ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат. 2008. Вип.68. С.207-214 *Ser.Mech-Math. 2008. Vol.68. P.207-214*

УДК 513.88

НЕВІД'ЄМНІ ТА АКРЕТИВНІ ЗБУРЕННЯ ОПЕРАТОРА ТРЕТЬОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ВИРАЗУ ШТУРМА-ЛІУВІЛЛЯ З ОБМЕЖЕНИМ ОПЕРАТОРНИМ ПОТЕНЦІАЛОМ

Ганна ПІПА

Бережанський агротехнічний інститут,
47501, Тернопільська обл., Бережани, вул. Академічна, 20

Досліджено один клас диференціально-граничних операторів типу Штурма-Ліувілля з некласичними крайовими умовами. Знайдено умови максимальної невід'ємності, максимальної акретивності та розв'язності досліджуваних операторів.

Ключові слова: оператор, простір граничних значень, розширення.

Досліджуватимемо диференціально-граничні оператори (ДГО) другого порядку, які діють у гільбертовому просторі нескінченновимірних вектор-функцій. Зазначимо, що такі оператори та їхні абстрактні теоретико-функціональні моделі були об'єктом дослідження багатьох математиків (див., наприклад, [1]-[3]). Наше зацікавлення теорією ДГО мотивовано у працях [4]-[5], продовженням яких є ця стаття.

Як і в [4]-[5], використовуватимемо такі позначення: $D(T)$, $R(T)$, $ker\,T$ – відповідно область визначення, область значень і многовид нулів (лінійного) оператора T; $\mathcal{B}(X,Y)$ – сукупність лінійних неперервних операторів $A : X \to Y$ таких, що $D(A) = X$; $\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}(X,X)$; $\mathcal{C}(X)$ – клас замкнених щільно визначених лінійних операторів у просторі X; $A|E$ – звуження відображення A на множину E; $\mathbf{1}_X$ – тотожне перетворення простору X; $(.|.)_X$ – скалярний добуток у просторі X; A^* – оператор, спряжений з оператором A; $\dot{+}$, $\oplus$ – символи прямої та ортогональної суми, зокрема, якщо $A_i : X \to Y_i$, $i = 1,...,n$, – лінійні оператори, то запис $A = A_1 \oplus ... \oplus A_n$ означає, що $\forall\, x \in X \quad Ax = (A_1x,...,A_nx)$.

1. Попередні відомості та формулювання задачі. Нехай $-\infty < a < b < +\infty$, H_0 – сепарабельний гільбертів простір і для будь-якого $x \in [a,b]$ $p(x) = p(x)^* \in \mathcal{B}(H_0)$ – додатно визначений оператор, причому оператор-функція $x \mapsto p(x)$ сильно неперервна на $[a,b]$. Розглянемо диференціальний вираз

$$l[y] = -y''(x) + p(x)y \quad (x \in [a,b]) \tag{1}$$

і позначимо через L та L_0 відповідно максимальний і мінімальний оператори, породжені в гільбертовому просторі $H \stackrel{\mathrm{def}}{=} L_2(H_0;(a,b))$ зі скалярним добутком

$$\forall\, y,z \in H \quad (y|z) = \int\limits_a^b (y(x)|z(x))_{H_0}dx$$

цим виразом. Відомо [6], що $L, L_0 \in \mathcal{C}(H)$, $L_0^* = L$, а трійка $(\mathcal{H},\Gamma_1,\Gamma_2)$, де $\mathcal{H} = H_0 \oplus H_0$; $\forall\ y \in D(L)$ $\Gamma_1 y = (y'(a), -y'(b))$, $\Gamma_2 y = (y(a), y(b))$, є простором граничних значень (ПГЗ) оператора L_0. Це означає [7], що

$$\begin{aligned} &R(\Gamma_1 \oplus \Gamma_2) = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}, \\ &\forall\, y,z \in D(L) \ \ (Ly|z) - (y|Lz) = (\Gamma_1 y|\Gamma_2 z)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_2 y|\Gamma_1 z)_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \tag{2}$$

