

УДК 539.3

## ПІДКРІПЛЕННЯ СТІЛЬНИКОВОГО ТРУБОПРОВОДУ КІЛЬЦЕВИМИ РЕБРАМИ З ВРАХУВАННЯМ ДІЇ ВІДПОРНИХ ЗУСИЛЬ

Микола СТАЩУК<sup>1</sup>, Віктор ОПАНАСОВИЧ<sup>2</sup>, Мар'ян ДОРОШ<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України  
вул. Наукова, 5 79601 Львів, Україна

<sup>2</sup>Львівський національний університет імені Івана Франка,  
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Запропоновано дослідження підкріплених трубопроводів із стільниковими (пустотілими) стінками. На підставі класичних рівнянь теорії циліндричних оболонок знайдено усереднені компоненти вектора переміщень. Розв'язок цих рівнянь записали у формі подвійних тригонометричних рядів Фур'є. Враховували відпір ґрунтів.

*Ключові слова:* стільниковий трубопровід, кільцеві ребра, максимальний прогин трубопроводу, усереднені компоненти переміщень, циліндрична жорсткість, жорсткість на розтяг, замкнена циліндрична оболонка, коефіцієнт відпору ґрунту.

Трубопроводи є головними конструкційними елементами, які мають пряме застосування для прокладання і реновації систем гравітаційної і низьконапірної каналізації, водопроводу та ін.

Мета нашої праці – розглянути труби великого діаметра, які функціонують спільно з навколишнім середовищем [3, 5, 7, 9, 10], зокрема з ґрунтом. В таких трубопроводах зовнішнє навантаження може спричинити деформацію більшу за 3% ; при цьому конструкція зберігає свою працездатність.

Ґрунт створює власне навантаження, яке діє безпосередньо на трубопровід у вертикальному напрямі. Варто зазначити, що в результаті взаємодії конструкції з навколишнім середовищем виникає горизонтальний відпір, який значно впливає на деформований стан гнучких труб. Такий горизонтальний відпір треба обов'язково враховувати під час розрахунку та проектування розглядуваних конструкцій.

Особливо вплив відпору ґрунту виявляється, якщо маємо більш ущільнене зовнішнє середовище та трубопроводи великого діаметра. Загальноприйнято у таких випадках використовувати емпіричну формулу [9, 10]

$$\frac{\Delta}{D} = \frac{C_1 q}{C_2 S_R + C_3 S_s}, \quad (1)$$

де  $\Delta$  - прогин трубопроводу з суцільними стінками (максимальне зменшення вертикального діаметра);  $q$  - інтенсивність вертикального навантаження ґрунту;  $D$  - середній діаметр трубопроводу;  $S_R$  - кільцева жорсткість труби;  $S_s$  - фактор жорсткості ґрунту;  $C_i$  ( $i=1,2,3$ ) - сталі, які у різних національних стандартах і

будівельних правилах мають досить суттєву різницю [9]. Рівність (1) відповідає класичній формулі Шпенглера [11].

Підсилити гнучкі труби пружними кільцевими підпорами, можна збільшити їхню кільцеву жорсткість, що дає змогу оптимізувати параметри конструкції, досягаючи мінімальної маси під час забезпечення достатньої експлуатаційної надійності трубопроводу. Приймаємо, що трубопровід утворений із спіралеподібної трубки. Тоді отримаємо, що стінки трубопроводу стільникові (пустотілі). Такі конструкції невеликої маси, перебуваючи у ґрунті, можуть витримувати значні зовнішні навантаження.

Ми аналітично визначимо максимальний прогин трубопроводу, який взаємодіє з навколишнім пружним середовищем і який підсилений пружними кільцевими ребрами жорсткості. В частковому випадку, а саме, коли маємо трубу без підпор, отримано результати, які зіставляли з даними, одержаними на підставі формули (1) для різних національних стандартів.

**Формулювання задачі.** Розглянемо довгий стільниковий полімерний трубопровід (рис. 1), виготовлений із спіралеподібної трубки, діаметр якої становить  $h$ , а товщина стінки трубки -  $d$ . Конструкція міститься в ґрунті на глибині  $H$ . Під впливом ваги ґрунту, який розміщений над трубопроводом, одержимо рівномірне розподілене навантаження  $q$  (рис. 2), яке сприйматиме конструкція у вертикальному напрямі. На

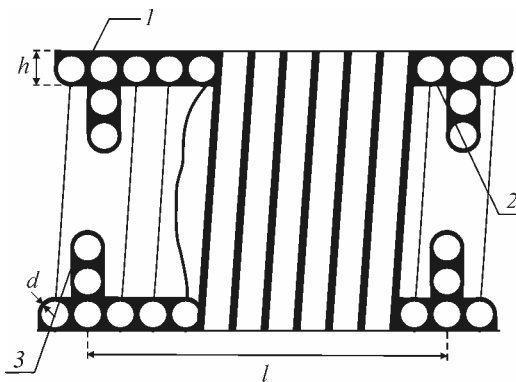


Рис. 1. Стільникова спіралеподібна труба:  
1 – зварний шов; 2 – трубка намотки стінки труби; 3 – пружні кільцеві підпори

