ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат. 2008. Вип.68. С.215-230 *Ser.Mech-Math. 2008. Vol.68. P.215-230*

УДК 517.95

МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З ВИРОДЖЕННЯМ

Наталія ПРОЦАХ[1,2]

[1] *Національний лісотехнічний університет України,*
79057, Львів,вул. Генерала Чупринки, 103
[2] *Інститут прикладних проблем механіки і математики*
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
79060, Львів, вул. Наукова, 3б

Розглянуто мішану задачу для вироджених ультрапараболічних рівнянь. Виродження рівнянь відбувається на гіперплощині задання початкових даних. Залежно від типу виродження отримано умови існування єдиного узагальненого розв'язку мішаної задачі.

Ключові слова: ультрапараболічне рівняння, слабке виродження, сильне виродження, мішана задача, узагальнений розв'язок.

Систематичне вивчення різних задач для рівнянь з виродженням розпочалося у двадцятих роках минулого століття. Переважно досліджували задачі для вироджених рівнянь гіперболічного та параболічного типів. Зокрема, огляд літератури є у [1–15]. У працях [1-10, 14] з'ясували, що за наявності виродження у рівнянні на гіперплощині задання початкових даних, умови розв'язності мішаної задачі для цього рівняння залежать від співвідношення між коефіцієнтами рівняння та параметрами виродження.

Мішані задачі для лінійних і нелінійних ультрапараболічних рівнянь досліджено в [16-24].

У цій праці розглянуто мішану задачу для виродженого рівняння ультрапараболічного типу. Зміна типу рівняння виникає на гіперплощині задання початкових даних. Отримано умови існування єдиного узагальненого розв'язку сформульованої задачі.

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область з межею $\partial\Omega$; $y_0 < +\infty$, $D = \Omega \times (0, y_0)$, $Q_T = D \times (0,T)$, $0 < T < +\infty$; $Q_{t,\tau} = D \times (t,\tau)$; $D_\tau = Q_T \bigcap \{t = \tau\}$, $\partial\Omega \subset C^2$, $\Sigma_T = \partial\Omega \times (0, y_0) \times (0,T)$.

1. Лінійне рівняння. В області Q_T розглянемо рівняння

$$\varphi(t)u_t - \lambda(x,y,t)u_y - \sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x,y,t)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} c_i(x,y,t)u_{x_i} + d(x,y,t)u = f(x,y,t) \quad (1)$$

з крайовими умовами

$$u(x,y_0,t)=0 \quad (x,t)\in\Omega\times(0,T); \qquad u|_{\Sigma_T}=0. \quad (2)$$

Щодо коефіцієнтів рівняння (1) припускатимемо виконання умов

(Φ): $\varphi\in C([0,T])$, $\varphi(t)>0$, $t\in(0,T]$; $\varphi(0)=0$, $\varphi'\in C((0,T])$; $\varphi'(t)\geqslant 0$ $t\in(0,T]$;

(A): $a_i\in L^\infty(Q_T)$, $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t)\xi_i\xi_j \geqslant a_0 \sum\limits_{i,j=1}^{n}|\xi|^2$ майже для всіх $(x,y,t)\in Q_T$, $i,j\in\{1,\dots,n\}$, $\xi\in\mathbb{R}^n$, де a_0 – додатна стала;

(L): $\lambda\in C(\overline{Q}_T)$, $\lambda_y\in L^\infty(Q_T)$ для майже всіх $(x,y,t)\in Q_T$, $\lambda\geqslant 0$, $\lambda\not\equiv 0$.

Будемо розглядати простір $H_{0,\varphi}(Q_T)$ як замикання множини нескінченно диференційовних функцій в $\overline{Q}_T$, які дорівнюють нулю в околі Σ_T та $u(x,y_0,t)=0$ за нормою $\|u;H_{0,\varphi}(Q_T)\|^2=\int_{\overline{Q}_T}\left[\varphi(t)|u|^2+\varphi(t)|u_y|^2+\varphi(t)|u_t|^2+\sum\limits_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^2\right]dx\,dy\,dt$.

Розглянемо такі випадки.

a) Сильне виродження.

Означення 1. *Скажемо, що рівняння (1) має сильне виродження, якщо* $\int_0^T \frac{dt}{\varphi(t)}=\infty$.

Розглянемо мішану задачу для рівняння (1) з крайовими умовами (2) та початковою умовою

$$\lim_{t\to+0}\sqrt{\varphi(t)}u(x,y,t)=0, \qquad (x,y)\in D. \quad (3)$$

Означення 2. *Узагальненим розв'язком задачі (1)-(3) назвемо функцію* $u\in H_{0,\varphi}(Q_T)$, *яка задовольняє рівність*

$$\int\limits_{Q_T} L(u,v)\,dx\,dy\,dt \equiv \int\limits_{Q_T}\Big[\varphi(t)u_tv+\lambda(x,y,t)u_yv+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,y,t)u_{x_i}v_{x_j}+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}c_i(x,y,t)u_{x_i}v+d(x,y,t)uv-f(x,y,t)v\Big]\,dx\,dy\,dt=0 \quad (4)$$

для довільної функції $v\in\{v:\ v\in L^2(Q_T),\ v_{x_i}\in L^2(Q_T),\ i=1,\dots,n,\ u|_{\Sigma_T}=0\}$.

Позначимо

$$c_0(t)=\sup_{Q_t}\sum_{i=1}^{n}\frac{|c_i(x,y,\tau)|^2}{\varphi'(\tau)}, \quad \lambda_1(t)=\sup_{Q_t}\frac{|\lambda_y(x,y,\tau)|}{\varphi'(\tau)}, \quad d_0(t)=\sup_{Q_t}\sum_{i=1}^{n}\frac{|d(x,y,\tau)|}{\varphi'(\tau)}.$$

$$c_1(t)=\sup_{Q_t}\sum_{i=1}^{n}\frac{|c_{iy}(x,y,\tau)|^2}{\varphi'(\tau)}, \quad d_1(t)=\sup_{Q_t}\sum_{i=1}^{n}\frac{|d_y(x,y,\tau)|}{\varphi'(\tau)},$$

$$c_2(t) = \sup_{Q_t} \sum_{i=1}^{n} \frac{|c_{it}(x,y,\tau)|^2}{\varphi'(\tau)}, \quad \lambda_2(t) = \sup_{Q_t} \frac{|\lambda_t(x,y,\tau)|}{\varphi'(\tau)}, \quad d_2(t) = \sup_{Q_t} \sum_{i=1}^{n} \frac{|d_t(x,y,\tau)|}{\varphi'(\tau)},$$

$$\nu_0 = 1 + \inf_{[0,T]} \sup_{[0,\tau]} \left[\lambda_1(t) + 2d_0(t) + \frac{2c_0(t)}{a_0} \right], \ \nu_1 = -1 + \inf_{[0,T]} \sup_{[0,\tau]} \left[\lambda_1(t) + 2d_0(t) + \frac{2c_0(t)}{a_0} \right],$$

δ_0 – мале додатне число.

Щодо правої частини рівняння (1) припускатимемо виконання умови

(F): $\displaystyle\int\limits_{Q_T} \left[\frac{|f|^2 + |f_y|^2}{[\varphi(t)]^{\nu_0+2\delta_0}\varphi'(t)} + \frac{|f_t|^2}{[\varphi(t)]^{\nu_1+2\delta_0}\varphi'(t)} \right] dx\,dy\,dt < +\infty,$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{D_\varepsilon} \frac{|f(x,y,\varepsilon)|^2}{[\varphi(\varepsilon)]^{\nu_1+1+2\delta_0}}\,dx\,dy\,dt < +\infty, \quad f(x,y_0,t) = 0 \text{ для всіх } (x,t) \in \Omega \times (0,T).$$

Доведемо існування та єдиність узагальненого розв'язку задачі (1) - (3).

