

УДК 539.3

КОМБІНОВАНИЙ ЗГИН І РОЗТЯГ ПЛАСТИНИ, ОСЛАБЛЕНОЇ ДВОМА КОЛІНЕАРНИМИ ТРІЩИНАМИ, БЕРЕГИ ЯКИХ КОНТАКТУЮТЬ

Віктор ОПАНАСОВИЧ, Мар'ян ДОРОШ

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1*

З використанням методів теорії функцій комплексної змінної досліджено задачу про сумісну дію згину та розтягу пластини, яка містить колінеарні наскрізні тріщини, береги яких контактують по області, ширина якої є постійною вздовж тріщин. Розглянуто різні можливі випадки контакту берегів тріщин. Розв'язок сформульованої задачі зведено до задач лінійного спряження. Знайдено явний вигляд для комплексних потенціалів плоскої задачі теорії пружності і класичної теорії згину пластин, коефіцієнтів інтенсивності зусиль і моментів, контактного зусилля між берегами тріщин. Для часткового випадку двох рівних тріщин проведено числовий аналіз задачі, який подано графічно.

Ключові слова: згин, розтяг, ізотропна пластина, прямолінійна наскрізна тріщина, ширина області контакту, комплексні потенціали, коефіцієнти інтенсивності зусиль і моментів, контактне зусилля, плоска задача, класична теорія згину.

В інженерній практиці широко використовують пластинчасті елементи конструкцій. У процесі експлуатації в них можуть виникнути тріщини, які є сильним концентратором напружень, що прискорює руйнування конструкції. В літературі відомі розв'язки задач згину пластин з колінеарними розрізами, одержані з використанням класичної теорії згину пластин з урахуванням контакту берегів тріщин вздовж лінії на одній з основ пластини [1], при цьому розв'язок задачі зведено до сингулярного інтегрального рівняння.

В цій праці з використанням методів теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів досліджено задачу згину з крученням та розтягу пластини розподіленими моментами і зусиллями на нескінченності з двома колінеарними тріщинами з урахуванням контакту берегів тріщини по області, ширина якої вважається постійною вздовж тріщин. Розв'язок задачі зведено до задач лінійного спряження, на підставі яких знайдено аналітичний вираз для комплексних потенціалів, коефіцієнтів інтенсивності зусиль і моментів, контактного зусилля між берегами тріщин,

визначено критичне значення навантаження. Для часткового випадку двох рівних тріщин проведено числовий аналіз задачі та зроблено порівняння з випадком, коли контакт берегів тріщин відбувається по лінії.

I. Формулювання задачі. Розглянемо нескінченну ізотропну пластину завтовшки $2h$ (див. рис.1), яка ослаблена двома прямолінійними наскрізними тріщинами, розміщеними на одній лінії. Береги тріщин і лицьові поверхні пластини вільні від зовнішнього навантаження. На безмежності пластина згинається симетрично стосовно тріщин рівномірно розподіленими згинальними та крутними моментами, а також розтягується рівномірно розподіленими напруженнями перпендикулярно до лінії, де розміщені тріщини.

Введемо декартову систему координат $Oxy\tilde{z}$ так, щоб серединна

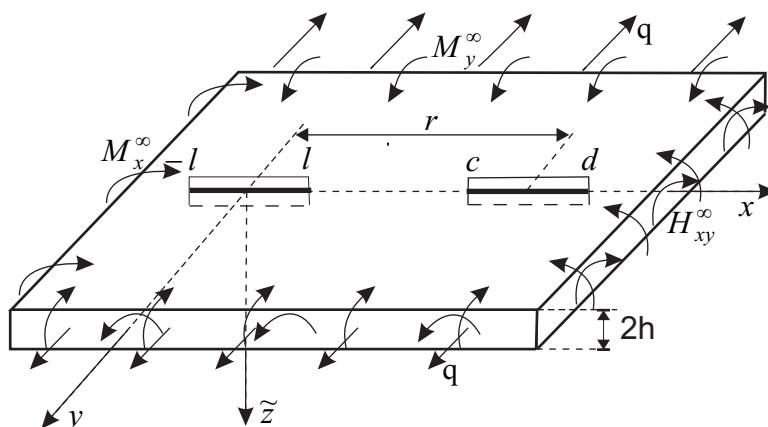


Рис. 1: Схема навантаження пластини та розміщення тріщин

поверхня пластини збігалася з координатною площиною Oxy , а вісь Ox направимо по лінії, де розміщені тріщини. Середина першої тріщини збігається з початком координат. Лінії, де розміщена перша і друга тріщини, позначимо відповідно через $L_1 = [-l, l]$ і $L_2 = [c, d]$, їхню сукупність – через L .