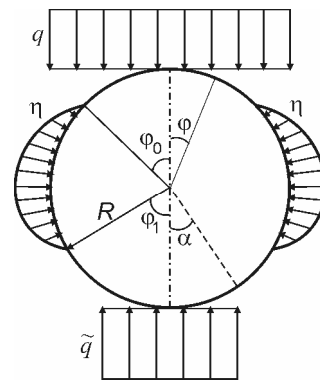


Рис. 2. Схема розподілу навантаження на трубопровід (поперечний переріз)

дно трубопроводу діятиме розподілене навантаження  $\tilde{q} = q/\sin \alpha$ , де  $2\alpha$  - кут контакту основи трубопроводу, яка сприйматиме навантаження  $\tilde{q}$  (рис. 2). Приймаємо, що в радіальному напрямі діятиме відпір ґрунту  $\eta$  (рис. 2) на певній ділянці трубопроводу, вираз якого подано нижче.

Для збільшення кільцевої жорсткості конструкції трубопровід підсилюємо пружними кільцевими підпорами, які розміщені періодично з кроком  $l$ .

Оскільки маємо періодичну конструкцію, то нескінченну трубу розбиваємо на скінченні кругові замкнені циліндричні оболонки завдовжки  $l$ , на кінцях яких є шпангоути, які мають відповідно жорсткість.

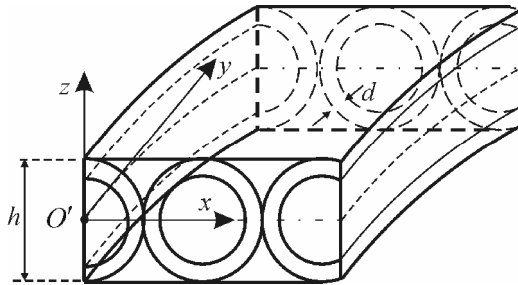


Рис. 3. Схема стінки конструкції, змонтованої пвстотілими стінками

поверхні оболонки будемо харак-теризувати  $x$  і  $y=R\varphi$ , де  $x$ - відстань точки по твірній від початкового екваторіального перерізу;  $\varphi$ - кут між початковою і довільною меридіальною площиною, тобто відраховується від вертикальної площини.

Компоненти напружень  $\sigma_x$  та  $\sigma_y$  набуватимуть такого вигляду [9]:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{f(x, z)E}{1 - \nu^2} [\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y + z(\chi_x + \nu\chi_y)], \\ \sigma_y &= \frac{f(x, z)E}{1 - \nu^2} [\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x + z(\chi_y + \nu\chi_x)],\end{aligned}\quad (2)$$

де  $\varepsilon_x, \varepsilon_y; \chi_x, \chi_y$  – компоненти деформацій серединної поверхні оболонки;  $E$  – модуль Юнга;  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона матеріалу трубопроводу;  $f(x, z)=1$  коли в точці  $(x, z)$  стінки циліндричної оболонки є матеріалом та  $f(x, z)=0$  – при його відсутності.

Прийемо позначення  $g(x) = \int_{-h/2}^{h/2} f(x, z) dz$ ,  $t(x) = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 f(x, z) dz$ , де  $g(x)$  та

$t(x)$  - періодичні функції з періодом  $h$ .

Силу  $N_y$  та згинальний момент  $M_y$  [1,8] можемо подати у такому вигляді:

$$N_y = \frac{1}{1 - \nu^2} (N'_y + \nu N'_x), \quad M_y = \frac{1}{1 - \nu^2} (M'_y + \nu M'_x), \quad (3)$$

де  $N'_y = E\varepsilon_y g(x)$ ,  $M'_y = E\chi_y t(x)$  – відповідні складові сили та згинального моменту, які діють в напрямі  $O'y$  у поперечному перерізі вирізаного з циліндричної оболонки одного кільця, ширина якого становить  $h$ ;  $N'_x = E\varepsilon_x g(x)$ ,  $M'_x = E\chi_x t(x)$  – складові сили та згинального моменту на одиницю довжини, які діють в напрямі  $O'x$  в поперечному перерізі виділеної з циліндричної оболонки вузької смужки, паралельної до твірної труби. На підставі [6] та з огляду на те, що  $h$  мале порівняно з геометричними розмірами серединної поверхні оболонки, можемо зауважити:

*Зауваження 1.* Деформації  $\varepsilon_y$  та  $\chi_y$  – малозміні в перерізі вирізаного кільця.

Розглядаємо трубопроводи великого діаметра. Тому приймаємо, що замкнена циліндрична оболонка складається з кругових верти-кальних порожнистих кілець, які між собою зварені.

**Побудова розв'язку задачі.**

Виріжимо з оболонки малий елемент (рис. 3), який утворений двома парами суміжних площин, що нормальні до її серединної поверхні та введемо змішану систему координат  $O'xyz$  (рис. 3).

