією  $\tau = \tau(\zeta)$  відображення відоме апіорі, то її можна знайти, побудувавши це відображення. Для цього введемо допоміжну комплексну площину  $t$ , у якій областям **D** і **G** відповідатиме верхня півплощина (область **H** на рис. 4). Якщо відповідним точкам на межах областей **D** і **G** відповідає спільна точка на межі області **H**, то пара функцій

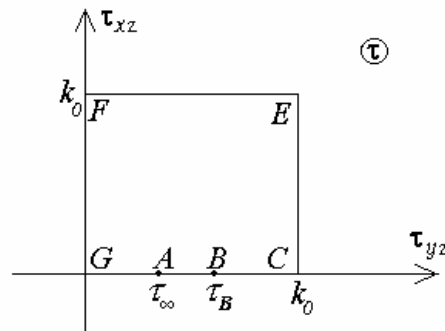


Рис. 3. Площина  $\tau$

$$\zeta = \zeta(\mathbf{t}), \quad \tau = \tau(\mathbf{t}) \quad (\mathbf{t} \in \mathbf{H}) \tag{3}$$

визначатиме функцію  $\tau = \tau(\zeta)$  параметричним способом.

На межах областей **D** і **G** є рівно три пари точок, а саме A, C і G, координати яких наперед відомі, тому відображення  $\tau = \tau(\zeta)$  існує і воно єдине. Области **D** і **G** – прямокутні многокутники, тому відображення  $\zeta = \zeta(\mathbf{t})$  і  $\tau = \tau(\mathbf{t})$  можна знайти за допомогою перетворення Крістоффеля - Шварца.

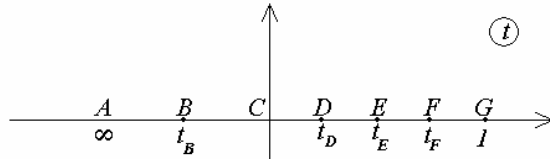


Рис. 4

$$\tau(t) = \frac{k_0}{1} \frac{\int_{t_F}^t F_\tau(\eta) d\eta}{\int_{t_F}^1 |F_\tau(\eta)| d\eta}, \quad (4)$$

де  $F_\tau(\eta) = \frac{1}{\sqrt{(\eta - t_E)(\eta - t_F)(\eta - 1)}}$ . Тут і нижче під  $\sqrt{\eta - a}$  ( $a$  – дійсне число) розумітимемо аналітичну у верхній півплощині функцію, яка набуває дійсних додатних значень, коли  $\eta$  дійсне і  $\eta > a$ .

Маємо також два рівняння для знаходження двох параметрів  $t_D, t_F$  ( $0 < t_D < t_F < 1$ ) перетворення (4): перше – умова рівності сторін фігури GCDF (див. рис. 3) -

$$\int_{t_E}^{t_F} |F_\tau(\eta)| d\eta = \int_{t_F}^1 |F_\tau(\eta)| d\eta \quad (5)$$

і друге – значення  $\tau$  на нескінченності

$$\int_1^\infty |F_\tau(\eta)| d\eta = \frac{\tau_\infty}{k_0} \int_{t_F}^1 |F_\tau(\eta)| d\eta. \quad (6)$$

Фігура ABCDEGA на рис. 2 – п'ятикутник. Функцію  $\zeta = \zeta(t)$  подає такий інтеграл:

$$\zeta = ib + \frac{b}{0} \frac{\int_{t_B}^t F_\zeta(\eta) d\eta}{\int_{t_B}^{t_E} |F_\zeta(\eta)| d\eta}, \quad F_\zeta(\eta) = \frac{(\eta - t_D)\sqrt{\eta}}{\sqrt{(\eta - t_B)(\eta - t_E)(\eta - 1)}}. \quad (7)$$

Параметри перетворення (7) зв'язані двома співвідношеннями, які відповідають рівності сторін BC і EG та CD і DE фігури ABCDEGA (рис. 2),

$$\int_{t_B}^0 |F_\zeta(\eta)| d\eta = \int_{t_E}^1 |F_\zeta(\eta)| d\eta; \quad (8)$$

$$\int_0^{t_D} |F_\zeta(\eta)| d\eta = \int_{t_D}^{t_E} |F_\zeta(\eta)| d\eta. \quad (9)$$

Визначення чотирьох параметрів інтегралів Крістофеля-Шварца (4), (7) звелось до розв'язування двох незалежних систем рівнянь: (5), (6) стосовно параметрів  $t_E, t_F$  і (8), (9) - щодо  $t_B, t_D$ .

