ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат. 2008. Вип.68. С.231-245 Ser.Mech-Math. 2008. Vol.68. P.231-245

УДК 517.95

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З НЕВІДОМИМИ МОЛОДШИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ В ОБЛАСТІ З ВІЛЬНОЮ МЕЖЕЮ

Галина СНІТКО

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
79060, Львів, вул. Наукова, 3б

Визначено умови локального існування та єдиності класичного розв'язку оберненої задачі для параболічного рівняння з невідомими залежними від часу молодшими коефіцієнтами в області з вільною межею.

Ключові слова: обернена задача, функція Гріна, вільна межа, параболічне рівняння.

Задача, яку розглядаємо в цій праці, поєднує два типи задач: коефіцієнтну обернену задачу та задачу з вільною межею. Шуканими одночасно є залежні від часу молодші коефіцієнти в одновимірному параболічному рівнянні та функції, що задають межу області. За допомогою теореми Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора знайдено умови локального існування класичного розв'язку задачі. Доведення єдиності ґрунтується на властивостях розв'язків однорідних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду. Зазначимо, що в [1] досліджено обернену задачу для параболічного рівняння з невідомим залежним від часу старшим коефіцієнтом в області з двома невідомими ділянками межі. Задачу визначення старшого коефіцієнта та коефіцієнта при першій похідній невідомої функції в параболічному рівнянні в області з відомою межею розглянуто в [2]. Умови коректної розв'язності оберненої задачі для параболічного рівняння з невідомими коефіцієнтами при старшій похідній та при невідомій функції отримано в [3].

В області $\Omega_T = \{(x,t):\ h_1(t) < x < h_2(t),\ 0 < t < T\}$, де $x = h_1(t)$, $x = h_2(t)$ – невідомі функції, розглянемо обернену задачу визначення коефіцієнтів $b = b(t)$, $c = c(t)$ в параболічному рівнянні

$$u_t = a(x,t)u_{xx} + b(t)u_x + c(t)u + f(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega_T, \tag{1}$$

за початкової умови

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in [h_1(0), h_2(0)], \tag{2}$$

крайових умов

$$u(h_1(t),t) = \mu_1(t), \qquad u(h_2(t),t) = \mu_2(t), \qquad t \in [0,T], \tag{3}$$

та умов перевизначення

$$\begin{gathered} h_1'(t) = u_x(h_1(t),t) + \mu_3(t), \quad h_2'(t) = -u_x(h_2(t),t) + \mu_4(t), \\ \int\limits_{h_1(t)}^{h_2(t)} u(x,t)dx = \mu_5(t), \quad \int\limits_{h_1(t)}^{h_2(t)} x\, u(x,t)dx = \mu_6(t), \qquad t \in [0,T], \end{gathered} \tag{4}$$

де $h_1(0) = h_{01}$ – задане число.

Заміною змінних $y = \dfrac{x - h_1(t)}{h_2(t) - h_1(t)}$, $t = t$ зводимо задачу (1)-(4) до оберненої з невідомими $(h_1(t), h_3(t), b(t), c(t), v(y,t))$, де $v(y,t) = u(yh_3(t) + h_1(t),t)$, $h_3(t) = h_2(t) - h_1(t)$, в області з фіксованими межами $Q_T = \{(y,t) : \ 0 < y < 1, \ 0 < t < T\}$:

$$\begin{aligned} v_t = \frac{a(yh_3(t) + h_1(t),t)}{h_3^2(t)} v_{yy} + \frac{b(t) + h_1'(t) + y\, h_3'(t)}{h_3(t)} v_y + c(t)\, v + \\ + f(yh_3(t) + h_1(t),t), \quad (y,t) \in Q_T, \end{aligned} \tag{5}$$

$$v(y,0) = \varphi(yh_3(0) + h_{01}), \quad y \in [0,1], \tag{6}$$

$$v(0,t) = \mu_1(t), \qquad v(1,t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{7}$$

$$h_1'(t) = \frac{v_y(0,t)}{h_3(t)} + \mu_3(t), \quad h_3'(t) = -\frac{v_y(0,t) + v_y(1,t)}{h_3(t)} + \mu_4(t) - \mu_3(t), \quad t \in [0,T], \tag{8}$$

$$h_3(t) \int\limits_0^1 v(y,t)dy = \mu_5(t), \quad h_1(t)\mu_5(t) + h_3^2(t) \int\limits_0^1 y\, v(y,t)dy = \mu_6(t), \quad t \in [0,T]. \tag{9}$$

Умови існування єдиного розв'язку задачі (5)-(9) містяться в такій теоремі.

Теорема 1. *Якщо виконуються умови*

1) $a \in C^{2,0}([h_{01}, \infty) \times [0,T])$, $f \in C^{1,0}([h_{01}, \infty) \times [0,T])$, $\varphi \in C^1[h_{01}, \infty)$, $\mu_i \in C^1[0,T]$, $i = 1,2,5,6$, $\mu_j \in C[0,T]$, $j = 3,4$;

2) $a(x,t) > 0$, $f(x,t) \geq 0$, $(x,t) \in [h_{01}, \infty) \times [0,T]$, $\varphi(x) \geq \varphi_0 > 0$, $x \in [h_{01}, \infty)$, $\mu_i(t) > 0$, $i = 1,2,5$, $\mu_2(t) - \mu_1(t) \geq 0$, $\mu_5(t) - H_1\, \mu_2(t) > 0$, $t \in [0,T]$, *де* $H_1 = 2 \max\limits_{[0,T]} \mu_5(t) (\min \{ \min\limits_{[h_{01}, h_{02}]} \varphi(x), \ \min\limits_{[0,T]} \mu_1(t), \ \min\limits_{[0,T]} \mu_2(t) \})^{-1}$,
$h_{02} = h_2(0)$ *є розв'язком рівняння* $\int_{h_{01}}^{h_2(0)} \varphi(x)dx = \mu_5(0)$;

3) $\varphi(h_{01}) = \mu_1(0)$, $\varphi(h_{02}) = \mu_2(0)$,

то можна навести таке число $T_0 : 0 < T_0 \le T$, *яке визначається вихідними даними, що існує єдиний розв'язок* $(h_1, h_3, b, c, v) \in (C^1[0, T_0])^2 \times (C[0, T_0])^2 \times C^{2,1}(Q_{T_0}) \cap \cap C^{1,0}(\overline{Q}_{T_0})$, $h_3(t) > 0$, $t \in [0, T]$, *задачі (5)-(9).*

Доведення. З умов (2), (4) і припущень теореми випливає існування єдиного значення $h_2(0) = h_{02}$, яке задовольняє рівняння $\int_{h_{01}}^{h_2(0)} \varphi(x)dx = \mu_5(0)$. Позначимо $h_{03} = h_{02} - h_{01}$. Доведення існування розв'язку задачі (5)-(9) ґрунтується на використанні теореми Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. Зведемо задачу (5)-(9) до системи рівнянь. Тимчасово припустивши, що функції $h_1(t)$, $h_3(t)$, $b(t)$, $c(t)$ відомі, пряму задачу (5)-(7) зводимо до рівняння

$$v(y,t) = v_0(y,t) + \int_0^t \int_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau)\left(\frac{b(\tau) + h_1'(\tau) + \eta\, h_3'(\tau)}{h_3(\tau)} v_\eta(\eta,\tau) + \right.$$

$$\left. + c(\tau)v(\eta,\tau)\right) d\eta d\tau, \quad (y,t) \in \overline{Q}_T, \tag{10}$$