Положення точки серединної

*Зауваження 2.* Складова сили  $N'_x$  та згинального моменту  $M'_x$ , на підставі симетричності зовнішнього навантаження стосовно осі  $O'x$ , також змінюються мало на проміжку  $[x - h/2, x + h/2]$ .

Усереднивши складову сили  $N'_y$  і згинального моменту  $M'_y$ , та компоненти деформацій  $\varepsilon_x = N'_x/Eg(x)$ ,  $\chi_x = M'_x/Et(x)$  на проміжку  $[x - h/2, x + h/2]$  і врахувавши *зауваження 1* і *2*, одержимо такі вирази:

$$\begin{aligned} \int_{x-h/2}^{x+h/2} N'_y dx &\approx \frac{E}{h} \int_{x-h/2}^{x+h/2} \varepsilon_y dx \cdot \int_{x-h/2}^{x+h/2} g(x) dx, \\ \int_{x-h/2}^{x+h/2} M'_y dx &\approx \frac{E}{h} \int_{x-h/2}^{x+h/2} \chi_y dx \cdot \int_{x-h/2}^{x+h/2} t(x) dx, \\ \int_{x-h/2}^{x+h/2} \varepsilon_x dx &\approx \frac{1}{hE} \int_{x-h/2}^{x+h/2} N'_x dx \cdot \int_{x-h/2}^{x+h/2} 1/g(x) dx, \\ \int_{x-h/2}^{x+h/2} \chi_x dx &\approx \frac{1}{hE} \int_{x-h/2}^{x+h/2} M'_x dx \cdot \int_{x-h/2}^{x+h/2} 1/t(x) dx. \end{aligned} \quad (4)$$

Введемо усереднені переміщення

$$u^*(x, y) = \Phi u(x, y), \quad v^*(x, y) = \Phi v(x, y), \quad w^*(x, y) = \Phi w(x, y), \quad (5)$$

де  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  та  $w(x, y)$ - компоненти вектора переміщень. Тут  $\Phi u = \frac{1}{h} \int_{x-h/2}^{x+h/2} u dx$  - інтегральний оператор, який усереднює функцію  $u$  на проміжку  $[x - h/2, x + h/2]$ .

Застосувавши теореми диференціювання інтегралів Рімана й параметричних інтегралів [2] до виразів для деформацій [1]  $\varepsilon_x = \partial u / \partial x$ ;  $\varepsilon_y = \partial v / \partial y + w/R$ ;  $\chi_y = -\partial^2 w / \partial y^2 - w/R^2$  та  $\chi_x = -\partial^2 w / \partial x^2$  і врахувавши співвідношення (5), одержимо усереднені компоненти деформації для замкнутої циліндричної оболонки

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^* &= \frac{\partial u^*(x, y)}{\partial x}; \quad \varepsilon_y^* = \frac{\partial v^*(x, y)}{\partial y} + \frac{w^*}{R}; \\ \chi_y^* &= -\frac{\partial^2 w^*(x, y)}{\partial y^2} - \frac{w^*}{R^2}, \quad \chi_x^* = -\frac{\partial^2 w^*(x, y)}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Отож, з рівностей (3), виразів (4) та усереднених деформації (6) запишемо такі співвідношення для усереднених сил і згинальних моментів:

$$N_y^*(x, y) = B_y^* \varepsilon_y^*(x, y) + \nu B_x^* \varepsilon_x^*(x, y), \quad M_y^*(x, y) = D_y^* \chi_y^* + \nu D_x^* \chi_x^*, \quad (7)$$

де  $N_y^* = (\Phi N_y' + \nu \Phi N_x') / (1 - \nu^2)$ ,  $M_y^* = -(\Phi M_y' + \nu \Phi M_x') / (1 - \nu^2)$  – відповідні усереднена сила та згинальний момент;  $D_y^*$ ,  $D_x^*$  та  $B_y^*$ ,  $B_x^*$  – циліндричні жорсткості та жорсткості на розтяг замкненої циліндричної оболонки, які зі співвідношень (4) визначаємо так:

$$B_y^* = \frac{EF}{h(1 - \nu^2)}, \quad B_x^* = \frac{hE}{G(1 - \nu^2)}; \quad D_y^* = \frac{I_x E}{h(1 - \nu^2)}, \quad D_x^* = \frac{hE}{J_x(1 - \nu^2)}. \quad (8)$$

Тут  $F = h\Phi g(x)$  – площа перерізу трубки, що утворює стінку труби з урахуванням зварного шва;  $G = h\Phi(1/g(x))$ ;  $I_x = h\Phi t(x)$  – момент інерції перерізу трубки набору стінки конструкції з урахуванням зварного шва стосовно осі  $Ox$ ;  $J_x = h\Phi(1/t(x))$ .

Зауважимо, що подібно були усереднені інші рівнодійні сили [1,9]  $N_x(x, y)$ ,  $N_{xy}(x, y)$  та згинний  $M_x(x, y)$  і крутний  $M_{xy}(x, y)$  моменти.

