ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2008. Вип.68. С.270-275 *Ser.Mech-Math. 2008. Vol.68. P.270-275*

УДК 517.53

ПРО АСИМПТОТИЧНІ ЗНАЧЕННЯ ЦІЛОГО РЯДУ ДІРІХЛЕ СТОСОВНО ЙОГО МАКСИМАЛЬНОГО ЧЛЕНА

Степан ФЕДИНЯК, Мирослав ШЕРЕМЕТА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1

Досліджено умови, за яких цілий ряд Діріхле не має асимптотичних значень стосовно його максимального члена.

Ключові слова: ряд Діріхле, максимальний член, асимптотичні значення.

1. Нехай $0 < \lambda_n \uparrow +\infty$ $(n \to \infty)$, а ряд Діріхле

$$F(s) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}, \quad s = \sigma + it, \tag{1}$$

має абсцису абсолютної збіжності $\sigma_a = +\infty$. Приймемо

$$M(\sigma, F) = \max\{|F(\sigma + it)| \ : \ \ t \in \mathbb{R}\},$$

і нехай $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| \exp\{\sigma\lambda_n\} \ : \ n \geq 0\}$ – максимальний член, а $\nu(\sigma, F) = \max\{n : |a_n| \exp\{\sigma\lambda_n\} = \mu(\sigma, F)\}$ – центральний індекс. Припустимо, що $a_n = |a_n| e^{i\alpha_n}$, $0 \leq \alpha_n < 2\pi$, і приймемо

$$\mu(s) = \mu(s, F) = \mu(\sigma + it, F) = \mu(\sigma, F) \exp\{it\lambda_{\nu(\sigma,F)}\}.$$

Зауважимо, що функція $\mu(s)$ неперервна в кожній вертикальній смузі, де функція $\nu(\mathrm{Re}\, s, F)$ є неперервною.

Нехай $\gamma(\tau)$, $\tau \geq \tau_0$, – неперервна крива така, що $\mathrm{Re}\,\gamma(\tau) \to +\infty$, $\tau \to +\infty$.

Якщо $\lim\limits_{\tau \to +\infty} \dfrac{F(\gamma(\tau))}{\mu(\gamma(\tau))} = \omega$, де $0 \leq |\omega| \leq +\infty$, то будемо говорити, що ω є μ-асимптотичним значенням функції F, крива $\gamma(\tau)$ є μ-асимптотичним шляхом.

Для довільного $l \in (0, +\infty)$ приймемо

$$R_{lt} = \{\tau : \ \mathrm{Re}\ \gamma(t) \leq \mathrm{Re}\ \gamma(\tau) < \mathrm{Re}\ \gamma(t) + l\}.$$

Асимптотичний шлях називатимемо рівномірно коливним, якщо

$$\max_t\{\max_{\tau\in R_{lt}}\{|\mathrm{Im}\ \gamma(\tau)-\mathrm{Im}\ \gamma(t)|\}\}<Q(l)<+\infty$$

для всіх $\tau>\tau_0$. Відповідні асимптотичні значення називатимемо рівномірно коливними.

Припустимо, що в ряді (1) всі $a_n>0$ і $\varkappa_n=\dfrac{\ln\ a_n-\ln\ a_{n+1}}{\lambda_n-\lambda_{n+1}}\nearrow+\infty$ $(n\to\infty)$. В [1] доведено таке: якщо $0<h\leq\lambda_{n+1}-\lambda_n\leq H<+\infty$ і $\overline{\lim}_{n\to\infty}(\varkappa_{n+1}-\varkappa_n)=L>0$, то F не має рівномірно коливних асимптотичних значень.

Наступна теорема доповнює цей результат.

Теорема 1. *Якщо*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_{n+1}-\lambda_n}{\lambda_n-\lambda_{n-1}}=a\in[1,+\infty)\quad i\quad\lim_{n\to\infty}(\lambda_{n+1}-\lambda_n)(\varkappa_{n+1}-\varkappa_n)=b\in(0,+\infty),$$

то F не має асимптотичних значень.

Доведення. Припустимо від супротивного, що F має μ-асимптотичний шлях $\gamma(t)$ і μ-асимптотичне значення ω.