де $G_1(y,t,\eta,\tau)$ – функція Гріна першої крайової задачі для рівняння

$$v_t = \frac{a(yh_3(t) + h_1(t), t)}{h_3^2(t)}\, v_{yy},$$

а $v_0(y,t)$ має вигляд [4]

$$v_0(y,t) = \int_0^1 G_1(y,t,\eta,0)\,\varphi(\eta h_{03} + h_{01})d\eta - \int_0^t G_{1\eta}(y,t,1,\tau)\,\frac{a(h_3(\tau) + h_1(\tau),\tau)}{h_3^2(\tau)}\mu_2(\tau)\,d\tau +$$

$$+ \int_0^t G_{1\eta}(y,t,0,\tau)\,\frac{a(h_1(\tau),\tau)}{h_3^2(\tau)}\mu_1(\tau)\,d\tau + \int_0^t \int_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau)\, f(\eta h_3(\tau) + h_1(\tau),\tau)\,d\eta\, d\tau.$$

Введемо позначення $w(y,t) = v_y(y,t)$. З умов (8) матимемо

$$h_1'(t) = \frac{w(0,t)}{h_3(t)} + \mu_3(t), \quad h_3'(t) = -\frac{w(0,t) + w(1,t)}{h_3(t)} + \mu_4(t) - \mu_3(t). \tag{11}$$

Враховуючи (11), перепишемо (10) у вигляді

$$v(y,t) = v_0(y,t) + \int_0^t \int_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau)\left[\left(\frac{b(\tau) + \eta\mu_4(\tau) + (1-\eta)\mu_3(\tau)}{h_3(\tau)} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\eta w(1,\tau) + (\eta - 1)w(0,\tau)}{h_3^2(\tau)}\right) w(\eta,\tau) + c(\tau)v(\eta,\tau)\right] d\eta d\tau, \quad (y,t) \in \overline{Q}_T. \tag{12}$$

З умов (9) отримаємо

$$h_3(t) = \frac{\mu_5(t)}{\int_0^1 v(y,t)dy}, \quad t \in [0,T], \tag{13}$$

$$h_1(t) = \frac{\mu_6(t)}{\mu_5(t)} - \frac{h_3^2(t)}{\mu_5(t)} \int_0^1 yv(y,t)dy, \quad t \in [0,T]. \tag{14}$$

Продиференціювавши умови (9) за t і використавши (5), (11), одержимо

$$\begin{aligned} b(t) = \Big[\int_0^1 \big((\mu_6(t)-(yh_3(t)+h_1(t))\mu_5(t))a_x(yh_3(t)+h_1(t),t)-\mu_5(t)a(yh_3(t)+h_1(t),t)\big)\times \\ \times w(y,t)dy + \frac{(\mu_2(t)-a(h_3(t)+h_1(t),t))(\mu_6(t)-(h_3(t)+h_1(t))\mu_5(t))}{h_3(t)}w(1,t)+ \\ +\frac{(\mu_1(t)+a(h_1(t),t))(\mu_6(t)-h_1(t)\mu_5(t))}{h_3(t)}w(0,t)-h_3(t)\int_0^1(\mu_6(t)-(yh_3(t)+h_1(t))\times \\ \times\mu_5(t))f(yh_3(t)+h_1(t),t)dy+(\mu_6(t)-h_1(t)\mu_5(t))(\mu_1(t)\mu_3(t)-\mu_2(t)\mu_4(t))+ \\ +h_3(t)\mu_2(t)\mu_4(t)\mu_5(t)+\mu_5'(t)\mu_6(t)-\mu_5(t)\mu_6'(t)\Big]\big(\mu_5(t)(\mu_5(t)-h_3(t)\mu_2(t))+ \\ +(\mu_2(t)-\mu_1(t))(\mu_6(t)-h_1(t)\mu_5(t))\big)^{-1}, \quad t\in[0,T], \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} c(t)=\Big[\int_0^1 \big(((y-1)h_3(t)\mu_2(t)-yh_3(t)\mu_1(t)+\mu_5(t))a_x(yh_3(t)+h_1(t),t)+(\mu_2(t)-\mu_1(t))\times \\ \times a(yh_3(t)+h_1(t),t)\big)w(y,t)dy+\frac{(\mu_2(t)-a(h_3(t)+h_1(t),t))(\mu_5(t)-h_3(t)\mu_1(t))}{h_3(t)}w(1,t)+ \\ +\frac{(\mu_1(t)+a(h_1(t),t))(\mu_5(t)-h_3(t)\mu_2(t))}{h_3(t)}w(0,t)-h_3(t)\int_0^1((y-1)h_3(t)\mu_2(t)+\mu_5(t)- \\ -yh_3(t)\mu_1(t))f(yh_3(t)+h_1(t),t)dy+(\mu_6'(t)-h_1(t)\mu_5'(t))(\mu_2(t)-\mu_1(t))-(h_3(t)\mu_2(t)- \\ -\mu_5(t))(\mu_1(t)\mu_3(t)-\mu_2(t)\mu_4(t)+\mu_5'(t))\Big]\big(\mu_5(t)(\mu_5(t)-h_3(t)\mu_2(t))+(\mu_2(t)-\mu_1(t))\times \\ \times(\mu_6(t)-h_1(t)\mu_5(t))\big)^{-1}, \quad t\in[0,T]. \end{aligned} \tag{16}$$

Випишемо задачу для знаходження $w(y,t)$. Для цього продиференціюємо рівняння (5) і умову (6) за y та використаємо (7)

$$\begin{aligned} w_t = \frac{a(yh_3(t)+h_1(t),t)}{h_3^2(t)}w_{yy} + \frac{a_x(yh_3(t)+h_1(t),t)+b(t)+h_1'(t)+y\,h_3'(t)}{h_3(t)}w_y+ \\ +\left(\frac{h_3'(t)}{h_3(t)}+c(t)\right)w+h_3(t)f_x(yh_3(t)+h_1(t),t), \quad (y,t)\in Q_T, \\ w(y,0)=h_{03}\varphi'(yh_{03}+h_{01}), \quad y\in[0,1], \end{aligned} \tag{17}$$

$$w_y(0,t) = \frac{h_3^2(t)}{a(h_1(t),t)}\left[\mu_1'(t) - f(h_1(t),t) - c(t)\mu_1(t) - \frac{b(t)+h_1'(t)}{h_3(t)}\,w(0,t)\right],\ t\in[0,T],$$

$$w_y(1,t) = \frac{h_3^2(t)}{a(h_3(t)+h_1(t),t)}\left[\mu_2'(t) - f(h_3(t)+h_1(t),t) - c(t)\mu_2(t) - \right.$$
$$\left. - \frac{b(t)+h_1'(t)+h_3'(t)}{h_3(t)}\,w(1,t)\right],\ t\in[0,T].$$