Враховуючи співвідношення (7), на підставі [1, 9] можемо одержати рівняння лінійної моментної теорії анізотропних циліндричних оболонок із суцільними стінками для визначення усереднених компонент вектора переміщень  $u^*$ ,  $v^*$  та  $w^*$ . З'ясовано, що за такого формулювання задачі, значення  $D_y^*$  і  $D_x^*$ , а також  $B_y^*$  та  $B_x^*$ , суттєво між собою не відрізняються. Тому у подальших обчисленнях приймаємо ізотропність наведеної замкненої оболонки з циліндричною жорсткістю та жорсткістю на розтяг

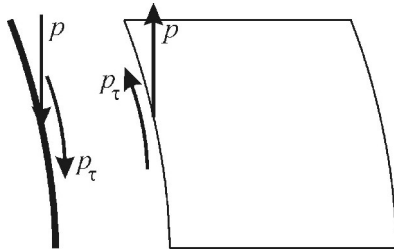


Рис. 4. Схема контакту пружної підпори з циліндричною оболонкою

$$D^* = \frac{I_x E}{h(1 - \nu^2)}, \quad B^* = \frac{EF}{h(1 - \nu^2)},$$

де  $I_x = h^4/12 - \pi(h/2 - d)^4/4$ ,  $F = h^2 - \pi(h/2 - d)^2$ .

В результаті взаємодії пружних шпангоутів та циліндричної оболонки на її кінцях виникатимуть невідомі розподілені по ободу взаємодіючі нормальні  $p(\varphi)$  та дотичні  $p_\tau(\varphi)$  зусилля.

Враховуючи наведені міркування та вирази для рівнодійних зусиль (7), бачимо, що у сформульованій задачі компоненти вектора усереднених переміщень повинні задовольняти рівняння лінійної моментної теорії [1] для ізотропної циліндричної оболонки з суцільною стінкою

$$\begin{aligned} L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w &= 0, \quad L_{21}u + L_{22}v + L_{23}w = -q'_\tau + p'_\tau, \\ L_{31}u + L_{32}v + L_{33}w &= -q' + p' - \eta, \end{aligned} \quad (9)$$

де  $q'$ ,  $q'_\tau$  – зовнішні розподілені навантаження відповідно у нормальному та дотичному напрямі;  $p'$  та  $p'_\tau$  невідомі нормальні та дотичні розподілені контактні навантаження;  $\eta$  – горизонтальний відпір ґрунту засипки.

Диференціальні оператори  $L_{kl}$ , які входять до системи рівнянь (9), визначають так:

$$\begin{aligned} L_{11} &= B \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right), \quad L_{12} = B \frac{1+\nu}{2R} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \varphi}, \quad L_{13} = L_{31} = B \frac{\nu}{R} \frac{\partial}{\partial x}, \\ L_{21} &= B \frac{1+\nu}{2R} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \varphi}, \quad L_{22} = B \left( \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right), \quad L_{23} = L_{32} = \frac{B}{R^2} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ L_{33} &= D \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial \varphi^2} + \frac{1}{R^4} \frac{\partial^4}{\partial \varphi^4} + \frac{2\nu}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2}{R^4} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{R^4} I \right) + \frac{B}{R^2} I. \end{aligned} \quad (10)$$

Тут  $I$  – одиничний оператор;  $R$  – радіус середньої поверхні циліндричної оболонки.

У рівняннях (9), і нижче, індекс “\*” будемо опускати, але розуміючи, що знаходимо усереднені переміщення для замкненої стільникової циліндричної оболонки.

Горизонтальний відпір ґрунту засипки на циліндричну оболонку подамо у вигляді радіальної реакції (рис 2)

$$\eta(\varphi, x) = \begin{cases} kw(\varphi, x), & \text{коли } w(\varphi, x) > 0, \\ 0, & \text{коли } w(\varphi, x) \leq 0, \end{cases} \quad (11)$$

де  $k$  – коефіцієнт відпору пружного середовища, що оточує оболонку в нормальному напрямі.

Приймаємо, що  $w(\varphi, x) > 0$  набуває значення в прямолінійній області

$$\Omega = \{ \varphi \in [\varphi_0, \pi - \varphi_1] \cup [\pi + \varphi_1, 2\pi - \varphi_0], x \in [0, l] \},$$

де кути  $\varphi_0, \varphi_1$  зображені на рис. 2, а їхні значення подано далі.

Розв’язок диференціальної системи рівнянь (10) подаємо у вигляді подвійних тригонометричних рядів Фур’є [8]

$$\begin{aligned} w &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} C_{mn} \cos \frac{m\pi x}{l} \cos n\varphi, \quad v = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} B_{mn} \cos \frac{m\pi x}{l} \sin n\varphi, \\ u &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l} \cos n\varphi. \end{aligned} \quad (12)$$

При такому формулюванні задачі на кінцях циліндричної оболонки запишемо крайові умови

$$w(\varphi) = W(\varphi), \quad v(\varphi) = V(\varphi); \quad u = 0, \quad \partial w / \partial x = 0, \quad \text{при } x = 0 \text{ та } x = l. \quad (13)$$

Тут  $W(\varphi)$ ,  $V(\varphi)$  – компоненти вектора переміщень шпангоутів відповідно у радіальному та тангенціальному напрямках.