Відомо також, що $(H_e, (.|.)_e)$, де

$$H_e = \{y \in H : \quad y \text{ абсолютно неперервна на } [a,b], \quad y' \in H,\ y(a) = y(b) = 0\},$$

$$\forall\, u,v \in H_e \quad (u|v)_e = \int\limits_a^b [(u'(x)|v'(x))_{H_0} + (p(x)u(x)|v(x))_{H_0}]dx,$$

є енергетичним простором оператора L_0, а $L_F \stackrel{\mathrm{def}}{=} L|ker\Gamma_2$ – його жорстким, тобто фрідріхсівським розширенням (деталі – див. [8]-[10]).

Для будь-якого оператора $\Lambda : H^1 \stackrel{\mathrm{def}}{=} H_e \dot{+} kerL \to G$, де G – допоміжний гільбертів простір, такого, що $\Lambda|H_e \in \mathcal{B}(H_e, G)$, оператор $\Lambda^\bullet \in \mathcal{B}(G, H_e)$ визначаємо, враховуючи умови

$$\forall\, u \in H_e \quad \forall\, g \in G \quad (\Lambda u|g)_G = (u|\Lambda^\bullet g)_e.$$

Нехай $a < c_1 < c_2 < b$. Визначимо оператори L_{min}, L_{max} за допомогою співвідношень

$$D(L_{min}) = \{y \in D(L_0) : \quad y(c_1) = y(c_2) = 0\}, \quad L_{min} \subset L_0;$$

$$D(L_{max}) = \{y \in H : \quad y \text{ абсолютно неперервна на } [a,b],$$

$$y' \text{ абсолютно неперервна на } [a,c_1) \cup (c_1,c_2) \cup (c_2,b],\ l_{cl}[y] \in H\}$$

$$\forall\, y \in D(L_{max}) \qquad L_{max} = l_{cl}[y].$$

Під $l_{cl}[y]$ маємо на увазі вираз (1), в якому всі похідні треба розуміти у класичному сенсі.

Опишемо основний об'єкт нашого дослідження. Припустимо, що Φ_1, $\Phi_2 \in \mathcal{B}(H, H_0)$, $\beta_{ij} \in \mathcal{B}(H_0)$ $(i,j = 1,2)$, $B \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\beta_{ij})_{i,j=1}^2$ і введемо в розгляд оператор T_B, область визначення якого $D(T_B)$ складається з усіх тих $y \in D(L_{max})$, які задавольняють умови

$$y'(c_1+0) - y'(c_1-0) = y(a), \qquad y'(c_2+0) - y'(c_2-0) = y(b), \tag{3}$$

$$\begin{cases} y'(a) - (\beta_{11}y(a) + \beta_{12}y(b)) = \Phi_1 y + y(c_1), \\ \\ -y'(b) - (\beta_{21}y(a) + \beta_{22}y(b)) = \Phi_2 y + y(c_2), \end{cases} \tag{4}$$

а закон дії такий:

$$\forall\, y \in D(T_B) \quad T_B y = l_{cl}[y] + \Phi_1^* y(a) + \Phi_2^* y(b). \tag{5}$$

Мета цієї статті – знайти критерії максимальної невід'ємності, максимальної акретивності та коректної оборотності оператора T_B. Нагадаємо, що лінійний оператор $T : H \to H$ називається акретивним, якщо для будь-якого $y \in D(T)$ $Re(Ty|y) \geq 0$ і максимально акретивним, якщо, крім того, він не має акретивних розширень.

