ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2008. Вип. 69. С. 125–135 *Ser. Mech.-Mat. 2008. Vol. 69. P. 125–135*

УДК 539.3.

ЗГИН ПЛАСТИНИ РЕЙССНЕРА З НАСКРІЗНОЮ ТРІЩИНОЮ З УРАХУВАННЯМ ШИРИНИ ОБЛАСТІ КОНТАКТУ ЇЇ БЕРЕГІВ

Віктор ОПАНАСОВИЧ, **Ігор ЯЦИК**

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Досліджено напружено-деформований стан безмежної ізотропної пластини з тріщиною, береги якої вільні від зовнішнього навантаження. Пластина перебуває під дією рівномірно розподілених згинальних моментів на нескінченності. Припускається, що береги тріщини приходять у гладкий контакт по всій довжині тріщини за двовимірною зоною на верхній основі пластини. За рахунок контакту берегів тріщини розв'язок задачі подано у вигляді розв'язку двох задач: плоскої задачі та задачі згину пластин за Рейсснером. На підставі методів теорії функції комплексної змінної та комплексних потенціалів отримано сингулярне інтегральне рівняння, яке розв'язано чисельно за допомогою методу механічних квадратур. Проведено числовий аналіз розв'язку задачі та побудовано графічні залежності для контактного тиску між берегами тріщини та коефіцієнтів інтенсивності моментів при різних параметрах задачі.

Ключові слова: згин, ізотропна пластина, наскрізна тріщина, ширина області контакту, плоска задача теорії пружності, теорія згину за Рейсснером, комплексні потенціали, контактне зусилля, коефіцієнти інтенсивності моментів і зусиль.

Пластини широко застосовують у машинобудуванні та інших галузях техніки. Їхня дієздатність і експлуатаційні характеристики залежать від тріщиноподібних дефектів, які різко знижують діапазон допустимого навантаження. Під час експлуатації пластинчастих елементів важливо знати, як такі дефекти впливають на міцність і механічні характеристики конструкції.

Актуальною проблемою є вивчення напружено-деформованого стану пластини в умовах згину з урахуванням контакту берегів тріщиноподібних дефектів. Формулювання задач згину пластин з тріщинами і методи їх розв'язування подано в монографіях [1, 10, 11]. Проте в них не враховували контакт берегів тріщиноподібних дефектів, хоча з фізичних міркувань зрозуміло, що він впливає на напружено-деформований стан пластини в цілому. В [5, 8, 14–16] розглянуто згин пластини з тріщиноподібними дефектами з урахуванням контакту їхніх берегів, але немає досліджень, пов'язаних із згином пластини за Рейсснером з тріщиною, береги якої контактують по двовимірній зоні.

Мета нашої праці – дослідити згин ізотропної пластини Рейсснера з тріщиною з урахуванням ширини області контакту її берегів. Із застосуванням методів теорії функцій комплексної змінної та комплексних

© Опанасович В., Яцик І., 2008

потенціалів розв'язок задачі зведений до системи інтегральних рівнянь, яка розв'язана чисельно за допомогою методу механічних квадратур. Виконано числовий аналіз задачі, на підставі якого побудовано відповідні графічні залежності.

Формулювання задачі. Дослідимо задачу про згин ізотропної пластини завтовшки $2h$ з тріщиною завдовжки $2l$ розподіленими згинними моментами на нескінченності (див. рис. 1). Вважаємо, що під дією зовнішнього навантаження береги тріщини зазнають гладкого контакту по всій довжині тріщини з постійною двовимірною зоною ширини h_1 поблизу

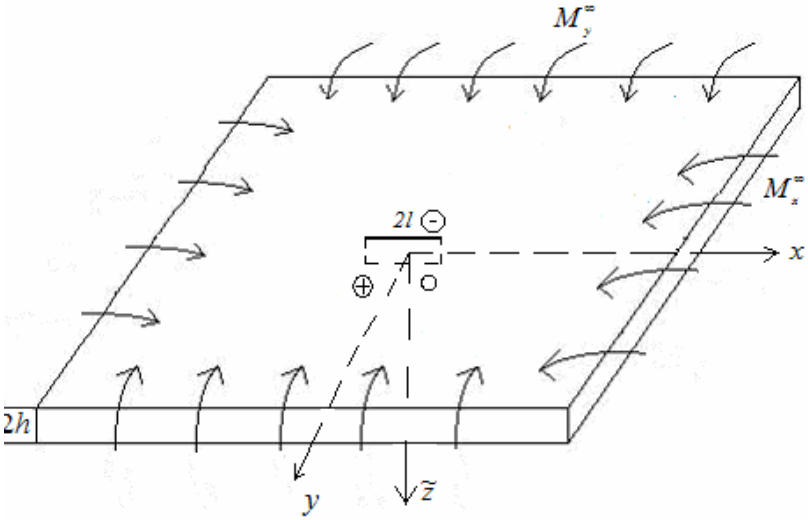

Рис. 1.