Враховуючи, що у площинах  $\tau$  і  $t$  відомі координати трьох точок, а отже, й довжини відрізків GA, EF, FG фігури GCEF (рис. 3), розв'язок системи (4), (7) стосовно  $t_E, t_F$  можна знайти за допомогою такого ітераційного алгоритму:

$$\begin{aligned} t_F^{(i+1)} &= \frac{FG^{(i)} - EF^{(i)}}{FG^{(i)} + EF^{(i)}} + 2t_F^{(i)} \frac{EF^{(i)}}{FG^{(i)} + EF^{(i)}}, \\ t_E^{(i+1)} &= t_E^{(i)} \left( \frac{GA^{(i)} + FG^{(i)}}{FG^{(i)}} - \frac{\tau_\infty}{k_0} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Тут  $FG^{(i)}, EF^{(i)}, GA^{(i)}$  - права й ліва частини рівності (5) та ліва частина рівності (6), в яких замість  $t_F, t_E$  фігурують  $t_F^{(i)}, t_E^{(i)}$  -  $i$ -ті наближення шуканих величин. Алгоритм (10) збігається досить швидко, але при близьких до  $k_0$  значеннях  $\tau_\infty$  область притягання розв'язку дуже звужується.

Для вибору нульового (початкового)  $t_F^{(0)}, t_E^{(0)}$  наближення параметрів  $t_F, t_E$  систему (5), (6) розв'язували спочатку для  $\tau_\infty < 0,5k_0$ . Для цього випадку алгоритм (10) не є надто чутливим щодо вибору початкового наближення. Можна прийняти  $t_F^{(0)} = 0,6; t_E^{(0)} = 0,3$ . Для більших  $\tau_\infty$  початкові наближення для  $\tau_\infty + \Delta\tau_\infty$  ( $\Delta\tau_\infty > 0$ ), близького до  $\tau_\infty$ , зручно вибирати вже визначені значення цих параметрів для попереднього рівня навантаження  $\tau_\infty$ .

Параметри  $t_B, t_D$  - розв'язки системи рівнянь (8), (9) - визначали за допомогою такої схеми послідовних наближень:

$$t_B^{(i+1)} = 2 \frac{EG^{(i)} t_B^{(i)}}{BC^{(i)} + EG^{(i)}}, \quad t_D^{(i+1)} = 2 \frac{DE^{(i)} t_D^{(i)}}{DE^{(i)} + CD^{(i)}}. \quad (11)$$

Тут  $BC^{(i)}, EG^{(i)}, CD^{(i)}, DE^{(i)}$  - ліва й права частини рівнянь (8) і (9), у яких замість  $t_B, t_D$  фігурують  $t_B^{(i)}, t_D^{(i)}$  -  $i$ -ті наближення шуканих величин. Їхні початкові значення  $t_B^{(0)}, t_D^{(0)}$  приймали рівними  $-1$  і  $t_E/2$  відповідно.

Коли функцію напружень (3) знайдено, легко визначити залежності довжин пластичних смуг від навантаження. У допоміжній площині  $t$  горизонтальній смузі відповідає відрізок  $[0; t_D]$ , а вертикальній -  $[t_E, t_F]$ , тому з формули (7) для їхніх довжин відповідно отримуємо

$$d_1 = b \int_0^{t_D} |F_\zeta(\eta)| d\eta \bigg/ \int_{t_B}^0 |F_\zeta(\eta)| d\eta, \quad d_2 = b \int_{t_E}^{t_F} |F_\zeta(\eta)| d\eta \bigg/ \int_{t_B}^0 |F_\zeta(\eta)| d\eta, \quad (12)$$

Обчислені за формулами залежності довжин смуг від навантаження зображено на рис. 5. Як засвідчив числовий експеримент, довжина вертикальної смуги, завдяки якій відшаровується включення, спочатку

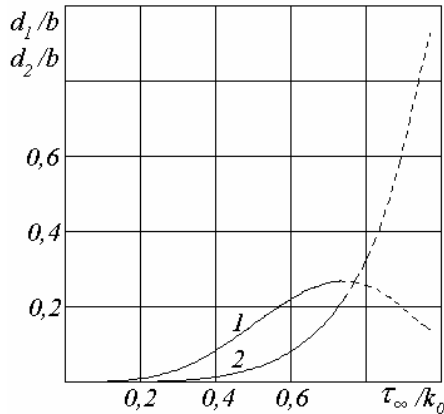


Рис. 5.