Перш ніж розпочинати розв'язування сформульованої задачі, перепишемо співвідношення (3)-(5) в дещо іншій формі. Для цього введемо такі позначення:

$$\forall\, u \in H^1 \quad \Psi u = (u(c_1), u(c_2)), \quad \Phi = \Phi_1 \oplus \Phi_2, \quad \chi = \Phi + \Psi.$$

Нехай для будь-якого $y \in D(L_{max})$

$$\Gamma_1^{[\Psi]} y = (y'(a), -y'(b)), \quad \Gamma_2^{[\Psi]} y = (y(a), y(b)),$$

$$\Gamma_3^{[\Psi]} y = \left(y'(c) \Big|_{c_1 - 0}^{c_1 + 0} \;,\; y'(c) \Big|_{c_2 - 0}^{c_2 + 0} \right),$$

$$\Gamma_4^{[\Psi]} y = (y(c_1), y(c_2)), \quad (\text{тобто } \Gamma_4^{[\Psi]} = \Psi | D(L_{max})).$$

Зрозуміло, що

$$D(T_B) = \{ y \in D(L_{max}) : \quad \Gamma_2^{[\Psi]} y = \Gamma_3^{[\Psi]} y, \;\; \Gamma_1^{[\Psi]} y - B\Gamma_2^{[\Psi]} y - \Gamma_4^{[\Psi]} y = \Phi y \}, \tag{6}$$

$$\forall\, y \in D(T_B) \quad T_B y = L_{max} y + \Phi^* \Gamma_2^{[\Psi]} y. \tag{7}$$

Враховуючи рівність $\Phi^\bullet = L_F^{-1} \Phi^*$ і теорему 3 праці [5], легко переконатися, що (6)-(7) можна переписати у такому вигляді:

$$D(T_B) = \{ y \in D(L) + R(\chi^\bullet) : \quad y + \chi^\bullet \Gamma_2^{[\Psi]} y \in D(L), \;\; \Gamma_1^{[\Psi]} y - B\Gamma_2^{[\Psi]} y = \chi y \},$$

$$\forall\, y \in D(T_B) \quad T_B y = L(y + \chi^\bullet \Gamma_2^{[\Psi]} y).$$

2. Оператор T_0 та його ПГЗ. Визначимо оператор T_0 так:

$$D(T_0) = \{ y \in D(T_B) : \quad \Gamma_2^{[\Psi]} y = 0 \}, \quad T_0 \subset T_B.$$

Зрозуміло, що

$$D(T_0) = \{ y \in D(L_F) : \quad \Gamma_1^{[\Psi]} y = \chi y \}, \quad T_0 \subset L_F, \tag{8}$$

тому T_0 – додатно визначений оператор. Зазначимо, що $T_B, T_0 \in \mathcal{C}(H)$. Це випливає з теореми 5 праці [5] та теореми 2 праці [11].

Лема 1.

$$D(T_0^*) = \{z \in D(L_{max}) : \quad \Gamma_3^{[\Psi]} y = \Gamma_2^{[\Psi]} y\}, \tag{9}$$

$$\forall\, z \in D(T_0^*) \quad T_0^* z = L_{max} z + \Phi^* \Gamma_2^{[\Psi]} z. \tag{10}$$

Доведення. Враховуючи (8) та теореми 1 і 2 з [5], бачимо, що

$$\forall\, y \in D(T_0) \quad \forall\, z \in D(L_{max})$$

$$(T_0 y|z) = (L_{max} y|z) = (y|L_{max}) + (y|\Phi^* \Gamma_2^{[\Psi]} z) + (\Gamma_4^{[\Psi]} y|\Gamma_2^{[\Psi]} z - \Gamma_3^{[\Psi]} z)_{\mathcal{H}}.$$

Звідси і з теореми 6 згаданої праці випливає правильність співвідношень (9)-(10). Лему доведено.