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* $(\mathbf{A})$, $(\mathbf{L})$, (Φ), $(\mathbf{F})$, *крім того,* c_i, d_i, $\lambda_j \in L^\infty([0,T])$ $i = 0,1,2$, $j = 1,2$. *Тоді існує узагальнений розв'язок задачі (1)-(3).*

Доведення. Нехай $\{\varphi^k\}_{k=1}^{\infty}$ – ортогональна база простору $H_0^1(\Omega)$, ортонормована в $L^2(\Omega)$, а $\psi^s = \cos\frac{(2s-1)\pi}{2y_0}y$ $(s \geqslant 1)$. Позначимо $\{\varphi^{k,s}\}_{k,s=1}^{\infty} = \{\varphi^k(x)\psi^s(y)\}_{k,s=1}^{\infty}$. Очевидно, що $\varphi^{k,s} \in H^1(D)$, $\varphi^{k,s}|_{\partial\Omega\times(0,y_0)} = 0$, $\varphi^{k,s}|_{y=y_0} = 0$. Розглянемо функції $u^N(x,y,t) = \sum\limits_{k,s=1}^{N} c_{ks}^N(t)\varphi^{k,s}(x,y)$, $N \in \{1,2,\ldots\}$, де $c_{ks}^N(t)$ є розв'язком задачі

$$\int\limits_{D_t} L(u^N, \varphi^{k,s})\,dx\,dy = 0, \tag{5}$$

$$c_{ks}^N(\varepsilon) = 0, \quad k,\, s \subset \{1,\ldots,N\}, \quad \varepsilon > 0, \quad t \in [\varepsilon, T]. \tag{6}$$

За теоремою Каратеодорі [25, с. 54] існує абсолютно неперервний на $[\varepsilon,\tau_0]$, $\tau_0 < T$ розв'язок задачі (5) – (6). Домножимо (5) на $c_{ks}^N(t)$, підсумуємо за s і k, проінтегруємо за t по проміжку $[\varepsilon,\tau]$. Матимемо

$$\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} L(u^N, u^N)\,dx\,dy\,dt = 0. \tag{7}$$

Перетворимо та оцінимо кожний доданок отриманої рівності

$$\mathcal{I}_1 \equiv \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} \varphi(t) u_t^N u^N\,dx\,dy\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_{D_\tau} \varphi(\tau)(u^N)^2\,dx\,dy - \frac{1}{2}\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} \varphi'(t)(u^N)^2\,dx\,dy\,dt;$$

$$\mathcal{I}_2 \equiv -\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} \lambda(x,y,t) u_y^N u^N\,dx\,dy\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_{\varepsilon}^{\tau}\int\limits_{\Omega} \lambda(x,0,t)|u^N|^2\,dx\,dt +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} \lambda_y(x,y,t)|u^N|^2\,dx\,dy\,dt;$$

$$\mathcal{I}_3 \equiv \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t)u^N_{x_i}u^N_{x_j}\,dx\,dy\,dt \geqslant a_0 \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} \sum_{i=1}^{n}(u^N_{x_i})^2\,dx\,dy\,dt;$$

$$\mathcal{I}_4 \equiv \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} \sum_{i=1}^{n} c_i(x,y,t)u^N_{x_i}u^N\,dx\,dy\,dt \leqslant \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} \left[\frac{c_0(t)}{2\delta_1}\sum_{i=1}^{n}(u^N_{x_i})^2 + \frac{\delta_1}{2}\varphi'(t)|u^N|^2\right]dx\,dy\,dt;$$

$$\mathcal{I}_5 \equiv \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} d(x,y,t)(u^N)^2\,dx\,dy\,dt \leqslant \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} d_0(t)\varphi'(t)|u^N|^2\,dx\,dy\,dt;$$

$$\mathcal{I}_6 \equiv \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} f(x,y,t)u^N\,dx\,dy\,dt \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} [\frac{|f(x,y,t)|^2}{\varphi'(t)\delta_2} + \delta_2\varphi'(t)|u^N|^2]\,dx\,dy\,dt,$$

де $\delta_1 = \sup\limits_{Q_T}\frac{2c_0(t)}{a_0}$, δ_2 – мале додатне число. Оскільки $1+\lambda_1(t)+\delta_1+2d_0(t)+\delta_2 < \nu_0+\delta_0$, $\nu_0 > 0$, то з (7) та з отриманих оцінок випливає нерівність

$$\int\limits_{D_\tau}\varphi(\tau)(u^N)^2\,dx\,dy + \int\limits_{\varepsilon}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\lambda(x,0,t)(u^N)^2\,dx\,dt + \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}}\sum_{i=1}^{n}(u^N_{x_i})^2\,dx\,dy\,dt \leqslant$$
$$\leqslant M_1[\varphi(\tau)]^{\nu_0+2\delta_0}\int\limits_{Q_T}\frac{1}{[\varphi(t)]^{\nu_0+2\delta_0}}\frac{|f|^2}{\varphi'(t)}\,dx\,dy\,dt, \tag{8}$$

в якій стала M_1 не залежить від N. Оскільки $(\cos\frac{(2s-1)\pi}{2y_0}y)_{yy} = -\omega_s\cos\frac{(2s-1)\pi}{2y_0}y$, де $\omega_s = (\frac{(2s-1)\pi}{2y_0})^2$, то домножимо (5) на $c^N_{k,s}(t)\omega_s$, підсумуємо за s,k, проінтегруємо за t від ε до τ та замінимо значення $\sum\limits_{k,s=1}^{N} c^N_{k,s}(t)\omega_s\varphi^{k,s}(x,y)$ з попереднього виразу на $-u^N_{yy}$. Матимемо

$$-\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} L(u^N,u^N_{yy})\,dx\,dy\,dt = 0. \tag{9}$$

Перетворимо й оцінимо кожний з доданків цієї рівності окремо

$$\mathcal{I}_7 \equiv -\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}}\varphi(t)u^N_t u^N_{yy}dx\,dy\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_{D_\tau}\varphi(t)(u^N_y)^2\,dx\,dy - \frac{1}{2}\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}}\varphi'(t)(u^N_y)^2\,dx\,dy\,dt;$$

$$\mathcal{I}_8 \equiv \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}}\lambda(x,y,t)u^N_y u^N_{yy}dxdydt \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\varepsilon}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\lambda(x,y_0,t)(u^N_y)^2dxdt - \frac{1}{2}\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}}\lambda_1(t)\varphi'(t)(u^N_y)^2dxdydt,$$

$$\mathcal{I}_9 \equiv -\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,y,t)u^N_{x_i}u^N_{x_iyy}dxdydt \geqslant \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}}\left[\frac{a_0}{2}\sum_{i=1}^{n}(u^N_{x_iy})^2 - \frac{(a^1)^2}{2a_0}\sum_{i=1}^{n}(u^N_{x_i})^2\right]dxdydt,$$

тут $a^1 = \sup\limits_{Q_T}|a_{iy}|$.

$$\mathcal{I}_{10} \equiv -\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} \sum_{i=1}^{n} c_i(x,y,t) u^N_{x_i} u^N_{yy}\, dx\, dy\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} \left[\frac{c_1(t)}{\delta_4} \sum_{i=1}^{n} (u^N_{x_i})^2 + (\delta_4+\delta_3)\varphi'(t)(u^N_y)^2 + \frac{c_0(t)}{\delta_3} \sum_{i=1}^{n} (u^N_{x_i y})^2 \right] dx\, dy\, dt,$$

$$\mathcal{I}_{11} \equiv -\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} d(x,y,t) u^N u^N_{yy} dx dy dt \leqslant \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} \left[\frac{d_1(t)}{2\delta_4}(u^N)^2 + \left(\frac{d_1(t)}{2}\delta_4 + d_0(t) \right) (u^N_y)^2 \right] \varphi'(t) dx dy dt;$$

$$\mathcal{I}_{12} \equiv \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} f(x,y,t) u^N_{yy}\, dx\, dy\, dt \geqslant -\frac{1}{2} \int\limits_{Q_{0,\tau}} \left[\delta_4 \varphi'(t) |u^N_y|^2 + \frac{|f_y(x,y,t)|^2}{\delta_4 \varphi'(t)} \right] dx\, dy\, dt,$$