Задача (17) у випадку довільних неперервних на $[0,T]$ функцій $h_1(t)$, $h_3(t)$, $h_1'(t)$, $h_3'(t)$, $b(t), c(t)$ еквівалентна рівнянню

$$w(y,t) = h_{03}\int_0^1 G_2(y,t,\eta,0)\,\varphi'(\eta h_{03}+h_{01})d\eta -$$
$$-\int_0^t G_2(y,t,0,\tau)\left[\mu_1'(\tau) - f(h_1(\tau),\tau) - c(\tau)\mu_1(\tau) - \frac{b(\tau)+h_1'(\tau)}{h_3(\tau)}\,w(0,\tau)\right]d\tau +$$
$$+\int_0^t G_2(y,t,1,\tau)\left[\mu_2'(\tau) - f(h_3(\tau)+h_1(\tau),\tau) - c(\tau)\mu_2(\tau) - \frac{b(\tau)+h_1'(\tau)+h_3'(\tau)}{h_3(\tau)}w(1,\tau)\right]d\tau +$$
$$+\int_0^t\int_0^1 G_2(y,t,\eta,\tau)\left[f_x(\eta h_3(\tau)+h_1(\tau),\tau)h_3(\tau) + \left(\frac{h_3'(\tau)}{h_3(\tau)} + c(\tau)\right)w(\eta,\tau) + \right.$$
$$\left. + \frac{b(\tau)+h_1'(\tau)+\eta h_3'(\tau)}{h_3(\tau)}w_\eta(\eta,\tau)\right]d\eta\,d\tau, \tag{18}$$

де $G_2(y,t,\eta,\tau)$ – функція Гріна другої крайової задачі для рівняння

$$w_t = \frac{a(yh_3(t)+h_1(t),t)}{h_3^2(t)}\,w_{yy} + \frac{a_x(yh_3(t)+h_1(t),t)}{h_3(t)}w_y.$$

Провівши інтегрування частинами в останньому інтегралі (18) та використавши (11), подамо (18) у вигляді

$$w(y,t) = w_0(y,t) + \int_0^t\int_0^1 \left[G_2(y,t,\eta,\tau)c(\tau) - G_{2\eta}(y,t,\eta,\tau)\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{b(\tau)+\eta\mu_4(\tau)+(1-\eta)\mu_3(\tau)}{h_3(\tau)} - \frac{\eta w(1,\tau)+(\eta-1)w(0,\tau)}{h_3^2(\tau)}\right)\right]w(\eta,\tau)d\eta\,d\tau, \tag{19}$$

$(y,t)\in\overline{Q}_T$, де $w_0(y,t)$ визначається формулою

$$w_0(y,t) = h_{03}\int_0^1 G_2(y,t,\eta,0)\,\varphi'(\eta h_{03}+h_{01})d\eta - \int_0^t G_2(y,t,0,\tau)(\mu_1'(\tau) - f(h_1(\tau),\tau) -$$

$$-c(\tau)\mu_1(\tau))d\tau + \int_0^t G_2(y,t,1,\tau)(\mu_2'(\tau) - f(h_3(\tau)+h_1(\tau),\tau) - c(\tau)\mu_2(\tau))d\tau +$$
$$+\int_0^t\int_0^1 G_2(y,t,\eta,\tau)h_3(\tau)f_x(\eta h_3(\tau)+h_1(\tau),\tau)d\eta\, d\tau.$$

Отже, задачу (5)-(9) зведено до системи інтегральних рівнянь (12)-(16), (19) з невідомими $(v(y,t),h_3(t),h_1(t),b(t),c(t),w(y,t))$. Якщо $(h_1(t),\ h_3(t),\ b(t),\ c(t),\ v(y,t))$ є розв'язком задачі (5)-(9), то функції $(v(y,t),h_3(t),h_1(t),b(t),c(t),w(y,t))$ є неперервним розв'язком системи (12)-(16), (19).

Покажемо, що правильним є і обернене твердження. Нехай $(v(y,t),h_3(t),h_1(t),$ $b(t),c(t),w(y,t))$ – неперервний розв'язок системи рівнянь (12)-(16), (19). На підставі (12) можемо зробити висновок, що функція $v(y,t)\in C^{2,1}(Q_T)\cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$ задовольняє рівняння

$$v_t = \frac{a(yh_3(t)+h_1(t),t)}{h_3^2(t)}\,v_{yy} + c(t)\,v + \left(\frac{b(t)+y\mu_4(t)+(1-y)\mu_3(t)}{h_3(t)} - \right.$$
$$\left. - \frac{yw(1,t)+(y-1)w(0,t)}{h_3^2(t)}\right)w(y,t) + f(yh_3(t)+h_1(t),t) \tag{20}$$

та умови (6), (7). Позначимо $z(y,t)=v_y(y,t)$. Випишемо задачу для знаходження $z(y,t)$. Згідно з умовами теореми можемо продиференціювати (19) за y. Продиференціювавши рівняння (20) і умову (6) за y та використавши (7), одержимо

$$z_t = \frac{a(yh_3(t)+h_1(t),t)}{h_3^2(t)}\,z_{yy} + \frac{a_x(yh_3(t)+h_1(t),t)}{h_3(t)}z_y + c(t)z + \left(\frac{\mu_4(t)-\mu_3(t)}{h_3(t)} - \right.$$
$$\left. - \frac{w(1,t)+w(0,t)}{h_3^2(t)}\right)w(y,t) + \left(\frac{b(t)+y\mu_4(t)+(1-y)\mu_3(t)}{h_3(t)} - \right.$$
$$\left. - \frac{yw(1,t)+(y-1)w(0,t)}{h_3^2(t)}\right)w_y(y,t) + h_3(t)f_x(yh_3(t)+h_1(t),t), \quad (y,t)\in Q_T,$$
$$z(y,0) = h_{03}\varphi'(yh_{03}+h_{01}), \quad y\in[0,1], \tag{21}$$
$$z_y(0,t) = \frac{h_3^2(t)}{a(h_1(t),t)}\left[\mu_1'(t) - c(t)\mu_1(t) - f(h_1(t),t) - \left(\frac{b(t)+\mu_3(t)}{h_3(t)} + \frac{w(0,t)}{h_3^2(t)}\right)w(0,t)\right],$$
$$z_y(1,t) = \frac{h_3^2(t)}{a(h_3(t)+h_1(t),t)}\left[\mu_2'(t) - c(t)\mu_2(t) - f(h_3(t)+h_1(t),t) - \left(\frac{b(t)+\mu_4(t)}{h_3(t)} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{w(1,t)}{h_3^2(t)}\right)w(1,t)\right], \quad t\in[0,T].$$