Наслідок 1. $T_0 \subset T_B \subset T_0^*$, *точніше*

$$D(T_B) = \{y \in D(T_0^*) : \quad \Gamma_1^{[\Psi]} y - \chi y = B \Gamma_2^{[\Psi]} y\}. \tag{11}$$

Лема 2. $(H, \Gamma_1^{[\Psi]} - \chi, \Gamma_2^{[\Psi]})$ *– ПГЗ оператора* T_0.

Доведення. Зазначимо, що $R((\Gamma_1^{[\Psi]} - \chi) \oplus \Gamma_2^{[\Psi]}) = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. Це випливає з теореми 5 праці [5] та теореми 1 праці [11]. Враховуючи (9)-(10) та теореми 1 і 2 з [5], бачимо, що (порівняти з (1))

$$\forall\, y, z \in D(T_0^*) \quad (T_0^* y|z) - (y|T_0^* z) = (L_{max} y + \Phi^* \Gamma_2^{[\Psi]} y|z) - (y|L_{max} z + \Phi^* \Gamma_2^{[\Psi]} z) =$$

$$= (\Gamma_1^{[\Psi]} y - \chi y|\Gamma_2^{[\Psi]} z)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_2^{[\Psi]} y|\Gamma_1^{[\Psi]} z - \chi z)_{\mathcal{H}}.$$

Наслідок 2. $T_B^* = T_{B^*}$, *зокрема* $T_B = T_B^*$ *тоді і тільки тоді, коли* $B = B^*$.

3. Про одну функцію Вейля оператора T_0.

Зауваження 1. Нехай $\{\omega_1(x,\lambda), \omega_2(x,\lambda)\}$ – фундаментальна система розв'язків рівняння $-Y'' + p(x)Y = \lambda Y$ така, що

$$\omega_1(a,\lambda) = \omega_2(b,\lambda) = \mathbf{1}_{H_0}, \quad \omega_1(b,\lambda) = \omega_2(a,\lambda) = 0 \ (\lambda \le 0),$$

$$Z_\lambda h = Z_\lambda(h_1, h_2) = \omega_1(.,\lambda) h_1 + \omega_2(.,\lambda) h_2 \quad (h \in \mathcal{H}),$$

$$\Omega(\lambda) = \Gamma_1 Z_\lambda = \begin{pmatrix} \omega_1'(a,\lambda) & \omega_2'(a,\lambda) \\ \\ -\omega_1(b,\lambda) & -\omega_2'(b,\lambda) \end{pmatrix}.$$

Відомо [12], що $\Omega(\lambda)$ є функцією Вейля (в сенсі означення, запропонованого в цій статті) оператора L_0, яка відповідає ПГЗ $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$, а $(\mathcal{H}, \Gamma_1 - \Omega(0)\Gamma_2, \Gamma_2)$ – його позитивним ПГЗ (в сенсі означення, запропонованого в [13]), що відповідає його жорсткому розширенню (далі – скорочено: *жорстким ПГЗ*). Тому [14], [15]

$$s - \lim_{\lambda \to -\infty} (\Omega(\lambda) - \Omega(0))^{-1} = 0. \tag{12}$$

Зауваження 2. Нагадаємо, що ПГЗ $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ додатно визначеного оператора L_0 називається позитивним, якщо $\ker \Gamma_1 = D(L_0) \dot{+} \ker L_0^*$, а $L| \ker \Gamma_2$ – додатно визначений оператор.

У працях [13], [17] доведено критерії максимальної невід'ємності, максимальної акретивності та коректної оборотності оператора L_B такого, що $L_0 \subset L_B \subset L_0^*$, в термінах позитивних ПГЗ.