Безпосередньо підстановкою  $x = 0$  та  $x = l$  отримаємо, що компоненти вектора переміщень циліндричної оболонки (12) задовольняють другу групу крайових умов (13).

Зовнішнє навантаження  $q(x, \varphi)$  і  $\tilde{q}(x, \varphi)$ , яке діє на оболонку, подамо у вигляді подвійних тригонометричних рядів Фур'є

$$\begin{aligned} q'(x, \varphi) &= (q(x, \varphi) + \tilde{q}(x, \varphi)) \cos \varphi = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} q_{mn} \cos \frac{m\pi x}{l} \cos n\varphi, \\ q'_{\tau}(x, \varphi) &= (q(x, \varphi) + \tilde{q}(x, \varphi)) \sin \varphi = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} q_{\tau mn} \cos \frac{m\pi x}{l} \sin n\varphi, \end{aligned} \quad (14)$$

де

$$\begin{aligned} q_{0n} &= -2\pi q \cos \frac{n\pi}{2} / (n^2 - 1) + \\ &+ (-1)^{n-1} q (\sin((n-1)\alpha) / (n-1) + \sin((n+1)\alpha) / (n+1)) / \sin \alpha, \\ q_{\tau 0n} &= -2\pi n q \cos \frac{n\pi}{2} / (n^2 - 1) + \\ &+ (-1)^{n-1} q (\sin((n-1)\alpha) / (n-1) - \sin((n+1)\alpha) / (n+1)) / \sin \alpha, \end{aligned}$$

коли  $n = 2, 3, \dots$ , а  $q_{mn} = q_{\tau mn} = 0$  при  $m = 1, 2, 3, \dots$ ,  $n = 2, 3, \dots$ .

Щоб привести невідомі контактні зусилля  $p(\varphi)$  та  $p_{\tau}(\varphi)$ , які виникають в результаті дії шпангоутів на кінцях циліндричної оболонки, до розмірностей розподіленого тиску, треба їх подати у такому вигляді [1, 8]:

$$\begin{aligned} p'(x, \varphi) &= \frac{p(\varphi)}{\Delta x} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} p_{mn} \cos \frac{m\pi x}{l} \cos n\varphi, \\ p'_{\tau}(x, \varphi) &= \frac{p_{\tau}(\varphi)}{\Delta x} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} p_{\tau mn} \cos \frac{m\pi x}{l} \sin n\varphi, \end{aligned} \quad (15)$$

де

$$p_{mn} = \begin{cases} (1 + (-1)^m) 2p_n / l, & m = 1, 2, 3, \dots \\ 2p_n / l, & m = 0, \end{cases}, \quad p_{\tau mn} = \begin{cases} (1 + (-1)^m) 2p_{\tau n} / l, & m = 1, 2, 3, \dots \\ 2p_{\tau n} / l, & m = 0. \end{cases}$$

Тут  $\Delta x$  – безмежно мала величина [1, 8];  $p_n$ ,  $p_{\tau n}$  – невідомі коефіцієнти, які потрібно визначити.

Нормальний відпір ґрунту  $\eta(x, \varphi)$  розкладемо у подвійний тригонометричний ряд Фур'є

$$\eta(x, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} C'_{mn} \cos \frac{m\pi x}{l} \cos n\varphi.$$

Врахувавши (11) і (12) та помноживши праву і ліву частини попереднього розвинення на  $\cos m\pi x/l \cdot \cos n\varphi d\varphi dx$  і проінтегрувавши праву і ліву частину в межах від 0 до  $l$  по  $x$  та від 0 до  $2\pi$  по  $\varphi$ , а також врахувавши ортогональність базисних функцій, отримаємо

$$C'_{mn} = \frac{k}{\pi} \sum_{i=2}^{\infty} C_{mi} f_{in}, \quad n = 2, 3, \dots, \quad m = 0, 1, \dots, \quad (16)$$

$$\text{де } f_{in} = \int_{\varphi_0}^{\pi-\varphi_1} \cos i\varphi \cos n\varphi d\varphi + \int_{\pi+\varphi_1}^{2\pi-\varphi_0} \cos i\varphi \cos n\varphi d\varphi.$$

У розвиненнях (14)–(16) зазначено коефіцієнти при  $n = 2, 3, \dots$ , оскільки членів  $n=0$  та  $n=1$  немає у виразах (12).