Для кожного n знайдеться такий півінтервал $[t_n;t_n^*)$, що для всіх $t\in[t_n;t_n^*)$ виконується $\varkappa_n\leq\mathrm{Re}\,\gamma(t)<\varkappa_{n+1}$ і $\mathrm{Re}\,\gamma(t_n)=\varkappa_n$, $\mathrm{Re}\,\gamma(t_n^*)=\varkappa_{n+1}$. Для кожного n визначимо єдиний такий інтервал і об'єднання цих інтервалів позначимо через Г.

Для заданого t існує єдине n таке, що $\varkappa_n\leq\mathrm{Re}\,\gamma(t)<\varkappa_{n+1}$. Позначимо

$$V_n=\sup\{|Im\,\gamma(t)|(\lambda_{n+1}-\lambda_n):\ \varkappa_n\leq Re\,\gamma(t)<\varkappa_{n+1}\}.$$

Запишемо

$$\gamma(t)=\varkappa_n+\frac{bc_n(t)+iV_nd_n(t)}{\lambda_{n+1}-\lambda_n},$$

де $c_n(t)$ і $d_n(t)$ – дійсні числа. Тоді $|\mathrm{Im}\,\gamma(t)|=\frac{|d_n(t)|V_n}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}$ і

$$0\leq\mathrm{Re}\,\gamma(t)-\varkappa_n=(1+o(1))(\varkappa_{n+1}-\varkappa_n)c_n(t)\leq\varkappa_{n+1}-\varkappa_n,$$

так що $|d_n(t)|\leq1$ і $0\leq c_n(t)\leq1+o(1),\,n\to\infty$. Якщо приймемо $\gamma_n(t)=c_n(t)+id_n(t)$, то послідовність $(\gamma_n(t))$ обмежена.

Приймемо

$$\Phi_n(w)=\frac{F(\varkappa_n+bw/(\lambda_{n+1}-\lambda_n))}{\mu(\varkappa_n+bw/(\lambda_{n+1}-\lambda_n))}=\frac{F(s)}{\mu(s)},\quad s=\varkappa_n+\frac{bw}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}$$

і покажемо, що $\Phi_n(w)$ рівномірно у вертикальній смузі $\Omega=\{w:0\leq\mathrm{Re}\,w\leq\beta\}$, $1/2<\beta<1$, збігається до несталої аналітичної функції $\Phi(w)$.

Зауважимо, що

$$\varkappa_n\leq\mathrm{Re}\,s=\varkappa_n+\frac{b\mathrm{Re}\,w}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}\leq\varkappa_n+\frac{b\beta}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}=\varkappa_n+(1+o(1))\beta(\varkappa_{n+1}-\varkappa_n)<\varkappa_{n+1}$$

для $n \geq n_0$. Тому $\nu(\mathrm{Re}\, s, F) = n$ і, оскільки

$$a_n = \exp\left\{-\sum_{j=0}^{n-1} \varkappa_j(\lambda_{j+1} - \lambda_j)\right\},$$

то

$$\mu(\mathrm{Re}\, s, F) = a_n \exp\{\lambda_n \mathrm{Re}\, s\} = \exp\left\{-\sum_{j=0}^{n-1} \varkappa_j(\lambda_{j+1} - \lambda_j) + \lambda_n \mathrm{Re}\, s\right\}.$$

Звідси випливає, що

$$\Phi_n(w) = \frac{F(\varkappa_n + bw/(\lambda_{n+1} - \lambda_n))}{\mu(\varkappa_n + bw/(\lambda_{n+1} - \lambda_n))} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \exp\left\{\sum_{j=k}^{n-1} \varkappa_j(\lambda_{j+1} - \lambda_j) - (\lambda_n - \lambda_k)\left(\varkappa_n + \frac{bw}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}\right)\right\} + 1 +$$

$$+ \sum_{k=n+1}^{\infty} \exp\left\{-\sum_{j=n}^{k-1} \varkappa_j(\lambda_{j+1} - \lambda_j) + (\lambda_k - \lambda_n)\left(\varkappa_n + \frac{bw}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}\right)\right\} =$$

$$= \sum_{m=-n}^{-1} \exp\left\{\sum_{j=n+m}^{n-1} \varkappa_j(\lambda_{j+1} - \lambda_j) + (\lambda_{n+m} - \lambda_n)\varkappa_n + \frac{\lambda_{n+m} - \lambda_n}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} bw\right\} + 1 +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left\{-\sum_{j=n}^{n+m-1} \varkappa_j(\lambda_{j+1} - \lambda_j) + (\lambda_{n+m} - \lambda_n)\varkappa_n + \frac{\lambda_{n+m} - \lambda_n}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} bw\right\}. \qquad (2)$$

