ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2008. Вип. 69. С. 72–77 *Ser. Mech.-Mat. 2008. Vol. 69. P. 72–77*

УДК 517.95

ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ МІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ НА НЕСКІНЧЕННОСТІ

Галина ТОРГАН

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Досліджено поведінку узагальненого розв'язку мішаної задачі для нелінійного параболічного рівняння четвертого порядку при $t \to \infty$.

Ключові слова: мішана задача, параболічне рівняння.

Параболічні рівняння

$$u_{tt} = div\,\sigma(\nabla u) + \Delta u_t - \delta^2 \Delta^2 u,$$

де $\sigma \geq 0$, $0 < \delta < 1$, моделюють процеси фазового переходу у в'язкопружних середовищах з капілярністю. Деякі задачі для таких нелінійних рівнянь досліджено в [2]–[3], для певних квазілінійних параболічних рівнянь четвертого порядку в [4]–[7].

У цій праці одержано поведінку узагальненого розв'язку нелінійного параболічного рівняння четвертого порядку при $t \to \infty$.

Нехай $\Omega \subset R^n$ – обмежена область з межею $\partial\Omega \in C^1$, $Q = \Omega \times (0, +\infty)$, $S = \partial\Omega \times (0, +\infty)$, $Q_{t_1,t_2} = \Omega \times (t_1, t_2)$, $S_{t_1,t_2} = \partial\Omega \times (t_1, t_2)$, $0 \leq t_1 < t_2 \leq +\infty$.

В області Q розглянемо задачу для рівняння

$$u_{tt} + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} (a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j})_{x_s x_l} - \sum_{i=1}^{n} (a_i(x,t) \mid u_{tx_i} \mid^{q-2} u_{tx_i})_{x_i} +$$
$$+ c_0(x,t) \mid u_t \mid^{p-2} u_t = f(x,t)\,, \tag{1}$$

з початковими умовами

$$u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x),\ x \in \Omega, \tag{2}$$

і крайовими умовами

$$u|_S = 0,\ \frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_S = 0, \tag{3}$$

де ν – зовнішня нормаль до поверхні S, $p > 2, q > 2$.

Введемо простори

$$L^p(\Omega)=\left\{u:\left(\int_\Omega |u|^p\,dx\right)^{1/p}<\infty\right\},$$

$$W_0^{1,q}(\Omega)=\left\{u:u_{x_i}\in L^q(\Omega),\,u|_{\partial\Omega}=0,\,i\in\{1,\dots,n\}\right\}$$

з відповідними нормами

$$\|u\|^p_{L^p(\Omega)}=\int_\Omega |u|^p\,dx,\quad \|u\|^q_{W_0^{1,q}(\Omega)}=\int_\Omega\sum_{i=1}^n|u_{x_i}|^q\,dx;$$

$$L^p_{loc}((0,+\infty);L^p(\Omega))=\left\{u:u\in L^p((0,T_1);L^p(\Omega))\ \forall T_1,\ 0<T_1<+\infty\right\}.$$

Припустимо виконання таких умов:

(A) $$D^\alpha a_{ij}^{sl}\in L^\infty(\Omega),\,a_i,a_{it}\in L^\infty(Q),\,D^\beta a_i(\cdot,0)\in L^\infty(\Omega),\,i,j,s,l\in\{1,\dots,n\},$$

де $D^k=\dfrac{\partial^{|k|}}{\partial^{k_1}x_1\dots\partial^{k_n}x_n}$, $|k|=k_1+\dots+k_n$, $|\alpha|\le 2$, $|\beta|\le 1$, $a_i(x,t)\ge A_1>0$ для майже всіх $(x,t)\in Q$, $i\in\{1,\dots,n\}$,

$$\sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x)\xi_{ij}\xi_{sl}\ge A_2\sum_{i,j=1}^n|\xi_{ij}|^2,\,A_2>0,$$

для майже всіх $x\in\Omega$ і всіх $\xi_{ij}\in R$ таких, що $\xi_{ij}=\xi_{ji}$,

$$a_{ij}^{sl}(x)=a_{sl}^{ij}(x)$$

для майже всіх $x\in\Omega$;

(C) $$c_0,c_{0t}\in L^\infty(Q),$$
$$c_0(x,t)\ge C_0>0$$

для майже всіх $(x,t)\in Q$.