За допомогою функції Гріна $G_2(y,t,\eta,\tau)$ задачу (21) зводимо до рівняння

$$z(y,t) = h_{03}\int_0^1 G_2(y,t,\eta,0)\,\varphi'(\eta h_{03}+h_{01})d\eta - \int_0^t G_2(y,t,0,\tau)(\mu_1'(\tau) - c(\tau)\mu_1(\tau) -$$

$$-f(h_1(\tau),\tau))d\tau+\int\limits_0^t G_2(y,t,1,\tau)(\mu_2'(\tau)-c(\tau)\mu_2(\tau)-f(h_3(\tau)+h_1(\tau),\tau))d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_2(y,t,\eta,\tau)(c(\tau)z(\eta,\tau)+h_3(\tau)f_x(\eta h_3(\tau)+h_1(\tau),\tau))d\eta\,d\tau-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{2\eta}(y,t,\eta,\tau)\times$$

$$\times\left(\frac{b(\tau)+\eta\mu_4(\tau)+(1-\eta)\mu_3(\tau)}{h_3(\tau)}-\frac{\eta w(1,\tau)+(\eta-1)w(0,\tau)}{h_3^2(\tau)}\right)w(\eta,\tau)d\eta\,d\tau.$$

Віднімаючи від отриманої рівності (19), одержимо однорідне інтегральне рівняння Вольтерра другого роду стосовно $z(y,t)-w(y,t)$, звідки робимо висновок, що $v_y(y,t)=w(y,t)$, і, отже, $v(y,t)$ задовольняє рівняння

$$v_t=\frac{a(yh_3(t)+h_1(t),t)}{h^2(t)}\,v_{yy}+\left(\frac{b(t)+y\mu_4(t)+(1-y)\mu_3(t)}{h_3(t)}-\right.$$
$$\left.-\frac{yv_y(1,t)+(y-1)v_y(0,t)}{h_3^2(t)}\right)v_y+c(t)\,v+f(yh_3(t)+h_1(t),t). \qquad (22)$$

Залишилось довести виконання умов (8), (9). Рівності (13), (14) збігаються з умовами (9). Подамо (15), (16) у вигляді

$$b(t)(\mu_2(t)-\mu_1(t))+c(t)\mu_5(t)=\int\limits_0^1 a_x(yh_3(t)+h_1(t),t)v_y(y,t)dy+\frac{a(h_1(t),t)}{h_3(t)}v_y(0,t)+$$

$$+\frac{\mu_2(t)-a(h_3(t)+h_1(t),t)}{h_3(t)}v_y(1,t)-h_3(t)\int\limits_0^1 f(yh_3(t)+h_1(t),t)dy+\mu_5'(t)+$$

$$+\mu_1(t)\mu_3(t)-\mu_2(t)\mu_4(t), \qquad (23)$$

$$b(t)(h_3(t)\mu_2(t)-\mu_5(t))+c(t)(\mu_6(t)-h_1(t)\mu_5(t))=\int\limits_0^1(yh_3(t)a_x(yh_3(t)+h_1(t),t)+$$
$$+a(yh_3(t)+h_1(t),t))v_y(y,t)dy+(\mu_2(t)-a(h_3(t)+h_1(t),t))v_y(1,t)-$$
$$-h_3^2(t)\int\limits_0^1 yf(yh_3(t)+h_1(t),t)dy+\mu_6'(t)-h_1(t)\mu_5'(t)-h_3(t)\mu_2(t)\mu_4(t). \qquad (24)$$

Продиференціюємо рівності (13), (14) за t та використаємо те, що функція $v(y,t)$ задовольняє рівняння (22). Від отриманих рівностей віднявши (23), (24), одержимо

$$\left(h_3'(t)+\frac{v_y(1,t)+v_y(0,t)}{h_3(t)}-\mu_4(t)+\mu_3(t)\right)\frac{\mu_5(t)}{h_3(t)}=0,$$

$$\left(h_1'(t) - \frac{v_y(0,t)}{h_3(t)} - \mu_3(t)\right)\mu_5(t) = 0.$$

Звідси робимо висновок, що $(h_3, h_1) \in (C^1[0,T])^2$ і $v(y,t)$ задовольняє умови (8) та рівняння (5).

Отже, еквівалентність задачі (5)-(9) та системи рівнянь (12)-(16), (19) доведено.

Для оцінки знаменника в (15), (16) знайдемо оцінки функцій $v(y,t)$ та $h_3(t)$. Використовуючи принцип максимуму [5] для розв'язку рівняння

$$v_{0t} = \frac{a(yh_3(t) + h_1(t), t)}{h_3^2(t)} v_{0yy} + f(yh_3(t) + h_1(t), t),$$

що задовольняє умови (6), (7), одержимо

$$v_0(y,t) \geq \min\{\min_{[h_{01},h_{02}]} \varphi(x),\ \min_{[0,T]} \mu_1(t),\ \min_{[0,T]} \mu_2(t)\} \equiv M_1 > 0,$$

$$v_0(y,t) \leq \max\{\max_{[h_{01},h_{02}]} \varphi(x), \max_{[0,T]} \mu_1(t), \max_{[0,T]} \mu_2(t), \max_{[h_{01},\infty)\times[0,T]} f(x,t)\} \equiv M_2, (y,t) \in \overline{Q}_T.$$

Згідно з умовами теореми з (12) можемо зробити висновок про існування такого числа $t_1 : 0 < t_1 \leq T$, що $v(y,t) \geq \frac{M_1}{2} \equiv M_3 > 0$, $y \in [0,1]$, $t \in [0,t_1]$. Тоді з (13) отримаємо

$$h_3(t) \leq \frac{1}{M_3} \max_{[0,T]} \mu_5(t) \equiv H_1, \qquad t \in [0,t_1]. \tag{25}$$

Подамо знаменник в (15), (16) у вигляді

$$\mu_5(t)(\mu_5(t) - h_3(t)\mu_2(t)) + (\mu_2(t) - \mu_1(t))(\mu_6(t) - h_1(t)\mu_5(t)) =$$

$$= \mu_5(t)(\mu_5(t) - h_3(t)\mu_2(t)) + (\mu_2(t) - \mu_1(t))h_3^2(t) \int_0^1 yv(y,t)dy.$$

Тоді $\mu_5(t)(\mu_5(t) - h_3(t)\mu_2(t)) + (\mu_2(t) - \mu_1(t))(\mu_6(t) - h_1(t)\mu_5(t)) \geq \mu_5(t)(\mu_5(t) - H_1\mu_2(t))$, $t \in [0,t_1]$.