верхньої основи пластини, причому до деформування пластини береги тріщини були вільними від зовнішнього навантаження.

Виберемо декартову систему координат $Oxyz$ з координатною площиною Oxy у серединній площині пластини з початком координат O у центрі тріщини, спрямувавши вісь Ox по тріщині. Відрізок дійсної осі Ox, для якого $|x| \le l$, позначимо через L. Позначимо контактне зусилля між берегами тріщини через $-N$ $(N > 0)$, а розподілені згинальні моменти на нескінченності, прикладені до пластини, – через M_x^∞, M_y^∞.

Надалі дотримуватимемось таких позначень: μ – модуль зсуву; E – модуль Юнга; ν – коефіцієнт Пуассона, $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$.

З урахуванням контакту берегів тріщини розв'язок задачі розбиваємо на дві задачі: плоску задачу теорії пружності та задачу згину пластини з використанням теорії Рейсснера.

Згідно з формулювання задачі на берегах тріщини маємо такі крайові умови:

$$\sigma_{yy}^{+} = \sigma_{yy}^{-} = -\boldsymbol{N}/(2\boldsymbol{h}),\ \sigma_{xy}^{+} = \sigma_{xy}^{-} = 0,\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{M}_{y}^{+} = \boldsymbol{M}_{y}^{-} = \boldsymbol{M},\ \boldsymbol{Q}_{y}^{+} = \boldsymbol{Q}_{y}^{-} = 0,\ \boldsymbol{H}_{xy}^{+} = \boldsymbol{H}_{xy}^{-} = 0,\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{M} = \beta \boldsymbol{h} \boldsymbol{N},\ \partial_{\boldsymbol{x}}[\boldsymbol{v}_{\Pi}] + \alpha \boldsymbol{h} \partial_{\boldsymbol{x}}[\varphi_{\boldsymbol{y}}] = 0,\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}, \tag{3}$$

де σ_{xy}, σ_{yy} та $\boldsymbol{v}_{\Pi}$ – відповідно компоненти тензора напружень та проекція вектора переміщення точки на вісь $\boldsymbol{Oy}$ у плоскій задачі, $\varphi_{\boldsymbol{y}}$ – усереднений по товщині пластини кут повороту нормалі до серединної площини пластини у задачі згину [13]; $\boldsymbol{M}$ – згинальний момент, $\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{y}}$ і $\boldsymbol{H}_{xy}$ – поперечна сила і крутний момент відповідно; $\partial_{\boldsymbol{x}} = \partial/\partial \boldsymbol{x}$, $[\boldsymbol{f}] = \boldsymbol{f}^{+} - \boldsymbol{f}^{-}$; значками «+» і «–» позначено граничні значення функції при прямуванні точки площини до тріщини при $\boldsymbol{y} \to \pm 0$; $\alpha = \left\{1 + (1-\gamma)^2\right\}/2$, $\beta = 1 - \gamma/3$ і $\gamma = \boldsymbol{h}_1/\boldsymbol{h}$ – зведена ширина області контакту [5].

Треба знайти напружено-деформований стан пластини.

Побудова розв'язку задачі. При визначенні плоского напруженого стану введемо комплексні потенціали $\Phi_{\Pi}(\boldsymbol{z})$ і $\Omega_{\Pi}(\boldsymbol{z})$, які заникають на нескінченності, а для визначення напружено-деформованого стану пластини виконуються залежності [3]

$$\sigma_{yy} - \boldsymbol{i}\sigma_{xy} = \Phi_{\Pi}(\boldsymbol{z}) + \Omega_{\Pi}(\overline{\boldsymbol{z}}) + (\boldsymbol{z} - \overline{\boldsymbol{z}})\overline{\Phi_{\Pi}'(\boldsymbol{z})},$$
$$2\mu\partial_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{i}\boldsymbol{v}) = \kappa\Phi_{\Pi}(\boldsymbol{z}) - \Omega_{\Pi}(\overline{\boldsymbol{z}}) - (\boldsymbol{z} - \overline{\boldsymbol{z}})\overline{\Phi_{\Pi}'(\boldsymbol{z})}. \tag{4}$$