Рівність (2) можна записати у вигляді

$$\Phi_n(w) = \sum_{m=-n}^{+\infty} \exp\left\{b_{n,m} + (\lambda_{n+m} - \lambda_n)\varkappa_n + \frac{\lambda_{n+m} - \lambda_n}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} bw\right\}, \qquad (3)$$

де $b_{n,m} = \sum\limits_{j=n+m}^{n-1} \varkappa_j(\lambda_{j+1} - \lambda_j)$ для $m < 0$, $b_{n,m} = -\sum\limits_{j=n}^{n+m-1} \varkappa_j(\lambda_{j+1} - \lambda_j)$ для $m > 0$ і $b_{n,m} = 0$ для $m = 0$.

Оскільки для $0 \leq \mathrm{Re}\, w \leq \beta$ і $m < 0$

$$b_{n,m} + (\lambda_{n+m} - \lambda_n)\varkappa_n + \frac{\lambda_{n+m} - \lambda_n}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} b \mathrm{Re}\, w \leq$$

$$\leq \sum_{j=n+m}^{n-1} \varkappa_j(\lambda_{j+1} - \lambda_j) + (\lambda_{n+m} - \lambda_n)\varkappa_n = -\sum_{j=n+m}^{n-1} (\varkappa_n - \varkappa_j)(\lambda_{j+1} - \lambda_j) \leq$$

$$\leq -\sum_{j=n+m}^{n-1} b_1 = m b_1,$$

де стала $b_1 \in (0,\, b)$, $b_{n,1} + (\lambda_{n+1} - \lambda_n)\varkappa_n + b\mathrm{Re}\, w = b\mathrm{Re}\, w \le b\beta$, а для $m > 1$

$$\begin{aligned}
& b_{n,m} + (\lambda_{n+m} - \lambda_n)\varkappa_n + \frac{\lambda_{n+m} - \lambda_n}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} b\mathrm{Re}\, w = \\
& = -\sum_{j=n}^{n+m-1} \varkappa_j (\lambda_{j+1} - \lambda_j) + (\lambda_{n+m} - \lambda_n)\left(\varkappa_n + \frac{b\mathrm{Re}\, w}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}\right) = \\
& = -\sum_{j=n+1}^{n+m-1} \left(\varkappa_j - \varkappa_n - \frac{b\mathrm{Re}\, w}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}\right)(\lambda_{j+1} - \lambda_j) + b\mathrm{Re}\, w \le \\
& \le -\sum_{j=n+1}^{n+m-1} (\varkappa_j - \varkappa_{n+1})(\lambda_{j+1} - \lambda_j) + b\beta \le -\sum_{j=n+2}^{n+m-1} (\varkappa_j - \varkappa_{j-1})(\lambda_{j+1} - \lambda_j) + b\beta = \\
& = -\sum_{j=n+2}^{n+m-1} (\varkappa_j - \varkappa_{j-1})(\lambda_j - \lambda_{j-1}) \frac{\lambda_{j+1} - \lambda_j}{\lambda_j - \lambda_{j-1}} + b\beta \le \\
& \le -\sum_{j=n+2}^{n+m-1} b_1 a_1 + b\beta = -(m-2) b_1 a_1 + b\beta,
\end{aligned}$$

де сталі b_1, a_1 такі, що $0 < b_1 < b$, $0 < a_1 < a$, то ряд (3) мажорується збіжним рядом

$$\sum_{m=-\infty}^{-1} \exp\{m b_1\} + 1 + \exp\{b\beta\} + \sum_{m=2}^{+\infty} \exp\{-(m-2) b_1 a_1 + b\beta\}$$