Підставляючи розвинення (12), (14)–(16) у систему диференціальних рівнянь (9), одержимо для кожного значення  $m$  свою систему лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР) для визначення невідомих коефіцієнтів  $A_{mn}$ ,  $B_{mn}$  та  $C_{mn}$

$$\begin{aligned} & -\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 A_{mn} - \frac{(1-\nu)n^2}{2R^2} A_{mn} - \frac{1+\nu mn\pi}{2R} \frac{B_{mn}}{l} - \frac{\nu m\pi}{R} \frac{C_{mn}}{l} = 0, \\ & -\frac{n^2}{R^2} B_{mn} - \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 B_{mn} - \frac{1+\nu mn\pi}{2R} \frac{A_{mn}}{l} - \frac{n}{R^2} C_{mn} = \frac{-q_{\tau mn} + p_{\tau mn}}{B}, \\ & D \left( \left(\frac{m\pi}{l}\right)^4 + 2\left(\frac{mn\pi}{Rl}\right)^2 + \frac{n^4}{R^4} - \frac{2\nu}{R^2} \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 - \frac{2n^2}{R^4} + \frac{1}{R^4} \right) C_{mn} + \\ & + \frac{B}{R^2} \left( \frac{R\nu m\pi}{l} A_{mn} + nB_{mn} + C_{mn} \right) = \frac{k}{\pi} \sum_{i=2}^N C_{mi} f_{in} - q_{mn} + p_{mn}, \quad (17) \end{aligned}$$

де  $n = 2, 3, \dots$ ,  $m = 0, 1, \dots$

Розв'язавши системи лінійних алгебричних рівнянь (17), для кожної пари  $m$  та  $n$  одержимо

$$\begin{aligned} B_{mn} &= p_n B'_{mn} + p_{\tau n} B''_{mn} + q_{mn} B'''_{mn} + q_{\tau mn} B^{IV}_{mn}, \\ C_{mn} &= p_n C'_{mn} + p_{\tau n} C''_{mn} + q_{mn} C'''_{mn}, \quad (18) \end{aligned}$$

де  $C'_{mn}$ ,  $C''_{mn}$ ,  $C'''_{mn}$ ,  $C^{IV}_{mn}$  та  $B'_{mn}$ ,  $B''_{mn}$ ,  $B'''_{mn}$ ,  $B^{IV}_{mn}$  – сталі, вирази яких у цій статті не наводимо з огляду на їхню громіздкість.

Рівняння рівноваги шпангоутів мають вигляд [4]



$$\begin{aligned} & \frac{E'I_p}{2} \left[ \frac{d^3}{d\varphi^3} \left( \frac{d^2W(\varphi)}{d\varphi^2} + W(\varphi) \right) + \frac{d^2}{d\varphi^2} \left( \frac{d^2V(\varphi)}{d\varphi^2} + V(\varphi) \right) \right] + \\ & \quad + R^4 \left( -p_\tau(\varphi) + \frac{dp(\varphi)}{d\varphi} \right) = 0, \\ & \frac{E'F_p}{2} \left( \frac{d^2}{d\varphi^2} + 1 \right) \left( \frac{dV(\varphi)}{d\varphi} - W(\varphi) \right) + R^2 \left( -p(\varphi) + \frac{dp_\tau(\varphi)}{d\varphi} \right) = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

де  $I_p$  – момент інерції поперечного перерізу кільцевої підпори стосовно осі симетрії підпори;  $F_p$  – площа поперечного перерізу кільцевої підпори.

Компоненти вектора переміщень пружних шпангоутів на підставі симетрії подамо у вигляді

$$W(\varphi) = \sum_{n=2}^{\infty} W_n \cos n\varphi, \quad V(\varphi) = \sum_{n=2}^{\infty} V_n \sin n\varphi. \quad (20)$$

Складових переміщень, які зображено членами  $n = 0$  та  $n = 1$  у розвиненнях (20) – немає, оскільки вони зв'язані з жорстким переміщенням шпангоута. Невідомі контактні зусилля на кільцевих підпорах подамо за допомогою розвинення

$$p(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cos n\varphi, \quad p_\tau(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{\tau n} \sin n\varphi. \quad (21)$$

Підставляючи розвинення (20) та (21) у рівняння рівноваги шпангоута (19) та скориставшись умовою ортогональності тригонометричних функцій, отримаємо такі вирази для визначення коефіцієнтів  $W_n$  та  $V_n$ :

$$\begin{aligned} W_n &= -R^2 \frac{(F_k R^2 + I_k) n p_n + (F_k R^2 - n^2 I_k) p_{\tau n}}{2n(n^2 - 1)^2 E I_k F_k}, \\ V_n &= -R^2 \frac{(F_k R^2 + n^2 I_k) n p_n + (F_k R^2 - n^4 I_k) p_{\tau n}}{2n^2(n^2 - 1)^2 E I_k F_k}, \end{aligned} \quad (22)$$