Крайові умови (1) подамо у вигляді

$$(\sigma_{yy} - \boldsymbol{i}\sigma_{xy})^{+} - (\sigma_{yy} - \boldsymbol{i}\sigma_{xy})^{-} = 0,\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L},$$

звідки, врахувавши (4), отримаємо

$$(\Phi_{\Pi}(\boldsymbol{x}) - \Omega_{\Pi}(\boldsymbol{x}))^{+} - (\Phi_{\Pi}(\boldsymbol{x}) - \Omega_{\Pi}(\boldsymbol{x}))^{-} = 0,\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}. \tag{5}$$

Розв'язавши задачу лінійного спряження (5), матимемо

$$\Phi_{\Pi}(\boldsymbol{z}) = \Omega_{\Pi}(\boldsymbol{z}). \tag{6}$$

Враховуючи (4) і (6), з крайової умови

$$(\sigma_{yy} - \boldsymbol{i}\sigma_{xy})^{+} + (\sigma_{yy} - \boldsymbol{i}\sigma_{xy})^{-} = -\boldsymbol{N}/\boldsymbol{h},\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}$$

одержимо

$$\boldsymbol{N} = -2\boldsymbol{h}\left(\Phi_{\Pi}^{+}(\boldsymbol{x}) + \Phi_{\Pi}^{-}(\boldsymbol{x})\right),\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}. \tag{7}$$

Враховуючи (4) та (6), та задовольняючи умову

$$\partial_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{u}_{\Pi} + \boldsymbol{i}\boldsymbol{v}_{\Pi})^{+} - \partial_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{u}_{\Pi} + \boldsymbol{i}\boldsymbol{v}_{\Pi})^{-} = \partial_{\boldsymbol{x}}[\boldsymbol{u}_{\Pi} + \boldsymbol{i}\boldsymbol{v}_{\Pi}],\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L},$$

одержимо

$$\Phi_{\Pi}^{+}(x)-\Phi_{\Pi}^{-}(x)=2\mu/(1+\kappa)\partial_x[u_{\Pi}+iv_{\Pi}]=g'(x)=g_1'(x)+ig_2'(x),x\in L. \quad (8)$$

Розв'язок задачі лінійного спряження (8) запишемо так:

$$\Phi_{\Pi}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{g'(t)dt}{t-z}. \quad (9)$$

На підставі формул Сохоцького-Племелі одержимо

$$\Phi_{\Pi}^{+}(x)+\Phi_{\Pi}^{-}(x)=\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{g'(t)dt}{t-x},\ x\in L. \quad (10)$$

Підставивши (10) у (7), матимемо

$$-\frac{N}{2h}=\frac{1}{\pi}\int_L\frac{g_2'(t)dt}{t-x},\ x\in L, \quad (11)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_L\frac{g_1'(t)dt}{t-x}=0,\ x\in L. \quad (12)$$

Розв'язавши сингулярне інтегральне рівняння (12) та врахувавши, що $\int_{-l}^{l}g_1'(t)dt=0$, отримаємо

$$g_1'(t)=0. \quad (13)$$

Для побудови розв'язку задачі згину введемо комплексні потенціали $\Phi(z)$ і $\Psi(z)$ та функцію $\Omega(z,\bar z)$, для яких правильні залежності [2]

$$M_x+M_y=-2D(1+\nu)\left\{\Phi(z)+\overline{\Phi(z)}\right\}, \quad (14)$$

$$M_y-M_x+2iH_{xy}=2D(1-\nu)\left\{z\overline{\Phi'(z)}+\overline{\Psi(z)}+\right.$$
$$\left.+4\left\{2\overline{\Phi''(z)}+i\overline{\Omega_{zz}''(z,\bar z)}\right\}/\left(k_*^2(1-\nu)\right)\right\}, \quad (15)$$

$$Q_x-iQ_y=-2D\left\{2\Phi'(z)-i\Omega_z'(z,\bar z)\right\}, \quad (16)$$

де $k_*^2=5/(2h^2)$, а функція $\Omega(z,\bar z)$ – розв'язок рівняння Гельмгольца

$$4\Omega_{z\bar z}''(z,\bar z)=k_*^2\Omega(z,\bar z). \quad (17)$$

Залежності (14) і (15) перепишемо так:

$$M_y+iH_{xy}=2m\,\mathrm{Re}\,\Phi(z)+n\left\{z\overline{\Phi'(z)}+\overline{\Psi(z)}\right\}+\rho\left\{2\overline{\Phi''(z)}+i\overline{\Omega_{zz}''(z,\bar z)}\right\}, \quad (18)$$