зростає і досягає значення  $0,26b$ , коли навантаження  $\tau_\infty = 0,73k_0$ . Під час подальшого збільшення навантаження вертикальна смуга починає скорочуватися. Це означає, що для таких рівнів навантаження треба враховувати розвантаження і отриманий тут розв'язок вже адекватно не описує реальної картини розвитку пластичних деформацій (штрихова частина ліній на рис. 5). Для порівняння зазначимо, що у випадку ідеального механічного контакту пластична смуга на межі тонке жорстке включення – ідеально пружно-пластичне середовище зі збільшенням навантаження росте монотонно, коли навантаження досягає межі текучості, охоплює всю довжину включення [5]. Континуальна пластична зона, що розвивається в ідеально пружно-пластичному середовищі від вершини тонкого жорсткого включення, яке до навантаження ідеально контактувало з середовищем, розвивається поступово, розвантаження не відбувається [6, 7]. На відміну від смуги, локалізованої на поверхні включення, континуальна зона охоплює не більше третини його поверхні. Максимальна частина охопленої пластичними деформаціями поверхні включення близька до знайденої нами частини пластично відшарованої поверхні включення, яке перебуває в однобічному механічному контакті з середовищем із затримкою текучості.

1. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезом, тонких включений и подкреплений. - М., 1982.
2. Сулим Г.Т., Кривень М.В. Формування пластичних смуг періодичною системою тріщин зсуву за поздовжнього зсуву ідеально пружно-пластичного середовища з затримкою текучості. Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій. Вип. 5. / За ред. Й.Й. Лучка. – Львів, 2005. – С. 172–181.
3. Heorhiy Sulym, Marta Kryweń. Odseparowywanie plastyczne cienkiej sztywnej inkluzji w ósrodku z duzym zatrzymaniem płynięcia pod czas

- antypłaskiego stanu odkształcenia. Materiały III Symp. Mech. Zn. Mater. i Konstr. (Augustów, 1-4 czerwca 2005), Białystok, 2005. S. 397–400.
4. *Надаи А.* Пластичность и разрушение твердых тел. – М.: Изд-во ИЛ, 1954.
  5. *Витвицький П.М., Кривень В.А.* Антиплоска пружно-пластична деформація тіла з жорстким тонким включенням // Доп. АН УРСР. Сер.А. – 1979. – № 2. – С. 104–108.
  6. *Крайнов А.Ю., Никитин Л.В.* Антиплоская деформация упругопластического тела с тонким жестким включением // Физ. – хим. мех. материалов. – 1984. – № 1. – С. 42–45.
  7. *Кривень В. А. Ланьош Є.М.* Пружнопластична задача антиплоскої деформації тіла, що містить жорстке ромбічне призматичне включення // Доп. АН УРСР. Сер.А. – 1986. – № 6. – С. 30–34.

#### PLASTIC DELAMINATING OF THE RIGID REINFORCEMENT OF THE CRACK EDGE IN THE PRESENCE OF YIELD DROP

Georgiy Sulym, **Marta Kriven**

Ivan Franco National University of Lviv,  
Universitetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine

This paper concerns plasticity bands development under the shear in the tip vicinity of thin rigid inclusion, one edge of which before loading was perfectly bonded to the medium with essential yield delay. The other edge of inclusion does not contact with medium. This results that besides the plasticity band on the medium-inclusion interface also a band perpendicular to the inclusion develops. The lengths of both bands are determined depending on the loading. It is shown that at the certain load rate the stress relief take place: the band on the inclusion-medium interface shortens.

Key words: plastic bar, thin including, loading, crack.

Стаття надійшла до редколегії 21.02.2007

Прийнята до друку 19.11.2008