Означення. Узагальненим розв'язком задачі (1)-(3) називаємо функцію $u\in L^\infty_{loc}([0,\infty);H_0^2(\Omega))$ таку, що $u_t\in L^\infty_{loc}([0,\infty);H_0^2(\Omega))\cap L^q_{loc}([0,\infty);W_0^{1,q}(\Omega))\cap L^p_{loc}([0,\infty);L^p(\Omega))$, $u_{tt}\in L^\infty_{loc}([0,\infty);L^2(\Omega))$, яка задовольняє початкові умови (2) та рівність

$$\int_{Q_\tau}\Bigg[u_{tt}v+\sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}v_{x_sx_l}+\sum_{i=1}^n a_i(x,t)|u_{tx_i}|^{q-2}u_{tx_i}v_{x_i}+$$
$$+\sum_{i=1}^n a_i(x,t)|u_{tx_i}|^{q-2}u_{tx_i}v_{x_i}+c_0(x,t)|u_t|^{p-2}u_tv-f(x,t)v\Bigg]dxdt=0 \qquad (4)$$

для всіх $\tau \in (0,+\infty)$ і $v \in L^2_{loc}([0,\infty);H^2_0(\Omega)) \cap L^q_{loc}([0,\infty);W_0^{1,q}(\Omega)) \cap L^p_{loc}([0,\infty);L^p(\Omega))$.

Введемо простір $W_0^{2,r_0}(\Omega)$, де $r_0 = \dfrac{2n(q-1)}{n+2q-4}$ при $n>2$ і $r_0 = 2+\sigma_0$, $\sigma_0 > 0$ при $n \in \{1,2\}$.

Теорема 1. Нехай виконуються умови (А), (С), $f \in L^{r'}((0,T);L^{r'}(\Omega))$, $f_t \in L^2((0,T);L^2(\Omega))$, де $r = \min\{p,q\}, T > 0, u_0 \in H^2_0(\Omega) \cap H^4(\Omega)$, $u_1 \in W_0^{2,r_0}(\Omega) \cap$ $\cap L^{2p-2}(\Omega)$, $p > 2, q > 2$. Тоді в області $Q_{0,T}$ існує узагальнений розв'язок задачі (1)-(3).

Доведення цієї теореми цілком подібне до доведення теореми 1.1 [1, с. 167] з використанням методів Гальоркіна та монотонності.

Введемо функцію

$$y(t) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_t}\left[u_t^2 + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_{x_sx_l}\right]e^{-\mu t}dx,\ \mu > 0.$$

Згідно з означенням $y \in C([0,\infty))$.

Теорема 2. Нехай виконуються умови теореми 1 і, крім того,

$$\int\limits_{Q_{t,t+1}} |f(x,t)|^{r'}\, e^{-\mu t}dxdt \le M_1$$

для довільного $t > 0$ і деякого $\mu > 0, u$ – узагальнений розв'язок задачі (1)-(3). Тоді існує така стала M_2, що $y(t) \le M_2$,

$$\int\limits_{Q_{t,t+1}}\left[\sum_{i=1}^{n}|u_{tx_i}|^q + |u_t|^p\right]e^{-\mu t}dxdt \le M_2 \ \text{ для всіх } t \ge 0.$$

Доведення. Для доведення цієї теореми використаємо методику [1, с. 520].