Знайдемо оцінки розв'язків системи (12)-(16), (19). Враховуючи оцінку функції $v(y,t)$, з (14) знаходимо

$$|h_1(t)| \leq \frac{\mu_6(t)}{\mu_5(t)} + \frac{\mu_5(t)}{\int_0^1 v(y,t)dy} \leq H_2, \qquad t \in [0,t_1]. \tag{26}$$

Позначимо $V(t) = \max_{y\in[0,1]} |v(y,t)|$, $W(t) = \max_{y\in[0,1]} |w(y,t)|$. З (13) матимемо

$$h_3(t) \geq \frac{1}{V(t)} \min_{[0,T]} \mu_5(t), \quad t \in [0,T]. \tag{27}$$

Оскільки для функції $v(y,t)$ виконується рівність $v(y,t) = \mu_1(t) + \int_0^y w(\xi,t)d\xi$, то звідси отримаємо

$$V(t) \leq C_1 + C_2W(t), \quad t \in [0,T]. \tag{28}$$

Згідно з оцінками (25) - (28) з (15), (16) отримаємо

$$|b(t)| \le C_3 + C_4 W(t) + C_5 W^2(t), \quad |c(t)| \le C_6 + C_7 W(t) + C_8 W^2(t), \quad t \in [0, t_1]. \quad (29)$$

Використовуючи оцінки функції Гріна [5] та (25), з (19) одержимо таку нерівність:

$$W(t) \le C_9 + C_{10} \int_0^t \left(W(\tau) + \frac{1}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} \right) |c(\tau)| d\tau + C_{11} \int_0^t \left(\frac{|b(\tau)|}{h_3(\tau)} + \right.$$
$$\left. + \frac{W(\tau)}{h_3^2(\tau)} \right) \frac{W(\tau)}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} d\tau, \quad t \in [0, t_1], \quad (30)$$

де $\theta(t) = \int\limits_0^t \frac{d\sigma}{h_3^2(\sigma)}$. Враховуючи вигляд функції $\theta(t)$, оцінки (25), (27)-(29) та ввівши позначення $W_1(t) = W(t) + 1$, з (30) отримаємо

$$W_1(t) \le C_{12} + C_{13} \int_0^t \frac{W_1^4(\tau)}{\sqrt{t - \tau}} d\tau, \quad t \in [0, t_1]. \quad (31)$$

Піднесемо обидві частини нерівності до четвертого степеня та використаємо нерівність Гельдера $W_1^4(t) \le C_{14} + C_{15} \int\limits_0^t \frac{W_1^{16}(\tau)}{\sqrt{t - \tau}} d\tau$. Замінивши t на σ, домножимо попередню нерівність на $\frac{1}{\sqrt{t-\sigma}}$ та проінтегруємо від 0 до t

$$\int_0^t \frac{W_1^4(\sigma)}{\sqrt{t - \sigma}} d\sigma \le C_{16} + C_{15} \int_0^t \frac{d\sigma}{\sqrt{t - \sigma}} \int_0^\sigma \frac{W_1^{16}(\tau) d\tau}{\sqrt{\sigma - \tau}}.$$

Змінивши порядок інтегрування в другому доданку правої частини нерівності, одержимо

$$\int_0^t \frac{W_1^4(\sigma)}{\sqrt{t - \sigma}} d\sigma \le C_{16} + C_{17} \int_0^t W_1^{16}(\tau) d\tau. \quad (32)$$

Підставивши (32) в (31), отримаємо

$$W_1(t) \le C_{18} + C_{19} \int_0^t W_1^{16}(\tau) d\tau, \quad t \in [0, t_1].$$

Розв'язавши цю нерівність, матимемо $W(t) \le M_4 < \infty$, $t \in [0, t_2]$, де t_2, $0 < t_2 \le t_1$, визначається сталими C_{18}, C_{19}. Враховуючи це в (29), одержимо

$$|b(t)| \le C_3 + C_4 M_4 + C_5 M_4^2 \equiv B_1, \quad |c(t)| \le C_6 + C_7 M_4 + C_8 M_4^2 \equiv B_2, \quad t \in [0, t_2].$$

Використовуючи (27), (28), з (12) матимемо

$$|v(y,t)| \leq M_2 + C_{20} \int\limits_0^t (|c(\tau)| + (|b(\tau)| + 1)W(\tau) + (1 + W(\tau))W^2(\tau))(1 + W(\tau)).$$

Звідси отримаємо

$$|v(y,t)| \leq M_2 + C_{21}(B_2 + (B_1 + 1)M_4 + (1 + M_4)M_4^2)(1 + M_4) \equiv M_5, \quad t \in [0, t_2].$$

Тоді з (27) одержимо

$$h_3(t) \geq \frac{1}{M_5} \min_{[0,T]} \mu_5(t) \equiv H_3 > 0, \quad t \in [0, t_2].$$

Отже, апріорні оцінки розв'язків системи (12)-(16), (19) знайдено.

Подамо систему (12)-(16), (19) у вигляді операторного рівняння

$$\omega = P\omega,$$

де $\omega = (v(y,t), h_3(t), h_1(t), b(t), c(t), w(y,t))$, а оператор $P = (P_1, ..., P_6)$ визначають правими частинами рівнянь (12)-(16), (19). Побудуємо множину N так, щоб оператор P переводив N в себе.

Візьмемо довільні (v, h_3, h_1, b, c, w), для яких правильні вище знайдені оцінки. Використаємо (30) для оцінки правої частини (19)

$$|P_6 w| \leq C_9 + C_{22} t + C_{23} \sqrt{t}.$$

Вибираючи число $t_3, 0 < t_3 \leq T$, так, щоб виконувалась нерівність $C_9 + C_{22} t_3 + C_{23}\sqrt{t_3} \leq M_4$, отримаємо

$$|P_6 w| \leq M_4, \quad (y,t) \in [0,1] \times [0, t_3].$$

Позначимо $N = \{(v, h_3, h_1, b, c, w) \in C(\overline{Q}_{T_0}) \times (C[0,T_0])^4 \times C(\overline{Q}_{T_0})$: $M_3 \leq v(y,t) \leq M_5$, $H_3 \leq h_3(t) \leq H_1$, $|h_1(t)| \leq H_2$, $|b(t)| \leq B_1$, $|c(t)| \leq B_2$, $|w(y,t)| \leq M_4\}$, де $T_0 = \min\{t_2, t_3\}$. Очевидно, що множина N задовольняє умови теореми Шаудера, а оператор P переводить N в себе. Компактність операторів, що утворюють P, доведено в [6]. Тоді за теоремою Шаудера існує розв'язок $(v(y,t), h_3(t), h_1(t), b(t), c(t), w(y,t))$ системи рівнянь (12)-(16), (19) з класу $C(\overline{Q}_{T_0}) \times (C[0,T_0])^4 \times C(\overline{Q}_{T_0})$, а отже, і розв'язок $(h_1(t), h_3(t), b(t), c(t), v(y,t))$ з класу $(C^1[0,T_0])^2 \times (C[0,T_0])^2 \times C^{2,1}(Q_{T_0}) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_{T_0})$ задачі (5)-(9).