Лема 3. *Приймемо* $L_\lambda = (L_F - \lambda \mathbf{1}_H)^{-1}$ $(\lambda \leq 0)$. *Тоді*

$$(\chi L_\lambda)^* = (\lambda L_\lambda + \mathbf{1}_H)\chi^\bullet, \tag{13}$$

$$(\chi Z_\lambda)^* = \Gamma_1^{[\Psi]}(\chi L_\lambda)^*. \tag{14}$$

Доведення. Враховуючи тотожність $L_F L_\lambda = \mathbf{1}_H + \lambda L_\lambda$, бачимо, що

$$\forall\, y \in H, \forall\, h \in \mathcal{H} \ \ (\chi L_\lambda y|h)_{\mathcal{H}} = (L_\lambda y|\chi^\bullet h)_e = (L_F L_\lambda y|\chi^\bullet h) = (y|(\lambda L_\lambda + \mathbf{1}_H)\chi^\bullet h).$$

Враховуючи (13), переконуємось, що $\Gamma_1^{[\Psi]}(\chi L_\lambda)^* = \lambda Z_\lambda^* \chi^\bullet + \Gamma_1^{[\Psi]}\Psi^\bullet + \Gamma_1^{[\Psi]} L_F^{-1}\Phi^*$. Але $\Gamma_1^{[\Psi]}\Psi^\bullet = (\Psi Z_0)^*$ (це випливає зі сказаного в [5]), тому

$$\Gamma_1^{[\Psi]}(\chi L_\lambda)^* = \lambda Z_\lambda^* \chi^\bullet + (\chi Z_0)^*. \tag{15}$$

Використовуючи тотожність $Z_\lambda - Z_0 = \lambda L_F^{-1} Z_\lambda$ (див. [15]), отримуємо

$$\forall\, h, g \in \mathcal{H} \ \ ((\chi Z_\lambda)^* h|g)_H = (h|\chi Z_0 g)_{\mathcal{H}} + (h|\chi(Z_\lambda - Z_0)g)_H = (h|\chi Z_0 g)_{\mathcal{H}} +$$

$$+ (\lambda \chi^\bullet h|L_F^{-1} Z_\lambda g)_e = ((\chi Z_0)^* h|g)_{\mathcal{H}} + (\lambda Z_\lambda^* \chi^\bullet h|g)_{\mathcal{H}},$$

тобто $(\chi Z_\lambda)^* = (\chi Z_0)^* + \lambda Z_\lambda^* \chi^\bullet$. Звідси і з (15) випливає (14).

Твердження 1. *Оператор-функція*

$$\widehat{\Omega}(\lambda) = \Omega(\lambda) - 2Re(\chi Z_\lambda) + \chi(\chi L_\lambda)^*$$

є функцією Вейля оператора T_0, що відповідає ПГЗ $(\mathcal{H}, \Gamma_1^{[\Psi]} - \chi, \Gamma_2^{[\Psi]})$ цього оператора.

Доведення. Позначимо через $\widehat{Z}_\lambda h$ $(h \in \mathcal{H})$ розв'язок задачі

$$T_0^* y = \lambda y, \ \ \Gamma_2^{[\Psi]} y = h.$$

Враховуючи рівності $\Gamma_2^{[\Psi]}\chi^\bullet = \Gamma_2^{[\Psi]} L_\lambda = 0$, $\Gamma_2^{[\Psi]} Z_\lambda h = h$, бачимо, що $y = Z_\lambda h - (\mathbf{1}_H + \lambda L_\lambda)\chi^\bullet h$, тому (див. (13)) $\widehat{Z}_\lambda = Z_\lambda - (\mathbf{1}_H + \lambda L_\lambda)\chi^\bullet = Z_\lambda - (\chi L_\lambda)^*$.