де $\delta_3 = \frac{2}{a_0} \sup\limits_{Q_T} c_0(t)$, δ_4 – мале додатне число. Тоді на підставі оцінок інтегралів $\mathcal{I}_7 - \mathcal{I}_{12}$ з (9) отримаємо нерівність

$$\int\limits_{D_\tau} \varphi(\tau)(u^N_y)^2\, dx\, dy + \int\limits_{\varepsilon}^{\tau} \int\limits_{\Omega} \lambda(x,y_0,t)(u^N_y)^2\, dx\, dt + \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} \sum_{i=1}^{n} (u^N_{x_i y})^2\, dx\, dy\, dt \leqslant$$

$$\leqslant M_2 [\varphi(\tau)]^{\nu_0+2\delta_0} \int\limits_{Q_T} \frac{1}{[\varphi(t)]^{\nu_0+2\delta_0}} \frac{|f|^2+|f_y|^2}{\varphi'(t)}\, dx\, dy\, dt. \tag{10}$$

Продиференціюємо рівність (5) по t, домножимо кожне з рівнянь на $c^N_{kst}(t)e^{-\nu t}$, підсумуємо за k,s, проінтегруємо по $[\varepsilon,\tau]$, $\tau < T$. Одержимо

$$\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} \Big[\varphi(t) u^N_{tt} u^N_t + \varphi'(t)(u^N_t)^2 - \lambda(x,y,t) u^N_{yt} u^N_t - \lambda_t(x,y,t) u^N_y u^N_{yt} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t) u^N_{x_i t} u^N_{x_j t} +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ijt}(x,y,t) u^N_{x_i} u^N_{x_j t} + \sum_{i=1}^{n} c_i(x,y,t) u^N_{x_i t} u^N_t + \sum_{i=1}^{n} c_{it}(x,y,t) u^N_{x_i} u^N_t +$$

$$+ d(x,y,t)(u^N_t)^2 + d_t(x,y,t) u^N u^N_t - f_t(x,y,t) u^N_t \Big]\, dx\, dy\, dt = 0. \tag{11}$$

Оцінимо кожний доданок отриманої рівності.

$$\mathcal{I}_{13,14} \equiv \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} \left[\varphi(t) u^N_{tt} u^N_t + \varphi'(t)(u^N_t)^2 \right] dx\, dy\, dt \geqslant \frac{1}{2} \int\limits_{D_\tau} \varphi(\tau)(u^N_t)^2\, dx\, dy -$$

$$-\frac{1}{2} \int\limits_{D_\varepsilon} \varphi(\varepsilon)(u^N_t)^2\, dx\, dy + \frac{1}{2} \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} \varphi'(t)(u^N_t)^2\, dx\, dy\, dt;$$

$$\mathcal{I}_{15,16} = -\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} \left[\lambda(x,y,t) u^N_{yt} u^N_t + \lambda_t(x,y,t) u^N_y u^N_t \right] dx\, dy\, dt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\varepsilon}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\lambda(x,0,t)|u_t^N|^2\,dx\,dt - \frac{1}{2}\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}}\left((\lambda_1(t)+\delta_5)\varphi'(t)|u_t^N|^2 + \frac{\lambda_2(t)\varphi'(t)|u_y^N|^2}{\delta_5}\right)dxdydt;$$

$$\mathcal{I}_{17,18} = \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}}\Big[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t)u^N_{x_it}u^N_{x_jt} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ijt}(x,y,t)u^N_{x_i}u^N_{x_jt}\Big]\,dx\,dy\,dt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{a_0}{2}\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}}\sum_{i=1}^{n}(u^N_{x_it})^2 dx\,dy\,dt - \frac{(a^1)^2}{2a_0}\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}}\sum_{i=1}^{n}(u^N_{x_i})^2\,dx\,dy\,dt$$

$$\mathcal{I}_{19,20} = \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}}\Big[\sum_{i=1}^{n} c_i(x,y,t)u^N_{x_it}u^N_t + \sum_{i=1}^{n} c_{it}(x,y,t)u^N_{x_i}u^N_t\Big]\,dx\,dy\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}}\left[\frac{c_2(t)}{\delta_5}\sum_{i=1}^{n}(u^N_{x_i})^2 + (\delta_5+\delta_3)\varphi'(t)(u^N_t)^2 + \frac{c_0(t)}{\delta_3}\sum_{i=1}^{n}(u^N_{x_it})^2\right]\,dx\,dy\,dt,$$

$$\mathcal{I}_{21,22} = \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}}\big[d(x,y,t)(u^N_t)^2 + d_t(x,y,t)u^N u^N_t\big]\,dx\,dy\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}}\left[\frac{d_2(t)}{2\delta_5}\varphi'(t)(u^N)^2 + \frac{d_2(t)}{2}\delta_5\varphi'(t)(u^N_t)^2 + \varphi'(t)d_0(t)(u^N_t)^2\right]\,dx\,dy\,dt;$$

$$\mathcal{I}_{23,24} = \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} f_t(x,y,t)u^N_t\,dx\,dy\,dt \geqslant -\frac{1}{2}\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}}\Big[\delta_5\varphi'(t)|u^N_t|^2 - \frac{|f_t(x,y,t)|^2}{\delta_5\varphi'(t)}\Big]\,dx\,dy\,dt,$$

де $\delta_5 > 0$ – мале число. Розглянемо (5) при $\tau = \varepsilon$, одержимо

$$\int\limits_{D_\varepsilon}\varphi(\varepsilon)(u^N_t)^2\,dx\,dy = \int\limits_{D_\varepsilon} f(x,y,\varepsilon)u^N_t\,dx\,dy \leqslant \int\limits_{D_\varepsilon}\left[\frac{1}{2}\frac{|f(x,y,\varepsilon)|^2}{\varphi(\varepsilon)} + \frac{1}{2}|u^N_t|^2\varphi(\varepsilon)\right]\,dx\,dy. \quad (12)$$

Звідси, $\frac{1}{2}\int\limits_{D_\varepsilon}\varphi(\varepsilon)(u^N_t)^2\,dx\,dy \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{D_\varepsilon}\frac{|f(x,y,\varepsilon)|^2}{\varphi(\varepsilon)}\,dx\,dy$. Врахувавши оцінки $\mathcal{I}_{13}$-$\mathcal{I}_{24}$, з (11) випливає оцінка

$$\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}}\varphi'(t)(u^N_t)^2\,dx\,dy\,dt \leqslant M_3[\varphi(\tau)]^{\nu_1+2\delta_0}\Bigg[\int\limits_{D_\varepsilon}\frac{|f(x,y,\varepsilon)|^2}{[\varphi(\varepsilon)]^{\nu_1+2\delta_0}\varphi(\varepsilon)}\,dx\,dy +$$

$$+\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}}\left(\frac{1}{[\varphi(t)]^{\nu_0+2\delta_0}}\frac{|f|^2+|f_y|^2}{\varphi'(t)} + \frac{|f_t|^2}{[\varphi(t)]^{\nu_1+2\delta_0}\varphi'(t)}\right)\,dx\,dy\,dt\Bigg]. \quad (13)$$

Отже, з оцінок (8), (10), (13) випливає оцінка

$$\|u^N; H_{0,\varphi}(Q_{\varepsilon,\tau_0})\|^2 \leqslant M_3[\varphi(\tau)]^{\nu_1+2\delta_0}\Bigg[\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}}\frac{1}{[\varphi(t)]^{\nu_0+2\delta_0}}\frac{|f|^2+|f_y|^2}{\varphi'(t)}\,dx\,dy\,dt +$$

$$+\int\limits_{D_\varepsilon}\frac{|f(x,y,\varepsilon)|^2}{[\varphi(\varepsilon)]^{\nu_1+2\delta_0}\varphi(\varepsilon)}\,dx\,dy+\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}}\frac{|f_t|^2}{[\varphi(t)]^{\nu_1+2\delta_0}\varphi'(t)}\,dx\,dy\,dt\Big],\tag{14}$$