Доведемо єдиність розв'язку задачі (5)-(9). Нехай $(h_{1i}(t), h_{3i}(t), b_i(t), c_i(t), v_i(y,t))$, $i = 1, 2$, – два розв'язки задачі (5)-(9). Позначимо

$$\frac{b_i(t)}{h_{3i}(t)} = p_i(t), \qquad \frac{h'_{1i}(t)}{h_{3i}(t)} = q_i(t), \qquad \frac{h'_{3i}(t)}{h_{3i}(t)} = s_i(t), \quad i = 1, 2,$$
$$p(t) = p_1(t) - p_2(t), \quad q(t) = q_1(t) - q_2(t), \quad s(t) = s_1(t) - s_2(t),$$

$$c(t) = c_1(t) - c_2(t), \quad v(y,t) = v_1(y,t) - v_2(y,t).$$

Функції $p(t)$, $q(t)$, $s(t)$, $c(t)$, $v(y,t)$ задовольняють рівняння

$$v_t = \frac{a(yh_{31}(t) + h_{11}(t),t)}{h_{31}^2(t)} v_{yy} + (p_1(t) + q_1(t) + ys_1(t))v_y + c_1(t)v +$$
$$+ \left(\frac{a(yh_{31}(t) + h_{11}(t),t)}{h_{31}^2(t)} - \frac{a(yh_{32}(t) + h_{12}(t),t)}{h_{32}^2(t)} \right) v_{2yy} + (p(t) + q(t) + ys(t))v_{2y} +$$
$$+ c(t)v_2 + f(yh_{31}(t) + h_{11}(t),t) - f(yh_{32}(t) + h_{12}(t),t), \quad (y,t) \in Q_T, \tag{33}$$

та умови

$$v(y,0) = 0, \quad y \in [0,1], \quad v(0,t) = v(1,t) = 0, \quad t \in [0,T], \tag{34}$$

$$h'_{11}(t) - h'_{12}(t) = \frac{v_y(0,t)}{h_{31}(t)} + \left(\frac{1}{h_{31}(t)} - \frac{1}{h_{32}(t)} \right) v_{2y}(0,t),$$
$$h'_{31}(t) - h'_{32}(t) = -\frac{v_y(0,t) + v_y(1,t)}{h_{31}(t)} - \left(\frac{1}{h_{31}(t)} - \frac{1}{h_{32}(t)} \right) (v_{2y}(0,t) + v_{2y}(1,t)),$$
$$\int_0^1 v(y,t)dy = \mu_5(t) \left(\frac{1}{h_{31}(t)} - \frac{1}{h_{32}(t)} \right),$$
$$\int_0^1 yv(y,t)dy = (\mu_6(t) - h_{11}(t)\mu_5(t)) \left(\frac{1}{h_{31}^2(t)} - \frac{1}{h_{32}^2(t)} \right) - \frac{\mu_5(t)}{h_{32}(t)} (h_{11}(t) - h_{12}(t)). \tag{35}$$

За допомогою функції Гріна $G_1^*(y,t,\eta,\tau)$ для рівняння

$$v_t = \frac{a(yh_{31}(t) + h_{11}(t),t)}{h_{31}^2(t)} v_{yy} + (p_1(t) + q_1(t) + ys_1(t))v_y + c_1(t)v$$

з врахуванням умов (34) функцію $v(y,t)$ подамо в такому вигляді:

$$v(y,t) = \int_0^t \int_0^1 G_1^*(y,t,\eta,\tau) \left[\left(\frac{a(\eta h_{31}(\tau) + h_{11}(\tau),\tau)}{h_{31}^2(\tau)} - \frac{a(\eta h_{32}(\tau) + h_{12}(\tau),\tau)}{h_{32}^2(\tau)} \right) \times \right.$$
$$\times v_{2\eta\eta}(\eta,\tau) + (p(\tau) + q(\tau) + \eta s(\tau))v_{2\eta}(\eta,\tau) + c(\tau)v_2(\eta,\tau) + f(\eta h_{31}(\tau) + h_{11}(\tau),\tau) -$$
$$\left. - f(\eta h_{32}(\tau) + h_{12}(\tau),\tau) \right] d\eta d\tau, \ (y,t) \in \overline{Q}_T. \tag{36}$$

Оскільки для $h'_{1i}(t)$, $h'_{3i}(t)$, $b_i(t)$, $c_i(t)$, $i = 1,2$, справджуються рівності аналогічні (11), (15), (16), то звідси отримаємо

$$q(t) = \frac{v_y(0,t)}{h_{31}^2(t)} + \left(\frac{1}{h_{31}^2(t)} - \frac{1}{h_{32}^2(t)} \right) v_{2y}(0,t) + \mu_3(t) \left(\frac{1}{h_{31}(t)} - \frac{1}{h_{32}(t)} \right), \ t \in [0,T], \tag{37}$$

$$s(t)=-\frac{v_y(0,t)+v_y(1,t)}{h_{31}^2(t)}-\left(\frac{1}{h_{31}^2(t)}-\frac{1}{h_{32}^2(t)}\right)(v_{2y}(0,t)+v_{2y}(1,t))+$$
$$+(\mu_4(t)-\mu_3(t))\left(\frac{1}{h_{31}(t)}-\frac{1}{h_{32}(t)}\right),\quad t\in[0,T], \tag{38}$$