Відомо [16], що шукана функція Вейля (позначимо її тимчасово $W(\lambda)$) має вигляд $W(\lambda) = (\Gamma_1^{[\Psi]} - \chi)\widehat{Z}_\lambda$. Звідси, враховуючи лему 3, отримуємо

$$W(\lambda) = (\Gamma_1^{[\Psi]} - \chi)(Z_\lambda - (\chi L_\lambda)^*) = \Omega(\lambda) - \chi Z_\lambda - \Gamma_1^{[\Psi]}(\chi L_\lambda)^* + \chi(\chi L_\lambda)^* =$$

$$= \Omega(\lambda) - \chi Z_\lambda - (\chi Z_\lambda)^* + \chi(\chi L_\lambda)^* = \widehat{\Omega}(\lambda).$$

Наслідок 3.

$$\widehat{\Omega} = \Omega - 2Re(\chi Z_0) + \chi\chi^{\bullet}, \quad \widehat{\Omega}(0) = \Omega(0) - 2Re(\chi Z_0) + \chi\chi^{\bullet}. \tag{16}$$

4. Основний результат. З висловленого в попередньому пункті і в [12] випливає, що $(\mathcal{H}, (\Gamma_1^{[\Psi]} - \chi) - \widehat{\Omega}(0)\Gamma_2^{[\Psi]}, \Gamma_2^{[\Psi]})$ є позитивним ПГЗ оператора T_0, зокрема м'яке в сенсі [9] розширення T_K цього оператора має такий вигляд:

$$D(T_K) = \{y \in D(T_0^*) : \quad (\Gamma_1^{[\Psi]} - \chi)y - \widehat{\Omega}(0)\Gamma_2^{[\Psi]}y = 0\}, \quad T_K \subset T_0^*.$$

Ми хочемо показати, що зазначений ПГЗ є жорстким, тобто, що L_F є жорстким розширенням не тільки для L_0, а й для T_0. Це справджується тоді і тільки тоді, коли ([14], [15])

$$s - \lim_{\lambda\to-\infty} (\widehat{\Omega}(\lambda) - \widehat{\Omega}(0))^{-1} = 0. \tag{17}$$

З відомих властивостей розширень за Фрідріхсом випливає, що достатньо переконатися у правильності (17) в ситуації, коли $p(x) = 0$. Зазначимо, що у цій ситуації

$$\omega_1(x,\rho) = \frac{sh(\rho(b-x))}{sh(\rho(b-a))}\mathbf{1}_{H_0}, \quad \omega_2(x,\rho) = \frac{sh(\rho(x-a))}{sh(\rho(b-a))}\mathbf{1}_{H_0} \tag{18}$$

(тут $\rho = \sqrt{-\lambda}$).

Теорема 1. $(\mathcal{H}, (\Gamma_1^{[\Psi]} - \chi) - \widehat{\Omega}(0)\Gamma_2^{[\Psi]}, \Gamma_2^{[\Psi]})$ *– жорсткий ПГЗ оператора* T_0.

Доведення. Введемо позначення $M(\lambda) = \Omega(\lambda) - \Omega(0)$, $\widehat{M}(\lambda) = \widehat{\Omega}(\lambda) - \widehat{\Omega}(0)$. Маємо $\widehat{M}(\lambda) = M(\lambda) + \widetilde{M}(\lambda)$, де $\widetilde{M}(\lambda) = -2Re(\chi Z_\lambda - \chi Z_0) + \chi(\chi L_\lambda)^* - \chi\chi^{\bullet}$, а отже, $\widehat{M}(\lambda)^{-1} = (\mathbf{1}_H - \widehat{M}(\lambda)^{-1}\widetilde{M}(\lambda))M(\lambda)^{-1}$. Існування при $\lambda < 0$ операторів $\widehat{M}(\lambda)^{-1}$, $M(\lambda)^{-1}$, а також їхніх сильних границь при $\lambda \to -\infty$ випливає, наприклад, з результатів праці [16]. Крім того, $s - \lim\limits_{\lambda\to-\infty} M(\lambda)^{-1} = 0$ (див. (12)). Тому (17) буде доведено таке: ми покажемо, що існує $s - \lim\limits_{\lambda\to-\infty} \widetilde{M}(\lambda)^{-1}$. Саме цьому і присвячена частина доведення, яка залишилася.

