ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2008. Вип. 68. С. 246-252 *Ser.Mech-Math. 2008. Vol. 68. P. 246-252*

УДК 539.3

АНТИПЛОСКА ЗАДАЧА ДЛЯ ТРІЩИНИ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОЇ ДО МЕЖІ ПОДІЛУ ДВОХ АНІЗОТРОПНИХ ПІВПРОСТОРІВ

Георгій СУЛИМ, Андрій ЦАП

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1

Досліджено вплив межі поділу матеріалів на сингулярне поле напружень біля вершин фронту тріщини та коефіцієнти інтенсивності напружень залежно від розташування тріщини і відносної жорсткості матеріалів, у випадку антиплоскої задачі для вільної від зовнішніх навантажень тріщини, розташованої перпендикулярно до межі поділу двох анізотропних півпросторів з різних матеріалів. Тріщина моделюється неперервно розподіленими гвинтовими дислокаціями уздовж її осі з наперед невідомим вектором Бюргерса. Оскільки береги тріщини вільні від навантаження, то крайова умова на поверхні тріщини дає змогу отримати сингулярне інтегральне рівняння стосовно шуканої густини вектора Бюргерса. Обчислення проведено з використанням методу колокацій. На підставі отриманих числових даних побудовано придатну для інженерних обчислень, аналітичну апроксимаційну формулу залежності коефіцієнта інтенсивності напружень від двох параметрів її відносної жорсткості півпросторів і відносної відстані між тріщиною та межею поділу матеріалів.

Ключові слова: кусково-однорідне середовище, антиплоска задача, анізотропія, тріщина, коефіцієнти інтенсивності напружень.

1. Одним з головних типів руйнування є руйнування третього типу, спричинене поздовжнім зсувом чи зрізуванням від кручення. Застосування структурнонеоднорідних ізотропних та анізотропних матеріалів (кусково-однорідних, композиційних) суттєво ускладнює аналіз напружено-деформованого стану композицій з тріщинами та вивчення їхнього граничного стану. Тому ця проблема привертає увагу щораз більшої кількості дослідників. Зокрема в [1] одержано асимптотичні вирази для напружень біля кінця тріщини, перпендикулярної до межі поділу матеріалів і розташованої якзавгодно близько до неї. У праці [2] отримано аналітичний вираз для напружень, коли тріщина перпендикулярна до межі поділу півпросторів і розташована симетрично стосовно неї. Досліджено також плоску задачу для тріщини, що перетинає межу поділу матеріалів [3,4]. У згаданих працях розглядали ізотропні матеріали. Мета нашої праці – дослідити вплив анізотропії на коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН) у задачі поздовжнього зсуву про тріщину, перпендикулярну до межі поділу двох анізотропних матеріалів. У випадку ортотропних матеріалів будують апроксимаційну формулу для нього залежну від відносної жорсткості півпросторів і розташування тріщини.

2. Побудова сингулярного інтегрального рівняння задачі. Розглядають віднесене до системи координат $Oxyz$ суцільне кусково-однорідне середовище, яке складається з двох анізотропних півпросторів S_k (рис. 1) з різними пружними властивостями, що характеризуються коефіцієнтами податності a_{44k}, a_{55k}, a_{45k} $(k = 1, 2)$. Площина xOz збігається з площиною поділу матеріалів. Тунельна тріщина з вільними від навантажень берегами завширшки $2a$ лежить у площині yOz і її нижній фронт розташований на відстані c від поверхні поділу. Композиція перебуває в умовах поздовжнього зсуву вздовж осі Oz під впливом однорідного поля напружень на нескінченності $\sigma_{xz}^{\infty} = \tau_k$ $(z \in S_k)$, $\sigma_{yz}^{\infty} = \tau$.