де стала M_3 не залежить від N. Аналогічну оцінку отримуємо в області $Q_{\tau_0,T}$. Врахувавши (1), знаходимо включення: $\varphi(t)u_t^N\in L^2(\varepsilon,T;H^{-1}(D))$. Тому $u\in$ $\in C((0,T];H^{-1}(D))$. З одержаної оцінки випливає, що $\sqrt{\varphi(t)}u_t^N\to\sqrt{\varphi(t)}u_t$ $*$-слабко в $L^\infty(0,T;L^2(D))$, $u_t^N\to u_t$ – слабко в $H_{0,\varphi}(Q_{\varepsilon,T})$. Покажемо, що u буде розв'язком задачі (1)-(3). Продовжимо функції $\{u^N\}_{N=1}^\infty$ нулем в область Q_T та виберемо $\varepsilon=\frac{1}{N}$. Тоді з (5), домноживши її на $c_{ks}(t)$, та підсумувавши за k,s знайдемо

$$\int\limits_{Q_{\frac{1}{N},T}}L(u^N,v^{N_0})\,dx\,dy\,dt=0.\tag{15}$$

Врахувавши збіжності, знаходимо, що u задовольняє означення 1. Доведемо, що виконується початкова умова (3). Розглянемо послідовність функцій $g^N(t)=$ $=\int_{D_\tau}\varphi(\tau)|u^N|^2\,dx\,dy,\quad N\geqslant 1$, та доведемо її одностайну неперервність на проміжку $[0,\delta]$. Маємо

$$\int\limits_{D_t}\varphi(t)(u^N(x,y,t))^2\,dx\,dy\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_{D_t}[\big(\int\limits_0^t\frac{\varphi'(\tau)}{(\varphi(\tau))^{\delta_0}}(u^N)^2\,d\tau\big)\big(\int\limits_0^t\frac{\varphi'(\tau)}{(\varphi(\tau))^{1-\delta_0}}\,d\tau\big)]\,dx\,dy+$$

$$+2\int\limits_{D_t}\big(\int\limits_0^t\varphi(\tau)(u_\tau^N)^2\,d\tau\big)\big(\int\limits_0^t d\tau\big)\,dx\,dy\leqslant\frac{\varphi^{\delta_0}(t)}{2\delta_0}\int\limits_{Q_t}\frac{\varphi'(\tau)}{(\varphi(\tau))^{\delta_0}}(u^N)^2\,dx\,dy\,d\tau+$$

$$+2t\int\limits_{Q_t}\varphi(\tau)(u_\tau^N)^2\,dx\,dy\,d\tau.\tag{16}$$

Зауважимо, що $\int_{D_t}\frac{\varphi'(t)}{\varphi^\delta(t)}(u^N)^2\,dx\,dy\leqslant M_4[\varphi(t)]^{\nu_0+\delta_0}\varphi'(t)\int_{Q_t}\frac{|f|^2\,dx\,dy\,d\tau}{[\varphi(\tau)]^{\nu_0+2\delta_0}\varphi'(\tau)}$. Тоді $\int_{Q_t}\frac{\varphi'(\tau)}{\varphi^\delta(\tau)}(u^N)^2\,dx\,dy\,d\tau\leqslant M_4\int_0^t[\varphi(\tau)]^{\nu_0+\delta_0}\varphi'(\tau)\int_{Q_\tau}\frac{|f|^2}{[\varphi(\theta)]^{\nu_0+2\delta_0}\varphi'(\theta)}\,dx\,dy\,d\theta d\tau$. Оскільки $\int_0^t\varphi'(\tau)[\varphi(\tau)]^{\delta_0-1}d\tau=\frac{1}{\delta_0}\varphi^{\delta_0}(t)$, то

$$\int\limits_{Q_t}\frac{\varphi'(\tau)}{\varphi^\delta(\tau)}(u^N)^2\,dxd\tau\leqslant\frac{M_4}{\delta_0}\varphi^{\delta_0}(t)\int\limits_{Q_t}\frac{|f|^2}{\varphi^{\nu_0+2\delta_0}(\tau)\varphi'(\tau)}\,dx\,dy\,d\tau.\tag{17}$$

Підставивши (17) в (16), спрямуємо t до 0. Зафіксуємо $\varepsilon>0$. Тоді з оцінки (16) та абсолютної неперервності інтеграла Лебега випливає, що існує таке $\delta_0\in(0,T]$, що права частина (16) є меншою за ε. Отже, $\{g^N:N\geqslant 1\}$ одностайно неперервна на $[0,\delta]$. Так само доводимо одностайну неперервність цієї послідовності на всьому проміжку $[0,T]$. Функція u^N належить до простору $C((0,T];L^2(D_t))$ та одностайно неперервна на $[0,T]$, $u^N(x,y,0)=0$. Отже, $\sqrt{\varphi(t)}u^N\to 0$ при $t\to 0$.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* (**A**)*,*(**L**)*,*(Φ)*, крім того,* $c_0, d_0, \lambda_1 \in L^\infty([0,T])$. *Тоді задача (1)-(3) не може мати більше одного узагальненого розв'язку.*

Доведення. Припустимо, що існує два узагальнені розв'язки u^1, u^2 задачі (1)-(3). Позначимо їхню різницю $u = u^1 - u^2$. Функція u задовольнятиме рівність

$$\int\limits_{Q_\tau} \Big[\varphi(t)u_t u - \lambda(x,y,t)u_y u + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t)u_{x_i}u_{x_j} + \\ + \sum_{i=1}^{n} c_i(x,y,t)u_{x_i}u + d(x,y,t)(u)^2\Big]\,dx\,dy\,dt = 0. \tag{18}$$

Оцінивши доданки цієї рівності аналогічно до доведення теореми 1, з (18) отримаємо оцінку $\int_{D_\tau}\varphi(\tau)(u)^2\,dx\,dy + \int_0^\tau\int_\Omega \lambda(x,0,t)(u)^2\,dx\,dt + \int_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}(u_{x_i})^2\,dx\,dy\,dt \leqslant 0$. Звідси знаходимо, що $u = 0$. Тобто, $u^1 = u^2$.

б) Слабке виродження.

Означення 3. *Скажемо, що рівняння (1) має слабке виродження, якщо* $\int_0^T \frac{dt}{\varphi(t)} < \infty$.

Знову розглянемо рівняння (1) з крайовими умовами (2) та початковою умовою

$$u(x,y,0) = 0, \qquad (x,y) \in D. \tag{19}$$

Будемо розглядати простір $\widetilde{H}_{0,\varphi}(Q_T)$ як замикання множини нескінченно диференційовних функцій в $\overline{Q}$, які дорівнюють нулю в околі Σ_T та $u(x,y_0,t) = 0$ за нормою $\|u;\widetilde{H}_{0,\varphi}(Q_T)\|^2 = \int_{\overline{Q}_T}[\varphi(t)|u|^2 + \varphi(t)|u_y|^2 + \sum\limits_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^2]\,dx\,dy\,dt$.

Означення 4. *Узагальненим розв'язком задачі (1), (2), (19) назвемо функцію* $u \in \widetilde{H}_{0,\varphi}(Q_T)$*, яка задовольняє рівність*

$$\int\limits_{D_T}\varphi(T)uv\,dxdy + \int\limits_{Q_T}\Big[-\varphi(t)uv_t - \varphi'(t)uv + \lambda(x,y,t)u_y v + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t)u_{x_i}v_{x_j} + \\ + \sum_{i=1}^{n} c_i(x,y,t)u_{x_i}v + d(x,y,t)uv - f(x,y,t)v\Big]\,dx\,dy\,dt = 0 \tag{20}$$

для довільної функції $v \in \{v:\ v, v_{x_i}, v_t \in L^2(Q_T),\ i = 1,\ldots,n,\ u|_{\Sigma_T} = 0\}$.

Позначимо

$$c_{0(1)}(t) = \sup_{Q_t}\sum_{i=1}^{n}|c_i(x,y,\tau)|^2,\ \lambda_{1(1)}(t) = \sup_{Q_t}|\lambda_y(x,y,\tau)|,\ d_{0(1)}(t) = \sup_{Q_t}\sum_{i=1}^{n}|d(x,y,\tau)|,$$
$$c_{1(1)}(t) = \sup_{Q_t}\sum_{i=1}^{n}|c_{iy}(x,y,\tau)|^2, \quad d_{1(1)}(t) = \sup_{Q_t}\sum_{i=1}^{n}|d_y(x,y,\tau)|.$$

Щодо правої частини рівняння (1) припускатимемо виконання умови

$$\textbf{(F)}: \quad \int\limits_{Q_T} (|f|^2 + |f_y|^2 + |f_t|^2)\,dx\,dy\,dt < +\infty, \quad f(x, y_0, t) = 0 \text{ для всіх } (x,t) \in \Omega \times (0,T).$$

Доведемо існування та єдиність узагальненого розв'язку задачі (1), (2), (19).