$$\text{а) } s - \lim_{\lambda\to-\infty} Re(\chi Z_\lambda) = 0. \tag{19}$$

Як зазначалося вище, достатньо обмежитися ситуацією, коли $p(x) = 0$, а отже, оператор-функції $\omega_1(.,\rho)$, $\omega_2(.,\rho)$ мають вигляд (18). У цій ситуації

$$||\omega_i(.,\rho)||^2 = \frac{sh(2\rho(b-a)) - 2\rho(b-a)}{2\rho(ch(2\rho(b-a)) - 1)} \underset{\rho\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad (i = 1, 2),$$

тому $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} Z_\lambda = 0$, а отже, $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} Re(\Phi Z_\lambda) = 0$ (не тільки сильно, а й рівномірно).

Для будь-якого $c \in (a, b)$

$$||\omega_1(c,\rho)||^2 = \frac{sh(\rho(b-c))}{sh(\rho(b-a))} \underset{\rho\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad ||\omega_2(c,\rho)||^2 = \frac{sh(\rho(c-a))}{sh(\rho(b-a))} \underset{\rho\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

тому $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} Re(\Psi Z_\lambda) = 0$. Співвідношення (19) доведено.

б) Існує $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} \chi(\chi L_\lambda)^*$. Справді, приймемо $\chi(\lambda) \overset{\text{def}}{=} \chi(\chi L_\lambda)^*$ $(\lambda \le 0)$. Зрозуміло, що

$\chi'(\lambda) = \chi((\chi L_\lambda)')^* = \chi(\chi L_\lambda^2)^* = \chi(\chi L_\lambda L_\lambda)^* = (\chi L_\lambda)(\chi L_\lambda)^* \geq 0$, тому оператор-функція $\chi(\lambda)$ монотонно неспадна.

З невід'ємності оператора L_F випливає, що $\forall\ \lambda < 0 \quad 0 \leq \lambda L_\lambda + \mathbf{1}_H \leq \mathbf{1}_H$. Звідси і з (13) бачимо, що для всіх $h \in \mathcal{H}$ справджується $(\chi(\chi L_\lambda)^* h|h)_\mathcal{H} = ((\mathbf{1}_H + \lambda L_\lambda) L_F^{1/2}\chi^\bullet h | L_F^{1/2}\chi^\bullet h) \geq 0$. Отож, оператор-функція $\chi(\lambda)$ обмежена знизу. Застосовуючи теорему про існування сильної границі монотонної обмеженої оператор-функції, переконуємося у правильності твердження *б*, а з ним – і самої теореми.

Теорема 2. *Оператор T_B максимально невід'ємний (максимально акреативний; коректно оборотний) тоді і тільки тоді, коли оператор*

$$\widehat{B} \stackrel{\text{def}}{=} B - \Omega(0) + 2Re(\chi Z_0) - \chi\chi^\bullet$$

є невід'ємним (акретивним; коректно оборотним) в $B(\mathcal{H})$.

Доведення. Оскільки умову (11) можна переписати у вигляді

$$D(T_B) = \{y \in D(T_0^*): \quad (\Gamma_1^{[\Psi]} - \chi)y - \widehat{\Omega}(0)\Gamma_2^{[\Psi]}y = \widehat{B}\Gamma_2^{[\Psi]}y\},$$

то правильність цієї теореми випливає безпосередньо з теореми 1 та результатів праць [13] і [17].