де $m=-D(1+\nu)$, $n=D(1-\nu)$, $\rho=4D/k_*^2$.

Комплексні потенціали $\Phi(z)$ і $\Psi(z)$ подамо у вигляді [10]

$$\Phi(z) = \Phi_*(z) + \Gamma, \ \Psi(z) = \Psi_*(z) + \Gamma', \tag{19}$$

де $\Gamma = -\dfrac{M_x^\infty + M_y^\infty}{4D(1+\nu)}$, $\Gamma' = -\dfrac{M_y^\infty - M_x^\infty}{2D(1-\nu)}$, а $\Phi_*(z)$ і $\Psi_*(z)$ – голоморфні функції, які заникають на нескінченності.

На підставі результатів праць [6, 7] функції $\Phi_*(z)$ та $\Omega(z,\bar{z})$ виберемо у вигляді

$$\Phi_*(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-l}^{l}\frac{g(t)dt}{t-z}, \ g(t) = g_1(t) + ig_2(t), \tag{20}$$

$$\Omega(z,\bar{z}) = \frac{k_*}{\pi}\operatorname{Im}\left\{\int_{-l}^{l}\frac{rK_1(k_*r)}{t-z}\omega(t)dt\right\}, \ \omega(t) = \omega_1(t) + i\omega_2(t), \tag{21}$$

де $r = \sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}$, $g_1(t)$, $g_2(t)$, $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$ – заздалегідь невідомі дійсні функції; тут і надалі через $K_j(x)$ позначатимемо функції Макдональда j-го порядку, властивості яких наведено у [12].

Похідні від функції $\Omega(z,\bar{z})$, які входять у вирази (15) і (16), подамо так:

$$\Omega_z'(z,\bar{z}) = \Omega_1(z,\bar{z}) - \frac{i}{2\pi}\int_{-l}^{l}\frac{\omega(t)dt}{(t-z)^2}, \tag{22}$$

$$\Omega_{zz}''(z,\bar{z}) = \Omega_2(z,\bar{z}) - \frac{i}{\pi}\int_{-l}^{l}\frac{\omega(t)dt}{(t-z)^3}, \tag{23}$$

де

$$\Omega_1(z,\bar{z}) = \frac{ik_*^2}{2\pi}\int_{-l}^{l}\left\{\frac{r^2\overset{\circ}{K}_1'(k_*r)}{(t-z)^2}\omega(t) + \frac{(t-\bar{z})K_0(k_*r)}{r^2}\operatorname{Re}\{(t-\bar{z})\omega(t)\}\right\}dt, \tag{24}$$

$$\Omega_2(z,\bar{z}) = \frac{k_*^2}{2\pi}\left\{\frac{1}{i}\int_{-l}^{l}\frac{r^2\overset{\circ}{K}_2(k_*r)}{(t-z)^3}\omega(t)dt - \frac{k_*}{2}\operatorname{Im}\left\{\int_{-l}^{l}\frac{rK_1(k_*r)}{t-z}\omega(t)dt\right\} + \right.$$
$$\left. + k_*\int_{-l}^{l}\frac{t-x}{r^3}K_1(k_*r)(t-\bar{z})\operatorname{Im}\{(t-\bar{z})\omega(t)\}dt\right\}, \tag{25}$$
$$\overset{\circ}{K}_1(x) = K_1(x) - 1/x, \ \overset{\circ}{K}_2(x) = K_2(x) - 2/x^2.$$

Врахувавши формули (19) – (25) та ввівши у розгляд функцію

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{q}\overline{\Phi}_*(\boldsymbol{z}) + \boldsymbol{z}\overline{\Phi}'_*(\boldsymbol{z}) + \overline{\Psi}_*(\boldsymbol{z}) + \boldsymbol{m}_1 \Big/ \left(\boldsymbol{k}_*^2 \pi \boldsymbol{i}\right) \int_{-l}^{l} \overline{\delta(\boldsymbol{t})} \Big/ (\boldsymbol{t} - \boldsymbol{z})^3 \, \boldsymbol{dt}\,, \qquad (26)$$