Розіб'ємо $[0,+\infty)$ на проміжки $[j-1,j], j \in N$ і нехай $t_j \in [j-1,j]$ таке, що $y(t_j) = \sup\limits_{t\in[j-1,j]} y(t)$. З рівняння (1) випливає, що для довільних τ і $t, \tau < t$ виконується рівність

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_t}\left[u_t^2 + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_{x_sx_l}\right]e^{-\mu t}dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\left[\sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_{x_sx_l} + \right.$$
$$\left. + u_t^2\right]e^{-\mu\tau}dx + \frac{\mu}{2}\int\limits_{Q_{\tau,t}}\left[u_t^2 + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_{x_sx_l}\right]e^{-\mu t}dxdt + \qquad (5)$$

$$+\int\limits_{Q_{\tau,t}}\left[\sum_{i=1}^{n}a_i(x,t)\,|\,u_{tx_i}\,|^q\ +c_0(x,t)\,|\,u_t\,|^p\right]e^{-\mu t}dxdt = \int\limits_{Q_{\tau,t}} f(x,t)u_t e^{-\mu t}dxdt.$$

Враховуючи введену функцію y, рівність (5) можемо записати у вигляді

$$y(t)-y(\tau)+\mu\int_{\tau}^{t}y(t)dt+\int\limits_{Q_{\tau,t}}\left[\sum_{i=1}^{n}a_i(x,t)\,|\,u_{tx_i}\,|^q\ +c_0(x,t)\,|\,u_t\,|^p\right]e^{-\mu t}dxdt =$$
$$= \int\limits_{Q_{\tau,t}} f(x,t)u_t e^{-\mu t}dxdt. \tag{6}$$

Очевидно, що

$$\int\limits_{Q_{\tau,t}} f(x,t)u_t e^{-\mu t}dxdt \le \left(\int\limits_{Q_{\tau,t}}|\,f(x,t)\,|^{r'}\ e^{-\mu t}dxdt\right)^{1/r'}\left(\int\limits_{Q_{\tau,t}}|\,u_t\,|^r\ e^{-\mu t}dxdt\right)^{1/r}. \tag{7}$$

Оскільки

$$\int\limits_{Q_{\tau,t}}|\,u_t\,|^r\ e^{-\mu t}dxdt \le \int\limits_{Q_{\tau,t}}\left[\chi\,|\,u_t\,|^p\ +M_3(1-\chi)\sum_{i=1}^{n}a_i(x,t)\,|\,u_{tx_i}\,|^q\right]e^{-\mu t}dxdt \le$$
$$\le M_4\int\limits_{Q_{\tau,t}}\left[\sum_{i=1}^{n}a_i(x,t)\,|\,u_{tx_i}\,|^q\ +c_0(x,t)\,|\,u_t\,|^p\right]e^{-\mu t}dxdt,$$

де $\chi=1$ при $p\ge q$ і $\chi=0$ при $p<q, M_3$ – стала з нерівності Фрідріхса, $M_4>0,$ то з (7) маємо

$$\int\limits_{Q_{\tau,t}} f(x,t)u_t e^{-\mu t}dxdt \le M_5\left(\int\limits_{Q_{\tau,t}}|\,f(x,t)\,|^{r'}\ e^{-\mu t}dxdt\right)^{1/r'}\times$$
$$\times\left(\int\limits_{Q_{\tau,t}}\left[\sum_{i=1}^{n}a_i(x,t)\,|\,u_{tx_i}\,|^q\ +c_0(x,t)\,|\,u_t\,|^p\right]e^{-\mu t}dxdt\right)^{1/r}, M_5>0.$$

Врахувавши останню оцінку, з (6) одержимо нерівність

$$y(t_3)-y(t_1)+\mu\int_{t_1}^{t_3}y(t)dt+M_6\int\limits_{Q_{t_1,t_3}}\left[\sum_{i=1}^{n}a_i(x,t)\,|\,u_{tx_i}\,|^q\ +\right.$$
$$\left.+c_0(x,t)\,|\,u_t\,|^p\ \right]e^{-\mu t}dxdt \le 3\mu_1 M_1, \tag{8}$$

де μ_1 залежить від $r, A_1, C_0,$ $M_6>0.$

Далі доведемо, що

$$y(t_{j+2}) \le \max\{y(t_j); \gamma_0\},$$

де γ_0 – деяка стала. Проведемо доведення для $j = 1$ (його можна повторити для кожного $j > 1$).