$$p(t)=\Big[\int_0^1\big((\mu_6(t)-(yh_{31}(t)+h_{11}(t))\mu_5(t))a_x(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)-a(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)\times$$
$$\times\mu_5(t)\big)v_{1y}(y,t)dy+\frac{(\mu_2(t)-a(h_{31}(t)+h_{11}(t),t))(\mu_6(t)-(h_{31}(t)+h_{11}(t))\mu_5(t))}{h_{31}(t)}v_{1y}(1,t)+$$
$$+\frac{(\mu_1(t)+a(h_{11}(t),t))(\mu_6(t)-h_{11}(t)\mu_5(t))}{h_{31}(t)}v_{1y}(0,t)+h_{31}(t)\int_0^1((yh_{31}(t)+h_{11}(t))\mu_5(t)-$$
$$-\mu_6(t))f(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)dy+(\mu_6(t)-h_{11}(t)\mu_5(t))(\mu_1(t)\mu_3(t)-\mu_2(t)\mu_4(t))+h_{31}(t)\times$$
$$\times\mu_2(t)\mu_4(t)\mu_5(t)+\mu_5'(t)\mu_6(t)-\mu_5(t)\mu_6'(t)\Big]\big(\mu_2(t)\mu_5(t)(h_{31}^2(t)-h_{32}^2(t))+(h_{31}(t)-$$
$$-h_{32}(t))((h_{11}(t)\mu_5(t)-\mu_6(t))(\mu_2(t)-\mu_1(t))-\mu_5^2(t))+h_{32}(t)\mu_5(t)(\mu_2(t)-\mu_1(t))\times$$
$$\times(h_{11}(t)-h_{12}(t))\big)\big(h_{31}(t)(\mu_5(t)(\mu_5(t)-h_{31}(t)\mu_2(t))+(\mu_2(t)-\mu_1(t))(\mu_6(t)-h_{11}(t)\times$$
$$\times\mu_5(t)))\big(h_{32}(t)(\mu_5(t)(\mu_5(t)-h_{32}(t)\mu_2(t))+(\mu_2(t)-\mu_1(t))(\mu_6(t)-h_{12}(t)\mu_5(t)))\big)^{-1}+$$
$$+\Big[\int_0^1\big((\mu_6(t)-(yh_{31}(t)+h_{11}(t))\mu_5(t))a_x(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)-\mu_5(t)a(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)\big)\times$$
$$\times v_y(y,t)dy+\int_0^1\big((\mu_6(t)-(yh_{31}(t)+h_{11}(t))\mu_5(t))(a_x(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)-a_x(yh_{32}(t)+$$
$$+h_{12}(t),t))-(y(h_{31}(t)-h_{32}(t))+h_{11}(t)-h_{12}(t))a_x(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)\mu_5(t)-\mu_5(t)\times$$
$$\times(a(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)-a(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t))\big)v_{2y}(y,t)dy-((h_{31}(t)+h_{11}(t))\mu_5(t)-$$
$$-\mu_6(t))(\mu_2(t)-a(h_{31}(t)+h_{11}(t),t))\frac{v_y(1,t)}{h_{31}(t)}-\Big((\mu_2(t)-a(h_{31}(t)+h_{11}(t),t))((h_{31}(t)+$$
$$+h_{11}(t))\mu_5(t)-\mu_6(t))\left(\frac{1}{h_{31}(t)}-\frac{1}{h_{32}(t)}\right)+\frac{1}{h_{32}(t)}\big(\mu_5(t)(h_{31}(t)-h_{32}(t)+h_{11}(t)-$$
$$-h_{12}(t))(\mu_2(t)-a(h_{31}(t)+h_{11}(t),t))-(a(h_{31}(t)+h_{11}(t),t)-a(h_{32}(t)+h_{12}(t),t))\times$$
$$\times((h_{32}(t)+h_{12}(t))\mu_5(t)-\mu_6(t))\big)\Big)v_{2y}(1,t)+(\mu_1(t)+a(h_{11}(t),t))(\mu_6(t)-h_{11}(t)\mu_5(t))\times$$
$$\times\frac{v_y(0,t)}{h_{31}(t)}-\Big((\mu_1(t)+a(h_{11}(t),t))(h_{11}(t)\mu_5(t)-\mu_6(t))\left(\frac{1}{h_{31}(t)}-\frac{1}{h_{32}(t)}\right)+\frac{1}{h_{32}(t)}\big(\mu_5(t)\times$$
$$\times(\mu_1(t)+a(h_{11}(t),t))(h_{11}(t)-h_{12}(t))+(h_{12}(t)\mu_5(t)-\mu_6(t))(a(h_{11}(t),t)-a(h_{12}(t),t))\big)\Big)\times$$

$$\times v_{2y}(0,t)+h_{31}(t)\int_0^1((yh_{31}(t)+h_{11}(t))\mu_5(t)-\mu_6(t))\times(f(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)-f(yh_{32}(t)+$$

$$+h_{12}(t),t))dy+\int_0^1\big(y\mu_5(t)(h_{31}^2(t)-h_{32}^2(t))+(h_{31}(t)-h_{32}(t))(h_{11}(t)\mu_5(t)-\mu_6(t))+\mu_5(t)\times$$

$$\times h_{32}(t)(h_{11}(t)-h_{12}(t))\big)f(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)dy-(h_{11}(t)-h_{12}(t))\mu_5(t)(\mu_1(t)\mu_3(t)-\mu_2(t)\times$$

$$\times\mu_4(t))+(h_{31}(t)-h_{32}(t))\mu_2(t)\mu_4(t)\mu_5(t)\Big]\big((\mu_5(t)(\mu_5(t)-h_{32}(t)\mu_2(t))+(\mu_2(t)-\mu_1(t))\times$$

$$\times(\mu_6(t)-h_{12}(t)\mu_5(t)))h_{32}(t)\big)^{-1},\ t\in[0,T], \tag{39}$$

$$c(t)=\Big[\int_0^1\big(((y-1)h_{31}(t)\mu_2(t)-yh_{31}(t)\mu_1(t)+\mu_5(t))a_x(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)+(\mu_2(t)-$$

$$-\mu_1(t))a(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)\big)v_{1y}(y,t)dy-(\mu_2(t)-a(h_{31}(t)+h_{11}(t),t))(h_{31}(t)\mu_1(t)-$$

$$-\mu_5(t))\frac{v_{1y}(1,t)}{h_{31}(t)}+(\mu_1(t)+a(h_{11}(t),t))(\mu_1(t)-h_{31}(t)\mu_2(t))\frac{v_{1y}(0,t)}{h_{31}(t)}+h_{31}(t)\times$$

$$\times\int_0^1((1-y)h_{31}(t)\mu_2(t)+yh_{31}(t)\mu_1(t)-\mu_5(t))f(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)dy-(h_{11}(t)\mu_5'(t)-$$

$$-\mu_6'(t))(\mu_2(t)-\mu_1(t))+(\mu_5(t)-h_{31}(t)\mu_2(t))(\mu_1(t)\mu_3(t)-\mu_2(t)\mu_4(t)+\mu_5'(t))\Big]\big(\mu_2(t)\times$$

$$\times\mu_5(t)(h_{31}^2(t)-h_{32}^2(t))+(h_{31}(t)-h_{32}(t))((h_{11}(t)\mu_5(t)-\mu_6(t))(\mu_2(t)-\mu_1(t))-\mu_5^2(t))+$$

$$+h_{32}(t)\mu_5(t)(\mu_2(t)-\mu_1(t))(h_{11}(t)-h_{12}(t))\big)\big(h_{31}(t)(\mu_5(t)(\mu_5(t)-h_{31}(t)\mu_2(t))+(\mu_2(t)-$$

$$-\mu_1(t))(\mu_6(t)-h_{11}(t)\mu_5(t)))\big(h_{32}(t)(\mu_5(t)(\mu_5(t)-h_{32}(t)\mu_2(t))+(\mu_2(t)-\mu_1(t))(\mu_6(t)-$$

$$-h_{12}(t)\mu_5(t))))\big)^{-1}+\Big[\int_0^1\big(((y-1)h_{31}(t)\mu_2(t)-yh_{31}(t)\mu_1(t)+\mu_5(t))a_x(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)+$$

$$+(\mu_2(t)-\mu_1(t))a(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)\big)v_y(y,t)dy+\int_0^1\big(((y-1)h_{31}(t)\mu_2(t)-yh_{31}(t)\mu_1(t)+$$

$$+\mu_5(t))(a_x(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)-a_x(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t))-(y\mu_1(t)+(1-y)\mu_2(t))(h_{31}(t)-$$

$$-h_{32}(t))a_x(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)+(a(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)-a(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t))(\mu_2(t)-$$

$$-\mu_1(t))\big)v_{2y}(y,t)dy+(\mu_2(t)-a(h_{31}(t)+h_{11}(t),t))(\mu_5(t)-h_{31}(t)\mu_1(t))\frac{v_y(1,t)}{h_{31}(t)}-\Big((\mu_2(t)-$$