де  $n = 2, 3, \dots$

На підставі перших двох крайових умов (13), враховуючи (18) та (22), отримаємо для кожного  $n$  свою систему двох лінійних алгебричних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів  $p_n$  та  $p_{\tau n}$

$$\begin{aligned} & \frac{2}{l} (p_n C'_{0n} + p_{\tau n} C''_{0n} + q_{0n} C'''_{0n} + q_{\tau 0n} C^{IV}_{0n}) + \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{l} (1 + (-1)^m) (p_n C'_{mn} + p_{\tau n} C''_{mn} + q_{mn} C'''_{mn} + q_{\tau mn} C^{IV}_{mn}) = W_n \\ & \frac{2}{l} (p_n B'_{0n} + p_{\tau n} B''_{0n} + q_{0n} B'''_{0n} + q_{\tau 0n} B^{IV}_{0n}) + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{l} (1 + (-1)^m) (p_n B'_{mn} + p_{\tau n} B''_{mn} + q_{mn} B'''_{mn} + q_{\tau mn} B^{IV}_{mn}) = V_n .$$

Тут  $n = 2, 3, \dots$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$

Коефіцієнт відпору ґрунту  $k$  у нормальному напрямі залежить від типу ґрунту та його ущільнення. Він нелінійно залежить від зовнішнього навантаження. В багатьох розрахунках трубопроводів з навколишнім пружним середовищем приймають, що

$$E'_s = kR , \quad (23)$$

де  $E'_s$  [8] – січний модуль ґрунту.

**Числовий розрахунок трубопроводу.** На рис. 5–7 показано результати числового розрахунку сформульованої задачі для модуля Юнга  $E = 850 \text{ МПа}$  і коефіцієнта Пуассона матеріалу конструкції  $\nu = 0.25$ ; глибині засипки  $H = 1 \text{ м}$  та густині ґрунту  $\rho = 1700 \text{ кг/м}^3$ . Для прикладу вибирали, що дорівнюють  $\alpha = \pi/6$ . Суцільні лінії на усіх наведених нижче рисунках відповідають трубопроводу з радіусом серединної поверхні оболонки  $R = 1 \text{ м}$ , а штрихові – з  $R = 0.5 \text{ м}$ . Діаметр трубки з набору стінки конструкції становив  $h = R/20$ , а товщина стінки трубки  $d = h/10$ .

На рис. 5. зображено графічну залежність зведеного максимального прогину  $\Delta_{\max}/h$  трубопроводу від коефіцієнта відпору ґрунту  $k$ , де  $\Delta_{\max} = w(l/2, 0) + w(l/2, \pi)$  – максимальне зменшення діаметра трубо-проводу, який підсилений пружними кільцевими підпорами. Криві 1 і 1' на рис. 5 побудовані для трубопроводів, підсилених періодичними пружними кільцевими підпорами, які утворені з п'ятох порожнистих кілець, які розміщені з кроком  $l = 2R$ ; відповідно криві 2 і 2' побудовані для конструкцій, у яких періодичні підпори розміщені з кроком  $l = 3R$ .

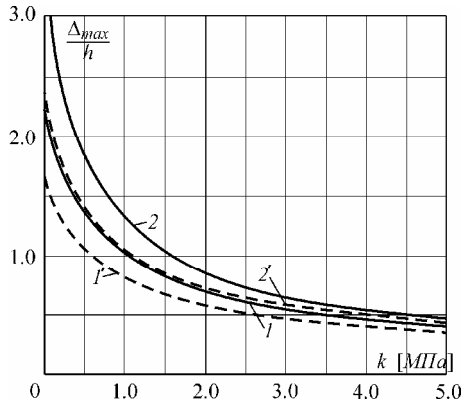


Рис. 5. Зміна зведеного максимального прогину  $\Delta_{\max}/h$  трубопроводу від коефіцієнта відпору ґрунту засипки  $k$

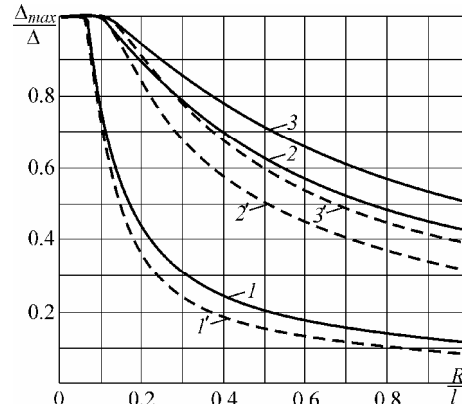


Рис. 6. Зміна зведеного максимального прогину  $\Delta_{\max}/\Delta$  від величини  $R/l$

На рис. 6 зображено графічні залежності зведеного максимального прогину конструкції  $\Delta_{\max}/\Delta$  від величини  $R/l$ , де  $\Delta = w(l/2, 0) + w(l/2, \pi)$  – максимальне зменшення діаметра трубопроводу без підпор, тобто, коли  $l \rightarrow \infty$ . Криві 1 і 1' побудовані для підсилених шпангоутами трубопроводів без урахування відпору землі, криві 2 і 2' побудовані при січному модулі ґрунту  $E'_s = 1 \text{ МПа}$ , а криві 3 і 3' відповідно, коли  $E'_s = 2 \text{ МПа}$ .