Теорема 3. *Нехай виконуються умови* $(\mathbf{A})$, $(\mathbf{L})$, (Φ), $(\mathbf{F})$, *крім того,* $c_{i(1)}$, $d_{i(1)}$, $\lambda_{j(1)} \in L^\infty([0,T])$ $i = 0, 1$, $j = 1, 2$. *Тоді існує узагальнений розв'язок задачі (1), (2), (19).*

Доведення. Нехай $\{\varphi^k\}_{k=1}^\infty$ – ортогональна база простору $H_0^1(\Omega)$, ортонормована в $L^2(\Omega)$, функції $\psi^s = \cos\frac{(2s-1)\pi}{2y_0}y$ $(s \geqslant 1)$. Позначимо $\{\varphi^{k,s}\}_{k,s=1}^\infty = \{\varphi^k(x)\psi^s(y)\}_{k,s=1}^\infty$. Тоді $\varphi^{k,s} \in H^1(D)$, $\varphi^{k,s}|_{\partial\Omega\times(0,y_0)} = 0$, $\varphi^{k,s}|_{y=y_0} = 0$. Розглянемо функції $u^N(x,y,t) = \sum\limits_{k,s=1}^{N} c_{ks}^N(t)\varphi^{k,s}(x,y)$, $N \in \{1, 2, \dots\}$, де $c_{ks}^N(t)$ є розв'язком задачі (5)-(6). За теоремою Каратеодорі [25, с. 54] існує абсолютно неперервний на $[\varepsilon, \tau_0]$, $\tau_0 < T$ розв'язок цієї задачі. Домножимо (5) на $c_{ks}^N(t)$, підсумуємо за s і k, проінтегруємо за t по проміжку $[\varepsilon, \tau]$. Матимемо рівність (7). Для наближень u^N, $N \geqslant 1$ отримаємо оцінку

$$\|u^N; \widetilde{H}_{0,\varphi}(Q_{\varepsilon,\tau_0})\|^2 \leqslant M_5[\varphi(\tau)]^{\nu_0+2\delta_0} \int\limits_{Q_T} \frac{1}{[\varphi(t)]^{\nu_0+2\delta_0}} \frac{|f|^2 + |f_y|^2}{\varphi'(t)}\,dx\,dy\,dt, \tag{21}$$

де стала M_5 не залежить від N. (Доведення аналогічне до знаходження формул (8), (10)). Врахувавши (1), знаходимо включення: $\varphi(t)u_t^N \in L^2(\varepsilon, T; H^{-1}(D))$. Тому $u \in C((0,T]; H^{-1}(D))$. Крім того, u задовольняє рівність (20). З одержаної оцінки випливає, що $\sqrt{\varphi(t)}u_t^N \to \sqrt{\varphi(t)}u_t$ $*$ – слабко в $L^\infty(0,T; L^2(D))$, $u_t^N \to u_t$ – слабко в $\widetilde{H}_{0,\varphi}(Q_{\varepsilon,T})$. Доведемо, що виконується початкова умова : $\lim\limits_{t\to 0} u(x,y,t) = 0$. Розглянемо послідовність функцій $g^N(t) = \int_{D_\tau} |u^N|^2\,dx\,dy$ та доведемо її одностайну неперервність на проміжку $[0,\delta]$. Маємо

$$\int\limits_{D_t} (u^N(x,y,t))^2\,dx\,dy \leqslant \Big(\int\limits_0^t \frac{\varphi(\tau)}{\varphi'(\tau)}\frac{1}{\varphi(\tau)}\,d\tau\Big) \int\limits_{D_t} \Big(\int\limits_0^t \varphi'(\tau)(u^N)^2\,d\tau\Big)\,dx\,dy \leqslant M_6 \max_{[0,T]} \frac{\varphi(\tau)}{\varphi'(\tau)}, \tag{22}$$

де M_6 – стала, яка не залежить від N. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Оскільки $\frac{\varphi(\tau)}{\varphi'(\tau)}$ монотонно неспадна функція та $\frac{\varphi(0)}{\varphi'(0)} = 0$, то існує таке δ, що для всіх $\tau \in [0,\delta]$ права частина (22) є меншою за ε. Отже, $\{g^N : N \geqslant 1\}$ одностайно неперервна на $[0,\delta]$. Так само доводимо одностайну неперервність цієї послідовності на всьому проміжку $[0,T]$. Функція u^N належить до простору $C((0,T]; L^2(D_t))$ та одностайно неперервна на $[0,T]$, $u^N(x,y,0) = 0$. Отож, $u^N \to 0$ при $t \to 0$.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови* $(\mathbf{A})$, $(\mathbf{L})$, (Φ), *крім того,* $c_{0(1)}$, $d_{0(1)}$, $\lambda_{0(1)} \in L^\infty([0,T])$. *Тоді задача (1), (2), (19) не може мати більше одного узагальненого розв'язку.*

Доведення. Доведення цієї теореми повторює доведення теореми 2.

2. Нелінійне рівняння. В області Q_T розглянемо мішану задачу

$$u_t - \lambda(x,y,t)u_y - \psi(t)\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x,y,t)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n}c_i(x,y,t)u_{x_i} +$$

$$+d(x,y,t)u + g(x,y,t)|u|^{p-2}u = f(x,y,t), \tag{23}$$

$$u(x,y_0,t)=0, \quad (x,t)\in\Omega\times(0,T); \qquad u|_{\Sigma_T}=0, \tag{24}$$

$$u(x,y,0)=u_0(x,y). \tag{25}$$

Щодо коефіцієнтів рівняння (23) припускатимемо виконання умов (**A**), (**L**) та
(Ψ): $\psi\in C([0,T])$, $\psi(t)>0$, $t\in(0,T]$; $\psi(0)=0$,
(G): $g\in L^\infty(Q_T)$, $g(x,y,t)\geqslant g_0>0$ майже для всіх $(x,y,t)\in Q_T$, де g_0 – стала,
(P): $1<p<+\infty$.

Будемо розглядати простір $H_{0,\psi}(Q_T)$ як замикання множини нескінченно диференційовних функцій в $\overline{Q}_T$, які дорівнюють нулю в околі Σ_T та при $y=y_0$, за нормою $\|u;H_{0,\psi}(Q_T)\|^2=\int_{\overline{Q}_T}[|u|^2+|u_y|^2+\psi(t)\sum\limits_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^2]\,dx\,dy\,dt$. Позначимо

$$c_{0(2)}(t)=\sup_{Q_t}\sum_{i=1}^{n}\frac{|c_i(x,y,\tau)|^2}{\psi(\tau)}, \quad \lambda_{1(2)}=\sup_{Q_T}|\lambda_y(x,y,\tau)|, \quad d_{0(2)}=\sup_{Q_T}\sum_{i=1}^{n}|d(x,y,\tau)|.$$

$$c_{1(2)}(t)=\sup_{Q_t}\sum_{i=1}^{n}\frac{|c_{iy}(x,y,\tau)|^2}{\psi(\tau)}, \quad d_{1(2)}=\sup_{Q_T}\sum_{i=1}^{n}|d_y(x,y,\tau)|,$$

$$\delta_i \text{ – мале додатне число} \quad (i=1,2,...)$$

Щодо правої частини рівняння (23) припускатимемо виконання умови

(F1): $\displaystyle\int_{Q_T}[|f|^2+|f_y|^2]\,dx\,dy\,dt<+\infty$, $f(x,y_0,t)=0$ для майже всіх $(x,t)\in\Omega\times(0,T)$.