і, отже, за теоремою Вейєрштрасса ряд (2) абсолютно і рівномірно збіжний стосовно $n \in \mathbb{N}$ і $w \in \Omega$ до аналітичної в Ω функції Φ, причому

$$\Phi(w) = \lim_{n\to\infty} \Phi_n(w) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \lim_{n\to\infty} \exp\left\{ b_{m,n} + (\lambda_{n+m} - \lambda_n)\varkappa_n + \frac{\lambda_{n+m} - \lambda_n}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} bw \right\}.$$

Нехай $m > 0$. Тоді

$$\begin{aligned}
& b_{m,n} + (\lambda_{n+m} - \lambda_n)\varkappa_n = -\sum_{j=n}^{n+m-1} \varkappa_j (\lambda_{j+1} - \lambda_j) + \varkappa_n \sum_{j=n}^{n+m-1} (\lambda_{j+1} - \lambda_j) = \\
& = -\sum_{j=n}^{n+m-1} (\varkappa_j - \varkappa_n)(\lambda_{j+1} - \lambda_j) = -\sum_{j=n+1}^{n+m-1} (\varkappa_j - \varkappa_n)(\lambda_{j+1} - \lambda_j) = \\
& = -\sum_{j=n+1}^{n+m-1} \sum_{k=n}^{j-1} (\varkappa_{k+1} - \varkappa_k)(\lambda_{k+1} - \lambda_k) \prod_{p=k+1}^{j} \frac{\lambda_{p+1} - \lambda_p}{\lambda_p - \lambda_{p-1}}
\end{aligned}$$

і, якщо $a > 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} (b_{m,n} + (\lambda_{n+m} - \lambda_n)\varkappa_n) = -\sum_{j=n+1}^{n+m-1} \sum_{k=n}^{j-1} b a^{j-k} =$$

$$= -ab\sum_{j=n+1}^{n+m-1}\frac{a^{j-n}-1}{a-1} = \frac{-ab}{a-1}\left(\sum_{j=n+1}^{n+m-1}a^{j-n}-m+1\right) =$$

$$= \frac{-ab}{a-1}\left(a\frac{a^{m-1}-1}{a-1}-m+1\right) = \frac{-ab}{(a-1)^2}(a^m-m(a-1)-1), \tag{4}$$

якщо $a=1$, то

$$\lim_{n\to\infty}(b_{m,n}+(\lambda_{n+m}-\lambda_n)\varkappa_n) = -b\sum_{j=n+1}^{n+m-1}(j-n) = -\frac{bm(m-1)}{2}. \tag{5}$$

Нехай тепер $m<0$. Тоді, як вище,

$$b_{m,n}+(\lambda_{n+m}-\lambda_n)\varkappa_n = -\sum_{j=n+m}^{n-1}\sum_{k=j}^{n-1}(\varkappa_{k+1}-\varkappa_k)(\lambda_{k+1}-\lambda_k)\prod_{p=j+1}^{k}\frac{\lambda_{p+1}-\lambda_p}{\lambda_p-\lambda_{p-1}}$$

і, якщо $a>1$, то

$$\lim_{n\to\infty}(b_{m,n}+(\lambda_{n+m}-\lambda_n)\varkappa_n) = -b\sum_{j=n+m}^{n-1}\sum_{k=j}^{n-1}\left(\frac{1}{a}\right)^{j-k} = -b\sum_{j=n+1}^{n-1}\frac{1-(1/a)^{n-j}}{1-1/a} =$$

$$= -\frac{-ab}{a-1}\left(-m-\sum_{j=n+1}^{n-1}a^{j-n}\right) = \frac{-ab}{a-1}\left(-m-\sum_{l=1}^{|m|}a^{-l}\right) =$$

$$= \frac{-ab}{a-1}\left(-m-\frac{1}{a}\frac{1-(1/a)^{|m|}}{1-1/a}\right) = \frac{-ab}{(a-1)^2}(a^m-m(a-1)-1),$$

тобто маємо (4), якщо $a=1$, то

$$\lim_{n\to\infty}(b_{m,n}+(\lambda_{n+m}-\lambda_n)\varkappa_n) = -b\sum_{j=n+m}^{n-1}(n-j) = -\frac{b|m|(|m|+1)}{2} = -\frac{bm(m-1)}{2},$$

тобто маємо (5).