Криві 1, 1' на рис. 7 відображають відносне переміщення  $w/h$  у нормальному напрямі по ободу оболонки на її кінцях, а криві 2 і 2' при  $x = l/2$ .

В розрахунках приймали, що кути  $\varphi_0 \approx 0.26\pi$ ,  $\varphi_1 \approx 0.2\pi$  і, як бачимо з рис. 7, ці, кути спільномірні з кутами, за яких нормальне переміщення  $w$  перетворюється в нуль.

Для заданого матеріалу та зовнішнього навантаження у табл. подано деякі результати, отримані для труби без підпор (I) та за формулою (1) (II-V) для різних національних стандартів, коли  $h=R/20$  і  $d=h/2$ .

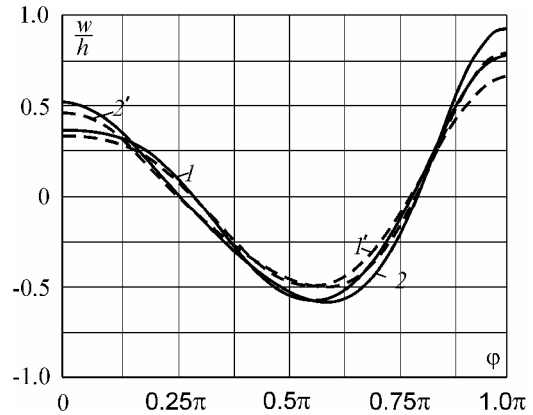


Рис. 7. Залежність відносного нормального переміщення  $w/h$  по ободу трубопроводу

Розрахунок	R [см]	$\Delta$ [см] при $E'_s = 0 \text{ МПа}$	$\Delta$ [см] при $E'_s = 1 \text{ МПа}$	$\Delta$ [см] при $E'_s = 2 \text{ МПа}$
<i>I</i>	100	<b>33,8</b>	<b>5,5</b>	<b>3,2</b>
<i>II</i>	100	38,4	5,0	2,6
<i>III</i>	100	42,2	5,4	2,9
<i>IV</i>	100	19,0	3,6	1,9
<i>V</i>	100	16,0	2,0	1,1

Числові дані розрахунку *I* відповідають за вищенаведеним алгоритмом розв'язання сформульованої задачі; *II* – за англійським національним стандартом [9]; *III* – за російським національним стандартом [9]; *IV* – за німецьким національним стандартом [9]; *V* – за швейцарським національним стандартом [9]. Зауважимо, що дані за англійським та російським національними стандартами спільномірні з результатами числового розв'язку сформульованої задачі.

1. Авдотин А.С. Прикладные методы расчета оболочек и тонкостенных конструкций. – М., 1969.
2. Архипов.Г.И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу – М., 1999.
3. Баженов. В. А. Изгиб цилиндрических оболочек в упругой среде – Львов, 1975.
4. Галкин С. И., Левицкая Т. Е. Расчет цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами, на действие сосредоточенных сил // Труды VIII Всесоюзной конференции по теории оболочек та пластин – М., 1973.– С. 647–652.
5. Максимук О. В., Махніцький Р. М., Щербина Н. М. Математичне моделювання та методи розрахунку тонкостінних композитних конструкцій. – Львів, 2005.
6. Работнов Ю.Н. Сопротивление материалов. – М., 1962.
7. Стацук Н. Г. Задачи механики упругих тел с трещиноподобными дефектами. – К., 1993.
8. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.П. Пластины и оболочки. М., 1966.
9. Швабауэр В. В., Гвоздев И. В. Расчет подземного трубопровода из термопластов // Полимерные трубы.–2007, № 3.– С. 52–56.
10. Jonson L. E. Plastic pipes for water supply and sewage disposal // Borealis. – 1996. – 156. P. 223–233.
11. Spangler M. G. Structural design of flexible pipe culverts. – Iowa Eng. Exp Stat. Bull. 153. – 1941.

**REINFORCEMENT OF CELLULAR PIPELINE BY CIRCULAR RIBS  
TAKING INTO ACCOUNT THE ACTION OF EFFORTS****Mykola Stashchuk<sup>1</sup>, Viktor Opanasovich<sup>2</sup>, Maryan Dorosh<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>*Karpenko Physico-Mechanical Institute of the NAS of Ukraine,  
Naukova Str., 5 79601 Lviv, Ukraine*

<sup>2</sup>*Ivan Franco National University of Lviv,  
Universitetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine*

This work offers investigation of pipelines with cellular (hollow) walls. Basing on the classical equations of theory of cylinder jackets found averaged values of dislocation. Solution of these equations was written in form of double trigonometric Fourier series. Thus it was taken into account repulse of soils

*Key words:* the faveolate pipe line, ring edges, maximum buckling of the pipe line, average components of conveyances, cylinder stiffness, a self-contained cylinder environment, quotient of repulse of soil.

Стаття надійшла до редколегії 28.05.2007

Прийнята до друку 19.11.2008