Означення 5. *Узагальненим розв'язком задачі (23)-(25) назвемо функцію* $u\in H_{0,\psi}(Q_T)\cap L^p(Q_T)$, $u\in C([0,T];L^2(D))$, *яка задовольняє рівність*

$$\int_{D_T}uv\,dx\,dy - \int_{D_0}u_0v\,dx\,dy + \int_{Q_T}\Big[-uv_t+\lambda(x,y,t)u_yv+\psi(t)\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,y,t)u_{x_i}v_{x_j}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}c_i(x,y,t)u_{x_i}v+d(x,y,t)uv+g(x,y,t)|u|^{p-2}uv-f(x,y,t)v\Big]\,dx\,dy\,dt=0 \tag{26}$$

для довільної такої функції v, *що* $v\in H_{0,\psi}(Q_T)$, $v_t\in L^2(Q_T)$.

Теорема 5. *Нехай виконуються умови (**A**), (**L**), (Ψ), (**G**), (**F1**), (**P**), крім того,* $c_{0(2)},c_{1(2)}\in L^\infty([0,T])$, $d_{0(2)},d_{1(2)},\lambda_{1(2)},\lambda_{2(2)}$ *– скінченні числа,* $u_0\in H^1(D)$, $u_0|_{\partial\Omega\times(0,y_0)}=0$, $u_0(\cdot,y_0)=0$; *якщо* $p>2$, *то* $g_{yy}\equiv0$, $g_y|_{y=0}\geqslant0$, *якщо* $1<p<2$, *то* $g_y\in L^{\frac{2p}{2-p}}(Q_T)$. *Тоді існує узагальнений розв'язок задачі (23)-(25).*

Доведення. Нехай $\{\varphi^k\}_{k=1}^{\infty}$ – послідовність лінійно незалежних функцій, ортонормована в $L^2(\Omega)$, та їхня лінійна оболонка всюди щільна в $H_0^1(\Omega)\cap L^p(\Omega)$. Нехай $\psi^s = \cos\frac{(2s-1)\pi}{2y_0}y$ $(s \geqslant 1)$. Позначимо $\{\varphi^{k,s}\}_{k,s=1}^{\infty} = \{\varphi^k(x)\psi^s(y)\}_{k,s=1}^{\infty}$. Тоді $\varphi^{k,s}\in H^1(D)$, $\varphi^{k,s}|_{\partial\Omega} = 0$, $\varphi^{k,s}|_{y=y_0} = 0$. Розглянемо функції $u^N(x,y,t) = \sum\limits_{k,s=1}^{N} c_{ks}^N(t)\varphi^{k,s}(x,y)$, $N\in\{1,2,\dots\}$, де c_{ks}^N є розв'язком задачі

$$\int\limits_{D_\tau} L_1(u^N,\varphi^{k,s})\,dx\,dy \equiv \int\limits_{D_\tau}\big[u_t^N\varphi^{k,s} - \lambda(x,y,t)u_y^N\varphi^{k,s} + \psi(t)\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t)u_{x_i}^N\varphi_{x_j}^{k,s} +$$

$$+\sum_{i=1}^{n} c_i(x,y,t)u_{x_i}^N\varphi^{k,s} + d(x,y,t)u^N\varphi^{k,s} + g(x,y,t)|u^N|^{p-2}u^N\varphi^{k,s} - f(x,y,t)\varphi^{k,s}\big]\,dx\,dy, \tag{27}$$

$$c_{ks}^N(0) = 0,\quad \{k,\,s\}\subset\{1,\dots,N\},\quad t\in[0,T]. \tag{28}$$

$$u_0^N(x,t) = \sum_{k,s=1}^{n} u_{0,k,s}^N\varphi^{k,s}(x,y),\quad \lim_{N\to\infty}\|u_0^N - u_0\|_{H^1(D)} = 0.$$

За теоремою Каратеодорі [25, с. 54] існує абсолютно неперервний на $[0,T]$ розв'язок задачі (27) - (28). Домножимо (27) на $c_{ks}^N(t)e^{-\nu t}$, де стала $\nu = \sup\limits_{[0,T]}\Big(\lambda_1 + \frac{2c_{0(2)}(t)}{a_0} + 2d_{0(2)}\Big)$, підсумуємо за s і k, проінтегруємо за t по проміжку $[0,\tau]$. Одержимо

$$\int\limits_{Q_\tau} L_1(u^N,u^N)e^{-\nu t}\,dx\,dy\,dt = 0. \tag{29}$$

Врахувавши вибір ν, оцінку $\int\limits_{Q_\tau} g(x,y,t)|u^N|^p e^{-\nu t}\,dxdydt \geqslant g_0\int\limits_{Q_\tau}|u^N|^p e^{-\nu t}dxdydt$, з (29) отримаємо

$$\int\limits_{D_\tau}(u^N)^2e^{-\nu\tau}\,dx\,dy + \int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega \lambda(x,0,t)(u^N)^2e^{-\nu t}\,dx\,dt + \int\limits_{Q_\tau}|u^N|^pe^{-\nu t}\,dx\,dy\,dt +$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\psi(t)\sum_{i=1}^{n}(u_{x_i}^N)^2e^{-\nu t}\,dx\,dy\,dt \leqslant M\left(\int\limits_{Q_\tau}|f|^2e^{-\nu t}\,dx\,dy\,dt + \int\limits_{D_0}u_0^2\,dxdy\right), \tag{30}$$

де стала M не залежить від N, $\tau\in(0,T]$. Домножимо (27) на $c_{ks}^N(t)\big(\frac{(2s-1)\pi}{2y_0}\big)^2$, підсумуємо за k,s, проінтегруємо за t від 0 до τ та замінимо значення $\sum\limits_{k,s=1}^{N}c_{ks}^N(t)\times$ $\times\big(\frac{(2s-1)\pi}{2y_0}\big)^2\varphi^{k,s}(x,y)$ на $-u_{yy}^N$. Матимемо

$$-\int\limits_{Q_\tau} L_1(u^N,u_{yy}^N)e^{-\nu t}\,dx\,dy\,dt = 0. \tag{31}$$

Перетворимо й оцінимо кожний з доданків цієї рівності окремо

$$\mathcal{I}_{25,26}\equiv-\int\limits_{Q_\tau}(u_t^N-\lambda(x,y,t)u_y^N)u_{yy}^N e^{-\nu t}dx\,dy\,dt\geqslant\frac{1}{2}\int\limits_{D_t}(u_y^N)^2e^{-\nu t}\,dx\,dy\Big|_{t=0}^{t=\tau}+$$

$$+\left(\frac{\nu}{2}-\frac{\lambda_{1(2)}}{2}\right)\int\limits_{Q_\tau}(u_y^N)^2e^{-\nu t}\,dx\,dy\,dt+\frac{1}{2}\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega\lambda(x,y_0,t)(u_y^N)^2e^{-\nu t}\,dx\,dt,$$

$$\mathcal{I}_{27}\equiv-\int\limits_{Q_\tau}\psi(t)\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,y,t)u_{x_i}^N u_{x_jyy}^N e^{-\nu t}\,dx\,dy\,dt\geqslant$$

$$\geqslant(a_0-\frac{a^1\delta_6}{2})\int\limits_{Q_\tau}\psi(t)\sum_{i=1}^n(u_{x_iy}^N)^2e^{-\nu t}dx\,dy\,dt-\frac{a^1}{2\delta_6}\int\limits_{Q_\tau}\psi(t)\sum_{i=1}^n(u_{x_i}^N)^2e^{-\nu t}\,dx\,dy\,dt,$$

тут $a^1=\max\limits_{i,j}\sup\limits_{Q_T}|a_{ijy}|$.

$$\mathcal{I}_{28,29}\equiv-\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n\left(c_i(x,y,t)u_{x_i}^N+d(x,y,t)u^N\right)u_{yy}^N e^{-\nu t}\,dx\,dy\,dt\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\left[\frac{c_1(t)}{\delta_6}\sum_{i=1}^n\psi(t)(u_{x_i}^N)^2+\right.$$

$$\left.+(\delta_6+\delta_7+\frac{d_1\delta_6}{2}+d_0)(u_y^N)^2+\frac{c_0(t)}{\delta_7}\sum_{i=1}^n\psi(t)(u_{x_iy}^N)^2+\frac{d_1}{2\delta_6}(u^N)^2\right]e^{-\nu t}\,dx\,dy\,dt.$$

$$\mathcal{I}_{30}\equiv-\int\limits_{Q_\tau}g(x,y,t)|u^N|^{p-2}u^N u_{yy}^N e^{-\nu t}\,dx\,dy\,dt\geqslant g_0(p-1)\int\limits_{Q_\tau}|u^N|^{p-2}(u_y^N)^2e^{-\nu t}\,dx\,dy\,dt-I,$$