Далі, для $m>0$ у випадку $a>1$

$$\frac{\lambda_{n+m}-\lambda_n}{\lambda_{n+1}-\lambda_n} = \sum_{j=n}^{n+m-1}\prod_{k=n+1}^{j}\frac{\lambda_{k+1}-\lambda_k}{\lambda_k-\lambda_{k-1}} \to \sum_{k=0}^{m-1}a^k = \frac{a^m-1}{a-1}, \quad n\to\infty,$$

а у випадку $a=1$ маємо $\frac{\lambda_{n+m}-\lambda_n}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}\to m$, $n\to\infty$. Подібно для $m<0$ у випадку $a>1$

$$\frac{\lambda_{n+m}-\lambda_n}{\lambda_{n+1}-\lambda_n} = -\sum_{j=n+m}^{n-1}\prod_{k=j+1}^{n}\frac{\lambda_{k+1}-\lambda_k}{\lambda_k-\lambda_{k-1}} \to -\sum_{k=-m}^{1}(1/a)^k = \frac{a^m-1}{a-1}, \quad n\to\infty,$$

а у випадку $a=1$ маємо $\frac{\lambda_{n+m}-\lambda_n}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}\to m$, $n\to\infty$.

Тому з огляду на (4) і (5), якщо $a > 1$, то

$$\Phi(w) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \exp\left\{ \frac{-ab}{(a-1)^2}(a^m - m(a-1) - 1) + \frac{b(a^m-1)}{a-1} w \right\},$$

якщо $a = 1$, то $\Phi(w) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \exp\left\{ \frac{-bm(m-1)}{2} + bmw \right\}$. Звідси випливає, що $\Phi(w) \not\equiv \mathrm{const}$.

Нехай T – множина граничних точок $\{\gamma_n(t)\}$ при $t \to \infty$. Покажемо, що в T існує незліченна множина, на якій $\Phi(w)$ константа.

Справді, нехай Σ це перетин Ω з дійсною віссю, введемо відображення $\xi : \Sigma \to T$ задане так. Для кожного $x \in \Sigma$ існує t_n таке, що $\mathrm{Re}\,\gamma(t_n) = = \varkappa_n + \frac{bx}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}$, тобто $\mathrm{Re}\,\gamma_n(t_n) = x$. Візьмемо граничну точку v послідовності $\{\gamma_n(t_n)\}$ і приймемо $\xi(x) = v$. Тоді ξ є однозначною функцією у розумінні $\mathrm{Re}\,\xi(x) = x$. Тому T є незліченною як і Σ.

Припустимо, що $\gamma_n(t_k) \to y \in T$ на деякій послідовності $\{t_k\}$. З рівномірної збіжності отримуємо, що $\Phi_n(\gamma_n(t_k)) \to \Phi(y)$. Ми припустили, що ω є μ-асимптотичним значенням і, отже, $\Phi(y) = \omega$. Звідси випливає, що Φ є сталою на T, а це суперечність. Отож, F не має μ-асимптотичних значень.

---

1. *Fedynyak S.I.* Asymptotic values of entire Dirichlet series with respect to its maximal term / *Fedynyak S.I., Sheremeta, M.M.* // Matem. Studii. – 2003. – Vol. 19, №1. – P. 31-36.

ASYMPTOTIC VALUES OF ENTIRE DIRICHLET SERIES WITH RESPECT TO ITS MAXIMAL TERM

Stepan FEDYNYAK, Myroslav SHEREMETA

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka str., 1

For an entire Dirichlet series $F(s) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}$, $s = \sigma + it$, with the maximal term $\mu(\sigma, F)$ and the central index $\nu(\sigma, F)$ we investigate the behaviour of $F(\gamma(\tau))/\mu(\gamma(\tau))$ as $\tau \to +\infty$, where $\mu(s) = \mu(\sigma, F)\exp\{it\lambda_{\nu(\sigma,F)}\}$ and $\gamma(\tau)$ is a continuous curve such that $\mathrm{Re}\,\gamma(t) \to +\infty$ as $\tau \to +\infty$.

Key words: entire Dirichlet series, maximal term, asymptotic values.

Стаття надійшла до редколегії 02.07.2007

Прийнята до друку 22.10.2008