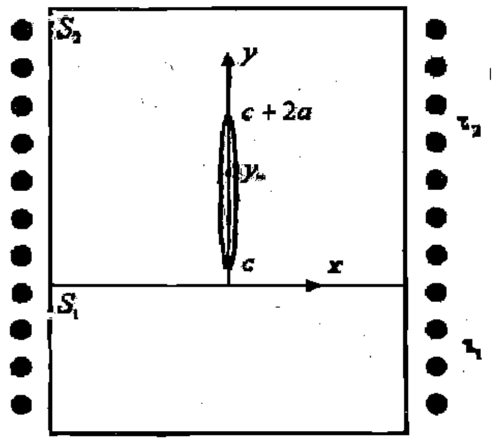

Рис. 1: Схема задачі

Для побудови розв'язку задачі спочатку вилучимо тріщину з розгляду і розглянемо розв'язок задачі про навантаження бездефектного кусково-однорідного середовища $S_1 \cup S_2$ згаданим напруженням $\sigma_{xz}^{\infty} = \tau_k$ $(z \in S_k)$, $\sigma_{yz}^{\infty} = \tau$ та гвинтовою дислокацією з вектором Бюргерса b_6 у точці $z_* = iy_* \in S_2$. Використання того самого позначення для осі аплікат і комплексної змінної $z = x + iy$ в антиплоскій задачі загальновживане і не призводить до непорозумінь. Згадане навантаження породжує поле напружень

$$\hat{\sigma}(z) = \left\| \hat{\sigma}_{yz}(z),\, \frac{\partial w(z)}{\partial z} \right\| = \frac{r_k - r_l}{r_k + r_l} \left[\overline{\mathbf{G}_{kk}^0}\left(z^k\right) - \mathbf{G}_{ll}^0\left(z^k\right) \right] \mathbf{M}^{kk} +$$

$$+ \sigma^{\infty} + \mathbf{G}_{22}^0\left(z^k\right) \mathbf{M}^{kk} \qquad (z \in S_k; \quad k = 1, 2; \quad l = 3 - k), \tag{1}$$

де

$$\hat{\sigma}^{\infty} = \left\|\tau,\, w^k\right\| \ \left(w^k = a_{45k}\tau + a_{55k}\tau_k\right), \qquad \mathbf{G}^0_{ll}\left(z^k\right) = \left\|G_l\left(z^k\right),\, \overline{G_l\left(z^k\right)}\right\|,$$

$$G_l\left(z^k\right) = \frac{b_6}{4\pi i r_l}\cdot\frac{1}{z^k - z^l_*}, \qquad z^k_* = x^k_* + iy^k_* = x_* + s^k y_*, \qquad \mathbf{G}^0_{11}\left(z^k\right) = 0,$$

$$\mathbf{M}^{kj} = \left\|M^{kj}_{mn}\right\|, \quad M^{kj}_{m1} = -1, \quad M^{kj}_{12} = r_k, \quad M^{kj}_{22} = -r_j, \quad s^k = s^k_1 + is^k_2,$$

$$s^k_1 = \frac{a_{45k}}{a_{55k}}, \quad s^k_2 = \frac{\left|r^k\right|}{a_{55k}}, \quad r_k = \sqrt{\left(a_{45k}\right)^2 - a_{44k}a_{55k}} = i\left|r_k\right|.$$

Вважаємо, що параметр r_k характеризує жорсткість матеріалу півпростору.

Використовуючи співвідношення (1), запишемо вирази для компоненти тензора напружень $\sigma_{yz}(z)$ і похідної переміщення $\partial w(z)/\partial z$ у півпросторі $(z \in S_2)$

$$\sigma_{yz}\left(z\right) = \tau - \frac{b_6}{4\pi i r_2}\left[\frac{1}{z^2 - s^2 y_*} + \frac{r_2 - r_1}{r_1 + r_2}\frac{1}{z^2 - \overline{s^2} y_*} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\overline{z^2} - \overline{s^2} y_*} + \frac{r_2 - r_1}{r_1 + r_2}\frac{1}{\overline{z^2} - s^2 y_*}\right],$$
$$\frac{\partial w\left(z\right)}{\partial x} = w^2 + \frac{b_6}{4\pi i r_2} r_2\left[\frac{1}{z^2 - s^2 y_*} + \frac{r_2 - r_1}{r_1 + r_2}\frac{1}{z^2 - \overline{s^2} y_*} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{\overline{z^2} - \overline{s^2} y_*} - \frac{r_2 - r_1}{r_1 + r_2}\frac{1}{\overline{z^2} - s^2 y_*}\right] \quad \left(z \in S_2\right). \tag{2}$$