Наслідок 4. *T_B – самоспряжений додатно визначений оператор тоді і тільки тоді, коли $\widehat{B}$ – додатно визначений оператор.*

---

1. *Лянце В.Э.* О некоторых соотношениях между замкнутыми операторами / *Лянце В.Э.* // Докл. АН СССР. – 1972. – Т. 204, №3. – С. 542-545.
2. *Krall A.M.* The development of general differential and differential-boundary systems / *Krall A.M.* // Rocky J. Math. – 1975. – Vol.5. – P. 493-542.
3. *Горбачук В.И.* Теория расширений симметрических операторов и граничные задачи для дифференциальных уравнений / *Горбачук В.И., Горбачук М.Л., Кочубей А.Н.* // Укр. мат. журн. – 1989. – Т. 41, №10. – С. 1299-1313.
4. *Піпа Г.М.* Умови максимальної дисипативності для одного класу замкнених операторів у гільбертовому просторі / *Піпа Г.М., Сторож О.Г.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2005. – Вип. 64. – С. 190-200.
5. *Піпа Г.М.* Про диференціально-граничний оператор типу Штурма-Ліувілля з багатоточково-інтегральними крайовими умовами у просторі нескінченновимірних вектор-функцій / *Піпа Г.М., Сторож О.Г.* // Доп. НАН України. – 2006. – №10. – С. 34-39.
6. *Рофе-Бекетов Ф.С.* Самосопряженные расширения дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций / *Рофе-Бекетов Ф.С.* // Докл. АН. СССР. – 1969. – Т. 184, №5. – С. 1034-1037.
7. *Кочубей А.Н.* О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений / *Кочубей А.Н.* // Мат. заметки. – 1975. – Т. 17, №1. – С. 41-48.
8. *Горбачук В.И.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений / *Горбачук В.И., Горбачук М.Л.* – К.: Наукова думка, 1984. – 284 с.
9. *Крейн М.Г.* Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ес приложения. I, II / *Крейн М.Г.* // Мат. сб. – 1947. – Т. 20, №3. – С.431-495; Т. 21, №3. – С. 365-404.

10. *Михлин С.Г.* Курс математической физики / *Михлин С.Г.* – М.: Наука, 1968. – 576 с.
11. *Сторож О.Г.* Про один клас майже обмежених збурень гладких звужень замкненого оператора / *Сторож О.Г., Шувар О.Б.* // Укр. мат. журн. – 2002. – Т. 54, №10. – С. 1396-1402.
12. *Деркач В.А.* Характеристические функции почти разрешимых расширений эрмитовых операторов / *Деркач В.А., Маламуд М.М.* // Укр. мат. журн. – 1992. – Т. 44, №4. – С. 435-459.
13. *Кочубей А.Н.* Про розширення додатно визначеного симетричного оператора / *Кочубей А.Н.* // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1979. – №3. – С. 168-171.
14. *Штраус А.В.* О расширениях полуограниченного оператора / *Штраус А.В.* // Докл. АН СССР. – 1973. – Т. 231, №3. – С. 543-546.
15. *Сторож О.Г.* Экстремальные расширения неотрецательного оператора и аккретивные граничные задачи *Сторож О.Г.* // Укр. мат. журн. – 1990. – Т. 42, №6. – С. 858-860.
16. *Сторож О.Г.* Про деякі аналітичні та асимптотичні властивості функції Вейля невід'ємного оператора / *Сторож О.Г.* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – Т. 43, №4. – С. 18-23.
17. *Михайлец В.А.* Спектры операторов и граничние задачи / *Михайлец В.А.* // Спектр. анализ дифференц. операторов. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1980. – С. 106-131.

NONNEGATIVE AND ACCRETIVE PERTURBATIONS OF THE OPERATOR OF THE THIRD BOUNDARY PROBLEM FOR THE STURM-LIOUVILLE DIFFERENTIAL EXPRESSION WITH THE BOUNDED OPERATOR POTENTIAL

Hanna PIPA

Berezhany agrotechnical institute,
47501, Ternopil region, Berezhany, Akademichna Str., 20

A class of differential-boundary operators of the Sturm-Liouville type with the nonstandard boundary conditions is investigated. The criteria of the maximal nonnegativity, maximal accretivity and solvability for the considered operators are established.

Key words: operator, boundary value space, extension.

Стаття надійшла до редколегії 25.04.2007

Прийнята до друку 22.10.2008