де $I\equiv0$, якщо $p>2$ та $I\equiv\int_{Q_\tau}((g_y(x,y,t))^{\frac{2p}{2-p}}+\frac{1}{\delta_8^{\frac{p}{2}}}|u^N|^p+\delta_8(u_y^N)^2)e^{-\nu t}\,dx\,dy\,dt$, якщо $1<p<2$. Далі

$$\mathcal{I}_{31}\equiv\int\limits_{Q_\tau}f(x,y,t)u_{yy}^N e^{-\nu t}\,dx\,dy\,dt\geqslant-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\left(\delta_6|u_y^N|^2+\frac{|f_y(x,y,t)|^2}{\delta_6}\right)e^{-\nu t}\,dx\,dy\,dt.$$

На підставі оцінок інтегралів $\mathcal{I}_{24}-\mathcal{I}_{31}$ та вибору ν з (31) отримаємо нерівність

$$\int\limits_{D_\tau}(u_y^N)^2e^{-\nu\tau}\,dx\,dy+\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega\lambda(x,y_0,t)(u_y^N)^2e^{-\nu t}\,dx\,dt+\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n\psi(t)(u_{x_iy}^N)^2e^{-\nu t}\,dx\,dy\,dt\leqslant$$

$$\leqslant M_7\int\limits_{Q_T}(|f|^2+|f_y|^2)e^{-\nu t}\,dx\,dy\,dt+\int\limits_{D_0}(u_{0y}^N)^2\,dx\,dy. \tag{32}$$

Отже, з оцінок (30), (32) випливають оцінки

$$\|u^N;H_{0,\psi}(Q_T)\cap L^p(Q_{0,T})\|^2\leqslant M_8,\quad\int\limits_{D_\tau}(u^N)^2dxdy+\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega\lambda(x,0,\tau)(u^N)^2\,dxdt\leqslant M_8,\tag{33}$$

де стала M_8 не залежить від N. Оскільки

$$\int\limits_{Q_\tau} (|u^N|^{p-2}u^N)^{p'}\, dx\, dy\, dt < C, \tag{34}$$

де C – стала, то з оцінок (33), (34) випливають такі збіжності підпослідовності послідовності $\{u^N\}_{N=1}^{\infty}$ при $N \to \infty$, (за якою збережемо те саме позначення)

$$\begin{gathered} u^N \to u \text{ слабко в } H_{0,\psi}(Q_\tau) \cap L^p(Q_\tau), \quad |u^N|^{p-2}u^N \to \chi \text{ слабко в } L^{p'}(Q_\tau), \\ u^N \to u \ast- \text{ слабко в } L^\infty(Q_\tau), \quad u^N(x,y,T) \to \sigma_1 \ast- \text{ слабко в } L^\infty(D). \end{gathered} \tag{35}$$

Зауважимо, що $u \in L^2((0,T); H_{0,\psi}(D)) \bigcap L^p(Q_T)$, $u_t \in L^2((0,T); (H_{0,\psi}(D))^*) + {}+L^{p'}(D)$. Тоді $u \in C([0,T]; L^2(Q_T))$, в першому доданку рівності (29) можна застосувати формулу інтегрування частинами та $\sigma_1 = u(x,y,T)$.

Покажемо, що u буде розв'язком задачі (23)-(25). Із збіжностей (35) і рівності (28) отримуємо

$$\int\limits_{D_T} uv\, dxdy - \int\limits_{D_0} u_0 v\, dxdy + \int\limits_{Q_T} \Bigg[-uv_t + \lambda(x,y,t)u_y v + \psi(t) \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t) u_{x_i} v_{x_j} + \\ + \sum_{i=1}^{n} c_i(x,y,t) u_{x_i} v + d(x,y,t)uv + g(x,y,t)\chi - f(x,y,t)v \Bigg]\, dx\, dy\, dt = 0 \tag{36}$$

З рівняння (23) одержимо, що $u_t \in L^2(Q_T) + L^{p'}(Q_T) + L^2((0,T)\times(0,y_0); H^{-1}(\Omega))$, тобто u_t можна подати у вигляді суми $w_1 + w_2 + w_3$, де $w_1 \in L^2(Q_T)$, $w_2 \in L^{p'}(Q_T)$, $w_3 \in L^2((0,T)\times(0,y_0); H^{-1}(\Omega))$. Тоді $u_t \in L^r((0,T)\times(0,y_0); H^{-1}(\Omega))$, де $r = \min\{2, p'\}$. Доведемо, що $\chi = |u|^{p-2}u$.

$$\int\limits_{Q_\tau} (g(x,y,t)|u^N|^{p-2}u^N - g(x,y,t)|\varphi|^{p-2}\varphi)(u^N - \varphi)e^{-\nu t}\, dx\, dy\, dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_{D_t} (u^N)^2 e^{-\nu\tau} dx\, dy \Big|_{t=0}^{t=\tau} - \frac{1}{2}\int\limits_0^\tau \int\limits_{\Omega_\tau} \lambda(x,0,t)(u^N)^2 e^{-\nu t}\, dx\, dt + \int\limits_{Q_\tau} \Big[-\frac{\nu}{2}(u^N)^2 - \\ -\frac{\lambda_y(x,y,t)}{2}(u^N)^2 - \psi(t)\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t)(u^N_{x_i})^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{c_{ix_i}(x,y,t)}{2}(u^N)^2 - d(x,y,t)(u^N)^2 + \\ + f(x,y,t)u^N - [g(x,y,t)|u^N|^{p-2}u^N\varphi + g(x,y,t)|\varphi|^{p-2}\varphi(u^N - \varphi)]\Big] e^{-\nu t}\, dx\, dy\, dt.$$

Врахувавши отримані збіжності (35), нерівність $\lim\limits_{N\to\infty} \inf \|u^N; X\| \geqslant \|u; X\|$ (де X – банахів простір), знаходимо $0 \leqslant \int_{Q_\tau} [g(x,y,t)\chi(u-\varphi) - g(x,y,t)|\varphi|^{p-2}\varphi(u- {}-\varphi)]e^{-\nu t}\, dx\, dy\, dt$. Приймемо $\varphi = u - \varkappa w$, $\varkappa > 0$, $w \in H_{0,\psi}(Q_T) \cap L^p(Q_T)$. Тоді з останньої нерівності отримаємо $\varkappa \int_{Q_\tau} g(x,y,t)[\chi - |u-\varkappa w|^{p-2}(u-\varkappa w)]we^{-\nu t}\, dx\, dy\, dt \leqslant 0$. Поділимо цю рівність на $\varkappa$ та спрямуємо його до 0. Оскільки w довільне, то $\chi = |u|^{p-2}u$. Тому функція u задовольняє рівність (27).

Лема 1. *Нехай функція w є розв'язком задачі (23)-(25). Тоді для всіх $\tau \in (0,T]$ та довільного фіксованого числа α виконується нерівність*

$$\frac{1}{2}\int\limits_D |w(x,y,\tau)|^2 e^{-\alpha\tau}\,dx\,dy + \int\limits_{Q_\tau}\Big[-\lambda(x,y,t)w_{y_i}w + \psi(t)\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,y,t)w_{x_i}w_{x_j} + \\ + \sum_{i=1}^n c_i(x,y,t)w_{x_i}w + d(x,y,t)w^2 + g(x,y,t)|w|^p - \\ - f(x,y,t)w + \frac{\alpha}{2}w^2\Big]e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_D |u_0(x,y)|^2\,dx\,dy. \qquad (37)$$

У випадку, коли $u_0 \equiv 0$, то у формулі (37) матимемо знак рівності.

Доведення. Доведення леми аналогічне до доведення леми 1 [18].