На підставі виразу (2) та закону Гука

$$\sigma_{xz}\left(z\right) = -\frac{a_{45k}}{a_{55k}}\sigma_{yz}\left(z\right) + \frac{1}{a_{55k}}\frac{\partial w\left(z\right)}{\partial x}, \quad \left(z \in S_k, \quad k = 1, 2\right) \tag{3}$$

отримано вираз для другої ненульової компоненти тензора напружень

$$\sigma_{xz}\left(z\right) = \tau_2 + \frac{b_6\left(y_*\right)}{2\pi i r_2}\ \mathrm{Re}\left[\frac{s^2}{z^2 - s^2 y_*} + \frac{r_2 - r_1}{r_1 + r_2}\frac{s^2}{z^2 - \overline{s^2} y_*}\right] \quad \left(z \in S_2\right). \tag{4}$$

Тріщину, перпендикулярну до межі поділу матеріалів, моделюємо неперервно розподіленими гвинтовими дислокаціями уздовж відрізка $y_* = [c, 2a + c]$, $x_* = 0$ з наперед невідомим вектором Бюргерса $b_6\left(y_*\right)$ [1, 2, 5]. У цьому випадку напруження σ_{xz} у довільній точці середовища дорівнюють

$$\sigma_{xz}\left(z\right) = \tau_2 + \frac{1}{2\pi i r_2}\int\limits_{c}^{c+2a} b_6\left(y_*\right)\ \mathrm{Re}\left[\frac{s^2}{z^2 - s^2 y_*} + \frac{r_2 - r_1}{r_1 + r_2}\frac{s^2}{z^2 - \overline{s^2} y_*}\right] dy_*. \tag{5}$$

Оскільки береги тріщини вільні від навантаження, то крайова умова на поверхні тріщини

$$\sigma^{\pm}_{xz}\left(iy\right) = 0, \qquad y \in [c;\, 2a + c] \tag{6}$$

дає змогу отримати сингулярне інтегральне рівняння

$$\frac{1}{2\pi i r_2}\int\limits_{c}^{c+2a} b_6\left(y_*\right)\ \mathrm{Re}\left[\frac{1}{y-y_*}+\frac{r_2-r_1}{r_1+r_2}\frac{s^2}{s^2y-\overline{s^2}y_*}\right]dy_*=-\tau_2,\quad y\in[c;\,2a+c] \tag{7}$$

стосовно шуканої густини вектора Бюргерса $b_6\left(y_*\right)$.

Після заміни змінних

$$p=y_*-c-a,\quad t=y-c-a,\quad b_6\left(y_*\right)=b_6\left(p+c+a\right)\equiv b\left(p\right) \tag{8}$$

сингулярне інтегральне рівняння (7) набуде вигляду

$$B\frac{1}{\pi}\int\limits_{-a}^{a}\frac{b\left(p\right)}{p-t}dp+\int\limits_{-a}^{a}K\left(p,t\right)b\left(p\right)dp=F\left(t\right), \tag{9}$$

де

$$B=\frac{1}{2ir_2},\ F(t)=\tau_2,\ K\left(p,t\right)=\frac{1}{2\pi i r_2}\ \mathrm{Re}\left[\frac{r_2-r_1}{r_1+r_2}\frac{s^2}{\overline{s^2}\left(p+c+a\right)-s^2\left(t+c+a\right)}\right]. \tag{10}$$

Умови однозначності зміщень під час обходу навколо тріщини запишемо так [6]:

$$\int\limits_{-a}^{a}b_6\left(y_*\right)dy_*=0. \tag{11}$$

Коефіцієнт інтенсивності напружень визначаємо функцією $b\left(p\right)$ так [5, с. 237]:

$$K_3=\mp\sqrt{\frac{\pi}{2}}\lim_{p\to\mp a}\left[\sqrt{|p\pm a|}b\left(p\right)\right]. \tag{12}$$