залежності (16) і (18) перепишемо так:

$$\boldsymbol{M_y} + \boldsymbol{iH_{xy}} = \\ = \boldsymbol{n}\left\{\boldsymbol{q}(\Phi_*(\boldsymbol{z}) + 2\Gamma) + \Gamma' + \boldsymbol{V}(\overline{\boldsymbol{z}}) + (\boldsymbol{z} - \overline{\boldsymbol{z}})\overline{\Phi'_*(\boldsymbol{z})} + \boldsymbol{i}\boldsymbol{m}_1 \boldsymbol{k}_*^{-2}\overline{\Omega_2(\boldsymbol{z},\overline{\boldsymbol{z}})}\right\}, \qquad (27)$$

$$\boldsymbol{Q_x} - \boldsymbol{iQ_y} = -2\boldsymbol{D}\{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{z}) - \boldsymbol{i}\Omega_1(\boldsymbol{z},\overline{\boldsymbol{z}})\}, \qquad (28)$$

де

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{z}) = -\frac{1}{2\pi \boldsymbol{i}} \int_{-l}^{l} \frac{\delta(\boldsymbol{t})}{(\boldsymbol{t} - \boldsymbol{z})^2} \boldsymbol{dt}\,, \qquad (29)$$

$\boldsymbol{q} = -(1+\nu)/(1-\nu)$, $\boldsymbol{m}_1 = 4/(1-\nu)$, $\delta(\boldsymbol{t}) \equiv \delta_1(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{i}\delta_2(\boldsymbol{t}) = -2\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{i}\omega(\boldsymbol{t})$, $\delta_1(\boldsymbol{t})$ і $\delta_2(\boldsymbol{t})$ – дійсні функції.

Скориставшись формулами (21), (24), (25) і властивостями функцій Макдональда, переконуємося, що при переході через вісь $\boldsymbol{Ox}$ функція $\Omega_1(\boldsymbol{z},\overline{\boldsymbol{z}})$ неперервна, а для функцій $\Omega(\boldsymbol{z},\overline{\boldsymbol{z}})$ та $\Omega_2(\boldsymbol{z},\overline{\boldsymbol{z}})$ справджуються залежності

$$\Omega^+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) - \Omega^-(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 2\omega_1(\boldsymbol{x}) & (|\boldsymbol{x}| < \boldsymbol{l}); \\ 0 & (|\boldsymbol{x}| > \boldsymbol{l}), \end{cases}$$

$$\overline{\Omega_2^+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})} - \overline{\Omega_2^-(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})} = \begin{cases} -0,5\boldsymbol{k}_*^2\omega_1(\boldsymbol{x}) & (|\boldsymbol{x}| < \boldsymbol{l}); \\ 0 & (|\boldsymbol{x}| > \boldsymbol{l}). \end{cases} \qquad (30)$$

Надалі вважатимемо, що виконуються умови

$$\delta(-\boldsymbol{l}) = \delta(\boldsymbol{l}) = 0\,. \qquad (31)$$

Врахувавши вираз (31), матимемо

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{z}) = -\frac{1}{2\pi \boldsymbol{i}} \int_{-l}^{l} \frac{\delta'(\boldsymbol{t})}{\boldsymbol{t} - \boldsymbol{z}} \boldsymbol{dt}\,,$$

звідки, скориставшись формулами Сохоцького-Племелі [4], можемо записати

$$\boldsymbol{P}^+(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{P}^-(\boldsymbol{x}) = -\delta'(\boldsymbol{x}) \quad (|\boldsymbol{x}| < \boldsymbol{l})\,. \qquad (32)$$

Задовольнивши за допомогою формули (28) другу крайову умову (2) та врахувавши співвідношення (32), одержимо

$$\delta'_2(\boldsymbol{x}) = 0\,. \qquad (33)$$

Оскільки правильна формула (31), то з (33) випливає, що $\delta_2(x) = 0$, тому виконуються залежності

$$\omega_1(x) = 2g_2(x),\ \omega_2(x) = -2g_1(x) - \delta_1(x). \tag{34}$$

Врахувавши (27), з першої і третьої крайових умов (2) одержимо задачу лінійного спряження для знаходження функції $V(z)$

$$V^+(x) - V^-(x) = \begin{cases} qg_1(x) - im_2 g_2(x) & (|x| < l); \\ 0 & (|x| > l), \end{cases}$$