$$-a(h_{31}(t)+h_{11}(t),t))(h_{31}(t)\mu_1(t)-\mu_5(t))\left(\frac{1}{h_{31}(t)}-\frac{1}{h_{32}(t)}\right)+\frac{1}{h_{32}(t)}\big((h_{31}(t)-h_{32}(t))\times$$

$$\times\mu_1(t)(\mu_2(t)-a(h_{31}(t)+h_{11}(t),t))-(a(h_{31}(t)+h_{11}(t),t)-a(h_{32}(t)+h_{12}(t),t))(h_{32}(t)\times$$

$$\times\mu_1(t)-\mu_5(t)))\Big)v_{2y}(1,t)+(\mu_1(t)+a(h_{11}(t),t))(\mu_1(t)-h_{31}(t)\mu_2(t))\frac{v_y(0,t)}{h_{31}(t)}-\Big((\mu_1(t)+$$

$$+a(h_{11}(t),t))(h_{31}(t)\mu_2(t)-\mu_1(t))\left(\frac{1}{h_{31}(t)}-\frac{1}{h_{32}(t)}\right)+\frac{1}{h_{32}(t)}\big(\mu_2(t)(\mu_1(t)+a(h_{11}(t),t))\times$$

$$\times(h_{31}(t)-h_{32}(t))+(h_{32}(t)\mu_2(t)-\mu_1(t))(a(h_{11}(t),t)-a(h_{12}(t),t))\big)\Big)v_{2y}(0,t)+h_{31}(t)\times$$

$$\times\int_0^1((1-y)h_{31}(t)\mu_2(t)+yh_{31}(t)\mu_1(t)-\mu_5(t))(f(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)-f(yh_{32}(t)+$$

$$+h_{12}(t),t))dy+\int_0^1((1-y)\mu_2(t)+y\mu_1(t))(h_{31}(t)-h_{32}(t))f(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)dy-$$

$$-(h_{11}(t)-h_{12}(t))\mu_5'(t)(\mu_2(t)-\mu_1(t))-(h_{31}(t)-h_{32}(t))\mu_2(t)(\mu_1(t)\mu_3(t)-$$

$$-\mu_2(t)\mu_4(t)-\mu_5'(t))\Big]\big((\mu_5(t)(\mu_5(t)-h_{32}(t)\mu_2(t))+$$

$$+(\mu_2(t)-\mu_1(t))(\mu_6(t)-h_{12}(t)\mu_5(t)))h_{32}(t)\big)^{-1}. \qquad (40)$$

Зауважимо, що

$$\mu_5(t)(\mu_5(t)-h_{3i}(t)\mu_2(t))+(\mu_6(t)-h_{1i}(t)\mu_5(t))(\mu_2(t)-\mu_1(t))>0,\ t\in[0,t_1],\ i=1,2.$$

Припущення теореми забезпечують правильність рівності

$$f(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)-f(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)=(y(h_{31}(t)-h_{32}(t))+h_{11}(t)-h_{12}(t))\times$$

$$\times\int_0^1 f_x(yh_{32}(t)+h_{12}(t)+\sigma(y(h_{31}(t)-h_{32}(t))+h_{11}(t)-h_{12}(t)),t)d\sigma, \qquad (41)$$

що також справджується для $a(yh_{3i}(t)+h_{1i}(t),t)$ та $a_x(yh_{3i}(t)+h_{1i}(t),t)$, $i=1,2$.

Виражаючи $h_{3i}(t)$ через $s_i(t)$

$$h_{3i}(t)=h_{3i}(0)\exp\left(\int_0^t s_i(\tau)d\tau\right),\quad i=1,2,$$

де $h_{31}(0)=h_{32}(0)=h_{03}$, та враховуючи, що $e^x-e^y=(x-y)\int_0^1 e^{y+\tau(x-y)}d\tau$, одержимо

$$\frac{1}{h_{31}(t)}-\frac{1}{h_{32}(t)}=-\frac{1}{h_{03}}\int_0^t s(\tau)d\tau\int_0^1\exp\left(-\int_0^t(\sigma s(\tau)+s_2(\tau))d\tau\right)d\sigma. \qquad (42)$$

Аналогічно

$$\frac{1}{h_{31}^2(t)}-\frac{1}{h_{32}^2(t)}=-\frac{2}{h_{03}^2}\int_0^t s(\tau)d\tau\int_0^1\exp\left(-2\int_0^t(\sigma s(\tau)+s_2(\tau))d\tau\right)d\sigma.$$

Враховуючи (41), (42) і підставивши (36) в (37)-(40), одержимо систему однорідних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду стосовно невідомих $s(t)$, $q(t)$, $p(t)$, $c(t)$. З єдиності розв'язків таких систем випливає, що $s(t) = 0$, $q(t) = 0$, $p(t) = 0$, $c(t) = 0$, $t \in [0, t_1]$. Звідси отримаємо $s_1(t) = s_2(t)$, $q_1(t) = q_2(t)$, $p_1(t) = p_2(t)$, $c_1(t) = c_2(t)$, $t \in [0, t_1]$, а отже, $h_{31}(t) = h_{32}(t)$, $h_{11}(t) = h_{12}(t)$, $b_1(t) = b_2(t)$, $c_1(t) = c_2(t)$, $t \in [0, t_1]$. Використовуючи це в задачі (33), (34), знаходимо, що $v_1(y,t) = v_2(y,t)$, $(y,t) \in \overline{Q}_{t_1}$, що і завершує доведення теореми.

1. *Баранська І.* Визначення старшого коефіцієнта у параболічному рівнянні в області з невідомими межами / *Баранська І.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2005. – Вип. 64. – С. 20-38.
2. *Пабирівська Н.* Теплові моменти в оберненій задачі для параболічного рівняння / *Пабирівська Н.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 56. – С. 142-149.
3. *Пабирівська Н.В.* Обернені задачі з інтегральними умовами перевизначення / *Пабирівська Н.* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – Т. 43, № 1. – С. 51-58.
4. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type / *Ivanchov M.* // Math. Studies: Monogr. Ser. Vol. 10. – Lviv: VNTL Publ., 2003. – 240 p.
5. *Ладыженская О.А.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* – М.: Наука, 1967. – 736 с.
6. *Снітко Г.А.* Обернена задача для параболічного рівняння в області з вільною межею *Снітко Г.А.* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – Т. 50, №4. – С. 7-18.

INVERSE PROBLEM FOR A PARABOLIC EQUATION WITH UNKNOWN MINOR COEFFICIENTS IN A FREE BOUNDARY DOMAIN

Halyna SNITKO

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics
National Academy of Sciences of Ukraine,
79060, L'viv, Naukova Str., 3b

We establish conditions of local existence and uniqueness of the classical solution to the inverse problem for a parabolic equation with unknown time-dependent minor coefficients in a free boundary domain.

Key words: inverse problem, Green function, free boundary, parabolic equation.

Стаття надійшла до редколегії 28.03.2008

Прийнята до друку 22.10.2008