3. Числові результати. Для прикладу досліджено залежність КІН від жорсткості матеріалів півпросторів і геометрії розташування тріщини за дії однорідного поля напружень на нескінченності $\sigma_{xz}^{\infty}=\tau_k$ $\left(\sigma_{yz}^{\infty}=0\right)$. Зазначимо, що напруження σ_{yz}^{∞} за такої геометрії задачі не впливають на КІН. Обчислення КІН ґрунтується на залежності

$$K_3=\frac{\sqrt{\pi a}}{2\left|r_2\right|}\sum_{n=0}^{N}\left(\pm 1\right)^n A_n, \tag{13}$$

де A_n – коефіцієнти розвинення густини розподілу вектора Бюргерса за ортогональними поліномами з виділеною кореневою особливістю

$$b\left(p\right)=\frac{1}{\sqrt{1-\left(p/a\right)^2}}\sum_{n=0}^{N}A_nT_n\left(\frac{p}{a}\right). \tag{14}$$

Тут $T_n\left(x\right)$ – поліноми Чебишова першого роду.

Розглядали такі типи кусково-однорідної матриці:

- 1) верхній півпростір (в якому є тріщина) жорсткіший від нижнього;
- 2) верхній півпростір – податніший;
- 3) півпростір без тріщини – абсолютно жорсткий, тобто півпростір з тріщиною защемлений на своїй межі ($1/a_{441} \to \infty, \quad 1/a_{551} \to \infty$);
- 4) тріщина розташована перпендикулярно до вільної межі півпростору – півпростір S_1 абсолютно податний ($1/a_{441} \to 0, \quad 1/a_{551} \to 0$).

Обчислення проводили за схемою застосування методу колокацій [7], до розв'язування системи (9), (11) з точністю до п'яти значущих цифр. При $0,005 \leqslant c/a < 0,01$ кількість N членів ряду розвинення вектора Бюргерса за ортогональними поліномами $N = 80$; при $0,01 \leqslant c/a \leqslant 0,05$ – $N = 40$; при $0,05 < c/a$ достатньо взяти $N = 20$.

На рис.2 зображено графічну залежність зведеного КІН $K_3^0 \equiv K_3/\sqrt{\pi a}\tau_2$ на нижньому фронті тріщини від відносної відстані між ним і межею поділу матеріалів $l = c/a$. На рис. 3 показано графічну залежність K_3^0 від відносної жорсткості матеріалів $r = r_2/r_1$.

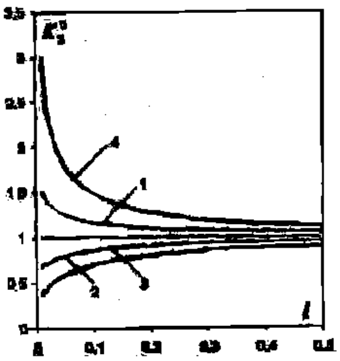

Рис. 2: Залежність КІН K_3^0 від відстані тріщини до межі поділу

На підставі отриманих числових даних була побудована придатна для інженерних обчислень аналітична апроксимаційна формула для зведеного КІН K_3^0, залежна від двох параметрів – відносної жорсткості півпросторів r і відносної відстані між тріщиною і межею поділу матеріалів l

$$K_3^0(r, l) = [K_1(l) - K_2(l)]\, e^{-d(l) r^{p(r)}} + K_2(l)\,, \tag{15}$$

де

$$d(l) = \ln\left[\frac{K_1(l) - K_2(l)}{1 - K_2(l)}\right], \quad p(r) = 0,4e^{-r} + 0,5, \quad K_i(l) = b_i e^{-(l-0.003)^{p_i} a_i} + 1,$$

$$b_1 = 3,581, \quad b_2 = -0,755, \quad a_1 = 4,626, \quad a_2 = 3,138, \quad p_1 = 0,367, \quad p_2 = 0,543.$$

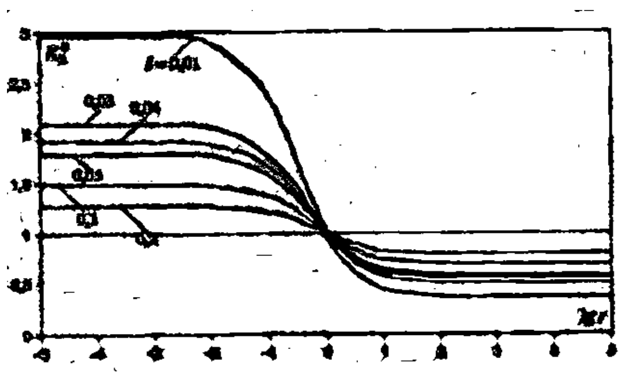

Рис. 3: Залежність КІН K_3^0 від відносної жорсткості складових матриці

Відносна похибка цієї наближеної формули не перевищує 6% при $0,001 \leqslant c/a \leqslant 0,01$, 4% при $0,001 < c/a < 0,1$ і 2% при $c/a \geqslant 0,1$.