розв'язавши яку, отримаємо

$$V(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-l}^{l} \frac{qg_1(t) - im_2 g_2(t)}{t - z}dt,\ m_2 = \frac{5+\nu}{1-\nu}. \tag{35}$$

Якщо скористаємось залежністю

$$\partial_x\left(\varphi_x + i\varphi_y\right) = \Phi_*(z) + \frac{m_1}{2}\overline{\Phi_*(z)} + (z - \bar{z})\overline{\Phi_*'(z)} + V(\bar{z}) + im_1 \times$$
$$\times\left\{\frac{\overline{\Omega_2(z,\bar{z})}}{k_*^2} + \frac{\Omega(z,\bar{z})}{4}\right\}, \tag{36}$$

то отримаємо

$$\partial_x\left[\varphi_x + i\varphi_y\right] = m_1 g(x),\ |x| \le l. \tag{37}$$

Оскільки виконується (37), то

$$\partial_x[\varphi_x] = m_1 g_1(x),\ \partial_x\left[\varphi_y\right] = m_1 g_2(x). \tag{38}$$

Врахувавши (8) і (38), на підставі другої умови (3) матимемо

$$g_2'(t) = -\frac{2\alpha h m_1 \mu}{1+\kappa} g_2(t),\ t \in L. \tag{39}$$

тому з (11) отримаємо

$$N = \frac{4\alpha h^2 m_1 \mu}{\pi(1+\kappa)}\int_L \frac{g_2(t)dt}{t - x}. \tag{40}$$

Врахувавши (20), (27), (35), (40), з перших крайових умов (2) і (3) отримаємо інтегральне рівняння

$$\int_L \frac{n_1 + \rho\rho/n + 2m_1 K_2(k_*|t - x|)}{t - x} g_2(t)dt = \frac{2\pi M_y^\infty}{n},\ x \in L, \tag{41}$$

де $\boldsymbol{n}_1 = \dfrac{2(3+\nu)}{1-\nu}$, $\rho\rho = \dfrac{8\alpha\beta\boldsymbol{h}^3\boldsymbol{m}_1\mu}{1+\kappa}$.

Рівняння (41) доповнюємо додатковою умовою

$$\int_{\boldsymbol{L}} \boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{t})d\boldsymbol{t} = 0\,, \tag{42}$$

що виражає однозначність похідної від усередненого кута повороту нормалі $\varphi_{\boldsymbol{y}}$ при обході контуру тріщини.

Зазначимо, що у частковому випадку, коли $\gamma = 0$, рівняння (41) збігається з рівнянням отриманим у [8], а для випадку пластини нульової товщини ($\boldsymbol{h}/\boldsymbol{l} \to 0$ або $\boldsymbol{k}_*\boldsymbol{l} \to \infty$) – з рівнянням класичної теорії згину пластин [14] з точністю до відповідного множника.

Зробивши заміну $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{t}/\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}/\boldsymbol{l}$ та ввівши позначення

$$\lambda = 1/(\boldsymbol{k}_*\boldsymbol{l})\,,\ \hat{\boldsymbol{g}}_2(\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{E}\boldsymbol{h}^3\sqrt{1-\boldsymbol{T}^2}\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{l}\boldsymbol{T})/\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{y}}^{\infty}\,, \tag{43}$$

рівняння (41) і (42) перепишемо у вигляді

$$2/\left(3\pi\left(1-\nu^2\right)\right)\int_{-1}^{1}(3+\nu+3\alpha\beta(1+\nu)+$$
$$+4\hat{\boldsymbol{K}}_2\left(|\boldsymbol{T}-\boldsymbol{X}|/\lambda\right)\Big)/\left((\boldsymbol{T}-\boldsymbol{X})\sqrt{1-\boldsymbol{T}^2}\right)\hat{\boldsymbol{g}}_2(\boldsymbol{T})d\boldsymbol{T} = 1\,,\ \boldsymbol{X}\in\left[-1,1\right],$$
$$\int_{-1}^{1}\hat{\boldsymbol{g}}_2(\boldsymbol{T})/\sqrt{1-\boldsymbol{T}^2}\,d\boldsymbol{T} = 0\,. \tag{44}$$