Якщо $y(t_3) \le y(t_1)$, то доведення завершено. Тому припустимо, що $y(t_3) - y(t_1) > 0$. Тоді з (8) випливає оцінка (при $t = t_3, \tau = t_1$)

$$\int_{t_1}^{t_3} y(t)dt \le \frac{3\mu_1 M_1}{\mu}.$$

Оскільки $t_3 - t_1 \ge 1$, то існує таке $\tau_0 \in (t_1, t_3)$, що

$$y(\tau_0) \le \frac{3\mu_1 M_1}{\mu}.$$

Отже,

$$y(t_3) - y(t_1) \le 3\mu_1 M_1,$$

$$\int_{Q_{t_1,t_3}} \left[\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t) \mid u_{tx_i} \mid^q + c_0(x,t) \mid u_t \mid^p \right] e^{-\mu t} dxdt \le \frac{3\mu_1 M_1}{M_6}.$$

Застосовуючи тепер (6) для $t = t_3, \tau = \tau_0$, одержимо

$$y(t_3) \le y(\tau_0) + 3\mu_1 M_1 \le 3\mu_1 M_1 \left(\frac{1}{\mu} + 1\right) = \gamma_0.$$

Тому

$$y(t) \le \max\{y(t_1), \gamma_0\} \le \max\{\max_{t \in [0,2]} y(t), \gamma_0\} = M_2, \, t \in [0,3].$$

Крім того,

$$\int_{Q_{t,t+1}} \left[\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t) \mid u_{tx_i} \mid^q + c_0(x,t) \mid u_t \mid^p \right] e^{-\mu t} dxdt \le y(t) +$$

$$\left(\int_{Q_{t,t+1}} \mid f(x,t) \mid^{r'} e^{-\mu t} dxdt \right)^{1/r'} \left(\int_{Q_{t,t+1}} \left[\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t) \mid u_{tx_i} \mid^q + c_0(x,t) \mid u_t \mid^p \right] e^{-\mu t} dxdt \right)^{1/r} \le$$

$$\le M_2 + M_1^{1/r'} \left(\int_{Q_{t,t+1}} \left[\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t) \mid u_{tx_i} \mid^q + c_0(x,t) \mid u_t \mid^p \right] e^{-\mu t} dxdt \right)^{1/r}.$$

Отже,

$$\int\limits_{Q_{t,t+1}} \left[\sum_{i=1}^{n} | u_{tx_i} |^q + | u_t |^p \right] e^{-\mu t} dxdt \le M_7$$

для всіх $t \ge 0, M_7$ – додатна стала.

---

1. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М. – 1972.
2. *Процах Н.* Існування та єдиність розв'язку мішаної задачі для одного параболічного нелінійного рівняння // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2001. – Вип. 59. – С. 148–157.
3. *Процах Н.П.* Мішана задача для нелінійного еволюційного рівняння з другою похідною за часом в узагальнених просторах Лебега // Мат. студії. – 2001. – 16, № 2. – С. 157–168.
4. *Abeyaratne R., Knowles J.K.* Implications of viscosity and strain gradient effects for the kinetics of propagating phase boundaries in solids // SIAM. J. Appl. Math. – 1991. – 51. – P. 1205–1221.
5. *Abeyaratne R., Knowles J.K.* Kinetic relations and propagation of phase boundaries in solids // Arch. Ration. Mech. Anal. – 1991. – 114. – P.119–154.
6. *Rybka P., Hoffmann K.-H.* Convergence of solutions to the equation of quasi-static approximation of viscoelasticity with capillarity // J. Math. Anal. and Appl. – 1998. – 226, No. 1. – P. 61–81.
7. *Slemrod M.* Admissibility criteria for propagating phase boundaries a van der Waals fluid // Arch. Ration. Mech. Anal. – 1983. – P. 37–85.

BEHAVIOR OF SOLUTIONS OF THE MIXED PROBLEM FOR THE PARABOLIC EQUATION OF THE FOURTH ORDER ON THE INFINITY

Halina Torhan

Ivan Franco National University of Lviv,
Universitetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine

In the paper behavior of the generalized solution of the mixed problem for the nonlinear parabolic equation of the fourth order at $t \to \infty$ is estimated.

Key words: mixed problem, parabolic equation.

Стаття надійшла до редколегії 18.04.2008
Прийнята до друку 19.11.2008