Отримані результати дають змогу дійти таких висновків.

1. З віддаленням тріщини від межі поділу зведений КІН K_1^0 наближається до 1, що й властиве тріщині в однорідній матриці.

2. Зведений КІН тріщини у жорсткішому півпросторі завжди більший за одиницю, причому з наближенням до межі поділу з податнішим матеріалом він збільшується.

3. Чим більша різниця між пружними властивостями півпросторів, тим більше значення K_1^0 за фіксованої геометрії задачі про тріщину у жорсткішому півпросторі.

4. При прямуванні тріщини до межі з абсолютно податним півпростором (вільна межа півпростору) КІН прямує до ∞.

5. Якщо тріщина прямує до абсолютно жорсткої межі, то КІН прямує до нуля.

6. Якщо тріщина розміщена у податнішому півпросторі, то висновки 2-3 набувають якісно протилежного змісту.

1. *Atkinson C.* On the stress intensity factors associated with crack interacting with an interface between two elastic media / *Atkinson C.* // Eng. Sci. – 1975. – Vol.13, №5. – P. 489-504.
2. *Atkinson C.* On cracks and screw dislocations pile ups crossing a biomaterial interface / *Atkinson C.* // Journal of Elasticity. – 1973. – Vol. 3, №1. – P. 15-22.
3. *Kasano H.* Singular Stress Field at the Tips of a Crack Normal to Bimaterial of Isotropic Half Planes / *Kasano H., Watanabe T., Nakahara I.* // Bull. of JSME. – 1986. – Vol. 29, №258. – P. 4043-4049.
4. *Erdogan F.* Two bounded half planes with a crack going through the interface / *Erdogan F., Biricikoglu V.* // Int. J. Eng. Sci. – 1973. – P. 745-766.

5. *Божидарник В.В.* Елементи теорії пластичності та міцності. Том 1 / *Божидарник В.В., Сулим Г.Т.* – Львів: Світ, 1999. – 528 с.
6. *Божидарник В.В.* Двовимірні задачі теорії пружності й термопружності структурно-неоднорідних тіл / *Божидарник В.В.* – Львів: Світ, 1998. – 227 с.
7. *Божидарник В.В.* Метод колокацій розв'язування системи сингулярних інтегральних рівнянь / *Божидарник В.В., Сулим Г.Т.* // Вісн. Львів. політехн. ін-ту. – 1990. – Вип. 242. – С. 8-13.

ANTIPLANE PROBLEM OF TWO ANISOTROPIC HALF-SPACES WITH A CRACK PERPENDICULAR TO BIMATERIAL INTERFACE

Georgiy SULYM, Andriy TSAP

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka str., 1

An antiplane problem of two half-spaces consisting of different anisotropic material is considered. It is assumed that one of half-spaces contains an unloaded crack normal to bimaterial interface. The influence of bimaterial interface on singular stress field at the tips of a crack and stress intensity factor which depends of crack position and comparative hardness of materials is investigated. In the analisys the crack is replaced by a continuous distribution of dislocations along the crack line with initially unknown density of Burger's vector. Using the free stress condition on the crack surface, we obtain singular integral equation on unknown density of Burger's vector. Calculations were realized by the colocation method. On basis of obtained numerical results it was built analitycal approximate formula for sterss intensity factor which depends on two parameters – comparative hardness of half-spaces and comparative distance between the crack and bimaterial interface. This formula is useful for engineering estimations.

Key words: bimaterial, antiplane problem, anisotrophy, crack, stress intensity factor.

Стаття надійшла до редколегії 21.04.2005

Прийнята до друку 22.10.2008