Для обчислення коефіцієнтів інтенсивності зусиль $\boldsymbol{K}_1^{\pm}$ і моментів $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{M}}^{\pm}$ скористаємося залежностями з монографій [2], [11], які після перетворень набудуть вигляду

$$\boldsymbol{K}_1^{\pm} = \pm\frac{2\alpha\boldsymbol{E}\boldsymbol{h}^2}{1-\nu}\sqrt{\boldsymbol{l}}\lim_{\boldsymbol{T}\to\pm1}\left\{\sqrt{1-\boldsymbol{T}^2}\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{l}\boldsymbol{T})\right\},\ \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{M}}^{\pm} = \boldsymbol{m}\boldsymbol{m}\sqrt{\boldsymbol{l}}\lim_{\boldsymbol{T}\to\pm1}\left\{\sqrt{1-\boldsymbol{T}^2}\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{l}\boldsymbol{T})\right\}. \tag{45}$$

Як випливає з формул (39) і (45), коефіцієнти $\boldsymbol{K}_1^{\pm}$ і $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{M}}^{\pm}$ відрізняються один від одного сталим множником, а саме

$$\boldsymbol{K}_1^{\pm} = 3\alpha\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{M}}^{\pm}/\boldsymbol{h}\,.$$

З урахуванням формул (43) і (45) зведені коефіцієнти інтенсивності зусиль $\hat{\boldsymbol{K}}_1^{\pm} = \boldsymbol{K}_1^{\pm}\boldsymbol{h}/\left(\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{y}}^{\infty}\sqrt{\boldsymbol{l}}\right)$ і моментів $\hat{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{M}}^{\pm} = \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{M}}^{\pm}/\left(\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{y}}^{\infty}\sqrt{\boldsymbol{l}}\right)$ запишемо у вигляді

$$\hat{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{M}}^{\pm} = \pm2\hat{\boldsymbol{g}}_2(\pm1)/(3(1-\nu))\,,\ \hat{\boldsymbol{K}}_1^{\pm} = 3\alpha\hat{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{M}}^{\pm}\,.$$

Зауважимо, що при $\gamma = 0$ і $h/l \to 0$ значення $\widetilde{K}_M^{\pm}$ узгоджуються з відповідними значеннями, обчисленими за класичною теорією згину пластин [14], відрізняючись від них множником $(1+\nu)/(3+\nu)$.

Рівняння (44) розв'язуємо чисельно за допомогою методу механічних квадратур [9]. В результаті отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь стосовно вузлових значень $\hat{g}_2(T_s)$. Значення функції $\hat{g}_2(\pm 1)$, через які виражаються коефіцієнти інтенсивності моментів, визначають так:

$$\hat{g}_2(1) = \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S}(-1)^{s+1}\hat{g}_2(T_s)\operatorname{ctg}\left(\frac{2s-1}{4S}\pi\right),$$

$$\hat{g}_2(-1) = \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S}(-1)^{s+S}\hat{g}_2(T_s)\operatorname{tg}\left(\frac{2s-1}{4S}\pi\right),$$

де $T_s = \cos\left(\frac{2s-1}{2S}\pi\right)$, S – кількість вузлів методу механічних квадратур.

Числовий аналіз задачі та висновки. Ми провели числовий аналіз задачі при $\nu = 0.3$. На рис. 2 показано розподіл зведеного контактного тиску $\widetilde{N} = Nh/M_y^{\infty}$ вздовж тріщини при різних значеннях відносної товщини пластини h/l і ширини області контакту берегів тріщини γ. Як видно з рис. 2, врахування ширини області контакту приводить до зменшення зведеного контактного тиску, у випадку $h/l \to 0$ він є сталим вздовж тріщини.

На рис. 3 показані графічні залежності зведених коефіцієнтів інтенсивності моментів $\widetilde{K}_M^{\pm}$ від відносної товщини пластини при різних значеннях γ. Врахування ширини області контакту приводить до збільшення зведених коефіцієнтів інтенсивності моментів.