Теорема 6. *Нехай виконуються умови* (**A**), (**L**), (Ψ), *(G), (P), крім того, $c_{0(2)}$, $d_{0(2)}$, $\lambda_{1(2)} \in L^\infty([0,T])$. Тоді задача (23)-(25) не може мати більше одного узагальненого розв'язку.*

Доведення. Припустимо, що існує два узагальнені розв'язки u^1, u^2 задачі (23)-(25). Позначимо їхню різницю $u = u^1 - u^2$. Функція u згідно з лемою 1 задовольнятиме рівність

$$\frac{1}{2}\int\limits_{D_T} u^2\,dx\,dy + \int\limits_{Q_T}\Big[-\frac{\nu}{2}u^2 + \lambda(x,y,t)u_y u + \psi(t)\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,y,t)u_{x_i}u_{x_i} + \sum_{i=1}^n c_i(x,y,t)u_{x_i}u + \\ + d(x,y,t)(u)^2 + g(x,y,t)(|u^1|^{p-2}u^1 - |u^2|^{p-2}u^2)u\Big]e^{-\nu t}\,dx\,dy\,dt = 0 \qquad (38)$$

Оскільки $\int_{Q_\tau} g(x,y,t)(|u^1|^{p-2}u^1 - |u^2|^{p-2}u^2)ue^{-\nu t}dxdydt \geqslant 0$, то з (38) випливає оцінка $\int_{D_\tau}(u)^2 e^{-\nu\tau}\,dxdy + \int_0^\tau\int_\Omega \lambda(x,0,t)(u)^2 e^{-\nu t}dxdt + \int_{Q_\tau}\sum\limits_{i=1}^n \psi(t)(u_{x_i})^2 e^{-\nu t}dxdydt \leqslant 0$. Звідси знаходимо, що $u = 0$, тобто $u^1 = u^2$.

Дослідження частково підтримані ґрантом НАН України для молодих вчених (номер держреєстрації 0107U007278) та ґрантом Президента України для підтримки наукових досліджень молодих учених (номер держреєстрації 0108U009507).

---

1. *Калашников А.С.* Задача без начальных условий в классах растущих функций для некоторых линейных вырождающихся параболических систем второго порядка / *Калашников А.С.* // Вестник МГУ. Сер. математика, механика. – 1971. – №3. – С. 42-48.
2. *Калашников А.С.* Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка / *Калашников А.С.* // Успехи мат. наук. – 1987. – Т.42, №2. – С.135-176.
3. *Богатова В.П.* Разрешимость начально - краевых задач для параболических уравнений высокого порядка с вырождением по пространственной переменной / *Богатова В.П., Глушко В.П.* // Докл. АН СССР. – 1986. – Т. 291, № 3. – С. 531-534.

4. *Жемухов Х.К.* Краевые задачи со смещением для одного вырождающегося гиперболического уравнения четвертого порядка / *Жемухов Х.К.* // Укр. мат. журн. – 1989. – Т. 41, №1. – С.89-93.
5. *Лавренюк С.П.* Задачі для еволюційних систем з виродженням, які містять другу похідну за часом: дис. ... докт. фіз.- мат. наук. / *Лавренюк С. П.* – Львів, 1995. – 288 с.
6. *Лавренюк С.П.* Змішана задача для однієї слабко виродженої системи / *Лавренюк С.П.* // Доп. АН України. Матем., природозн., техн. науки. – 1993. – №5. – С. 18-20.
7. *Лавренюк С.П.* Про єдиність розв'язку деяких еволюційних систем з виродженням / *Лавренюк С.П.* // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 1998. – Вип. 51. – С. 20-25.
8. *Лавренюк С.П.* Решение почти всюду смешанной задачи для одной вырождающейся линейной эволюционной системы / *Лавренюк С.П.* // Сиб. мат. журн. – 2001. – Т. 42, №1. – С. 76-87.
9. *Лавренюк С.П.* Смешанная задача для сильно вырождающейся эволюционной системы // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30, №8. – С. 1405-1411.
10. *Лавренюк С.П.* Внутрішня гладкість розв'язку мішаної задачі для еволюційної системи з виродженням *Лавренюк С.П., Процах Н.П.* // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". Серія прикладна матем. – 2000. – №411. – С. 221-228.
11. *Майоров И.В.* Некоторые задачи для одной вырождающейся гиперболической системы / *Майоров И.В.* // Диференц. уравнения. – 1977. – Т. 13, №2. – С. 369-372.
12. *Мединський І.П.* Задача Коші для квазілінійних параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині *Мединський І.П.* // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Математика. – 2001. – Вип. 111. – С. 90-95.
13. *Мединський І.П.* Про коректну розв'язність параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині / *Мединський І.П., Івасишен С.Д.* // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Математика. – Вип. 76. – 2000. – С. 71-76.
14. *Процах Н.* Існування розв'язку однієї еволюційної системи з виродженням / *Процах Н.* // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 1999. – Вип. 54. – С. 159-170.
15. *Ивасишен С.Д.* $2\vec{b}$ параболические уравнения с вырождением по части переменных / *Ивасишен С.Д., Эйдельман С.Д.* // Докл. РАН. – 1998. – Т. 360, №3. – С. 303-305.
16. *Амиров Ш.* Смешанная задача для ультрапараболического уравнения в ограниченной области / *Амиров Ш.* // Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. – Новосиб., 1984. – С. 173-179.
17. *Ильин А.М.* Об одном классе ультрапараболических уравнений / *Ильин А. М.* // Докл. АН СССР. – 1964. – Т. 159, №6. – С. 1214-1217.
18. *Лавренюк С.П.* Мішана задача для нелінійного ультрапараболічного рівняння, яке узагальнює рівняння дифузії з інерцією / *Лавренюк С.П., Процах Н.П.* // Укр. мат. журн. - 2006. — Т. 58, №9. - С. 1192-1210.
19. *Орлова С.А.* О первой краевой задаче для прямо и обратно ультрапараболического уравнения / *Орлова С.А.* // Сиб. мат. журн. – 1990. – Т. 31, №6. – С. 211-215.
20. *Паскалев Г.П.* Об исследовании одной краевой задачи для ультрапараболического уравнения с постоянными коэффициентами вариационным методом / *Паскалев Г.П.* // Дифференц. уравнения. – 1992. – Т. 28, №9. – С. 1640-1642.
21. *Пятков С.Г.* Разрешимость краевых задач для одного ультрапараболического уравнения / *Пятков С.Г.* // Некласические уравнения и уравнения смешанного типа. – Новосиб., 1990. – С. 182 - 197.
22. *Райчинов И.* Гранични задачи от Нойман-Дирихлетов тип за ултрапараболични уравнения с две "времена"/ *Райчинов И.* // Научн. тр. Висш. икон. ин-т София. – 1981. – №1. – С.265-301.

23. *Улукназаров М.Ж.* Решение одной краевой задачи для многомерного уравнения ультрапараболического типа / *Улукназаров М.Ж.* // Вопросы вычисл. и прикладн. матем. – 1986. – Вып 80. – С. 60-67.
24. *Халмурадов Ч.Г.* Об априорных оценках решений начально-краевой задачи для нелинейного вырождающегося ультрапараболического уравнения / *Халмурадов Ч.Г.* // Применения методов функц. анализа к неклас. уравн. мат. физики. – Новосиб., 1989. – С. 176-182.
25. *Коддингтон Э.А.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений / *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* – М.: Изд-во "Иностранная литература", 1958. – 474 с.
26. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / *Лионс Ж.-Л.* – М.: Мир. – 1972. – 587 с.

MIXED PROBLEM FOR DEGENERATE ULTRAPARABOLIC EQUATION

Nataliya PROTSAKH[1,2]

[1] *National Forestry Engineering University of Ukraine,*
79057, L'viv, Generala Chuprynky str., 103
[2] *Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics*
National Academy of Sciences of Ukraine,
79060, L'viv, Naukova Str., 3b

The mixed problem for degenerate ultraparabolic equations is considered. Equations degenerate on the initial plane. Conditions of existence and uniqueness for weak solution of the mixed problem that depend on the type of degeneration are obtained.

Key words: ultraparabolic equation, weak degeneration, strong degeneration, mixed problem, weak solution.

Стаття надійшла до редколегії 21.03.2008

Прийнята до друку 22.10.2008