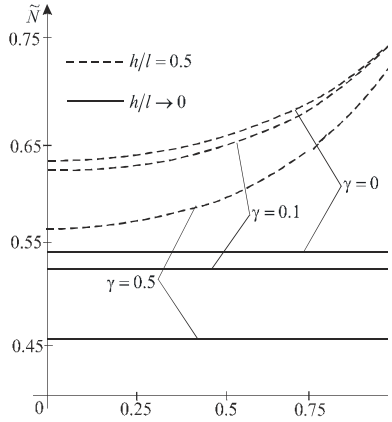

Рис. 2

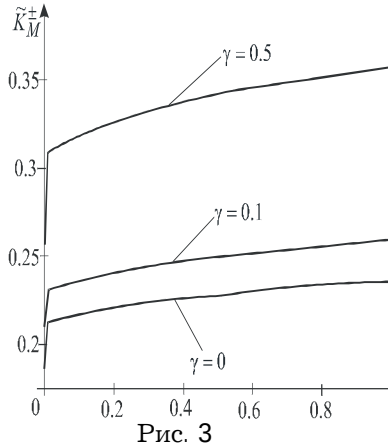

Рис. 3

Зауважимо, що у випадку $\gamma = 0$ і $h/l \to 0$ отримаємо числові результати статей [8] і [14].

---

1. *Бережницький Л. Т., Делявський М. В., Панасюк В. В.* Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин. – К., 1979.
2. *Мазурак Л. П., Бережницкий Л. Т.* Изгиб трансверсально-изотропных пластин с дефектами типа трещин. – К., 1990.
3. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1966.
4. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. – М., 1962.
5. *Опанасович В. К.* Згин пластини з наскрізною прямолінійною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її поверхонь // Наукові нотатки Луцького технічного університету. – 2007. – Вип. 20 (2). – С. 123–127.
6. *Опанасович В. К.* Сингулярні інтегральні рівняння задачі згину пластини з тріщиною за теорією Райсснера // Праці наукового товариства ім. Шевченка. – Том VI: Матеріалознавство і механіка матеріалів. – Львів. – 2001. – С. 120–125.
7. *Опанасович В. К., Делявський М. В., Подхорецкі А.* Новий підхід до розрахунку напруженого стану плити з тріщиною за теорією Рейсснера // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій: в 3-х т. / Під заг. ред. Панасюка В. – Т. 2: Аналітичні методи в механіці руйнування матеріалів. – 1999. – С. 186–189.
8. *Опанасович В. К., Новосад В. П., Селіверстов Р. Г.* Врахування контакту берегів тріщини під час згину трансверсально-ізотропної пластини // Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій: Збірник наукових праць. – Вип. 5 / За заг. ред. О. Є. Андрейківа, Й. Й. Лучка, В. В. Божидарника. – Львів: Каменяр. – 2002. – С. 148–153.
9. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацишин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – К., 1976.
10. *Прусов И. А.* Метод сопряжения в теории плит. – Минск, 1975.
11. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К., 1981.
12. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – М., 1979.

13. *Тимошенко С. П., Войновски–Кригер.* Пластины и оболочки. – М., 1966.

14. *Шацький І. П.* Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами // Доп. АН УРСР. Сер. А. Фіз.-мат. та техн. науки. – 1988. – № 7. – С. 49–51.

15. *Шацький І. П., Перепічка В. В.* Згин напівнескінченної пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами. Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 1992. – Т. 28. – № 2. – С. 54–58.

16. *Шацький І., Перепічка В., Даляк Т., Щербій А.* Задачі теорії пластин та оболонок із взаємопов'язаними крайовими умовами на розрізах // Матем. проблеми механіки неоднорідних структур: В 2-х т. – Львів, 2000. – Т. 2. – С. 51–54.

BENDING OF THE REISSNER'S PLATE WITH THROUGH-THE-THICKNESS CRACK TAKING INTO ACCOUNT CONTACT REGION WIDTH OF ITS FACES

Victor Opanasovych, Ihor Yatsyk

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine

In work the tensely-deformed state of isotropic boundless plate with a crack is explored, the faces of which are the external loading free. It is assumed that the crack faces come in the smooth contact on all crack length on a two-dimensional area on overhead plate basis. The numerical analysis of moments intensity factors and contact pressure between the crack faces is conducted, on the basis of which the built proper graphic dependences at different geometrical and mechanical problem parameters.

Key words: bending, isotropic plate, through-the-thickness crack, contact region width, two-dimensional problem of the theory of elasticity, Reissner's theory of bending, complex potentials, contact pressure, moments and efforts intensity factors.

Стаття надійшла до редколегії 28.07.2008
Прийнята до друку 19.11.2008