Будемо розглядати три випадки взаємодії берегів тріщин.

1. Береги тріщин не взаємодіють. Тоді на берегах тріщин виконуються умови вільного краю

$$\sigma_{yy}^+ = \sigma_{yy}^- = 0, \quad \sigma_{xy}^\pm = 0, \quad x \in L \quad (1)$$

$$M_y^+ = M_y^- = 0, \quad P^\pm = 0, \quad x \in L, \quad (2)$$

та умова відсутності контакту берегів тріщин

$$\frac{\partial[v]}{\partial x} > -h \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right], \quad x \in L, \quad (3)$$

де σ_{yy} – контактні напруження; σ_{xy} – дотичні напруження; u і v – компоненти вектора переміщень у плоскій задачі [4]; $P = \frac{\partial H_{xy}}{\partial x} + Q_y$ – узагальнена в сенсі Кірхгофа перерізувальна сила; H_{xy} – крутний момент; Q_y – перерізувальна сила; M_y – згинальний

момент, w – прогин пластини [5]; в (3) введено позначення $[r(x)] = r^+(x) - r^-(x)$, значками ”+” і ”-” позначено граничне значення відповідних величин при $y \rightarrow \pm 0$.

2. Береги тріщин частково контактують. Будемо розглядати досить довгі тріщини [3], тому область контакту вздовж тріщин вважатимемо постійною величиною. Оскільки береги тріщин контактують, то розв’язок задачі розбиваємо на два: плоску задачу теорії пружності, з прикладеними до берегів тріщин невідомими напруженнями і відомим розподіленим навантаженням на нескінченності, та задачу згину, з прикладеними до берегів тріщин невідомими згинальними моментами і відомими розподіленими моментами на нескінченності, при цьому скористаємося класичною теорією згину пластин. Відповідно до сформульованої задачі на берегах тріщин маємо такі крайові умови:

$$\sigma_{yy}^+ = \sigma_{yy}^- = \sigma_{yy}, \quad \sigma_{xy}^\pm = 0, \quad x \in L, \quad (4)$$

$$M_y^+ = M_y^- = M_y, \quad P^\pm = 0, \quad x \in L, \quad (5)$$

$$M_y = \beta N, \quad \frac{\partial[v]}{\partial x} + \alpha \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] = 0, \quad x \in L, \quad (6)$$

$$N = -2h\sigma_{yy}, \quad (7)$$

де $N > 0$ – контактне зусилля між берегами тріщин; α, β – сталі, які враховують умови контакту берегів тріщин.

3. Повний контакт берегів тріщин. У цьому випадку на берегах тріщин матимемо такі крайові умови:

$$\frac{\partial}{\partial x} (v^+ - v^-) = 0, \quad \sigma_{yy}^+ = \sigma_{yy}^- = \sigma_{yy}, \quad \sigma_{xy}^\pm = 0, \quad x \in L, \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^+ - \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^- \right) = 0, \quad M_y^+ = M_y^- = M_y, \quad P^\pm = 0, \quad x \in L, \quad (9)$$

якщо береги тріщин незлипнуті, то додаємо

$$\sigma_{yy} + \frac{3M_y}{2h^2} \leq 0. \quad (10)$$

II. Побудова розв’язку задачі. Введемо у розгляд комплексні потенціали $\Phi_{II}(z), \Omega_{II}(z)$ [4] для плоскої задачі і $\Phi_3(z), \Omega_3(z)$ [5] для задачі згину та скористаємося залежностями

$$\sigma_{yy} - i\sigma_{xy} = \Phi_{II}(z) + \Omega_{II}(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \overline{\Phi'_{II}(z)},$$

$$2\mu(u' + iv') = 2\mu \frac{\partial}{\partial x} (u + iv) = \kappa \Phi_{II}(z) - \Omega_{II}(\bar{z}) - (z - \bar{z}) \overline{\Phi'_{II}(z)}; \quad (11)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \Phi_3(z) - \Omega_3(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \overline{\Phi'_3(z)},$$

$$f = \tilde{\kappa} \Phi_3(z) + \Omega_3(\bar{z}) - (z - \bar{z}) \overline{\Phi'_3(z)}; \quad (12)$$

де $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ – модуль зсуву; E – модуль Юнга; ν – коефіцієнт Пуассона,
 $z = x + iy$, $\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$, $\tilde{\kappa} = \frac{3+\nu}{1-\nu}$, $g = \frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y}$,

$f = \frac{1}{m} \left(M_y + iC' + i \int_0^x P(\epsilon) d\epsilon \right)$; $m = -D(1-\nu)$, C' – невідома дійсна стала;

$D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}$ – циліндрична жорсткість.

Комплексні потенціали при великих $|z|$ можна подати у вигляді

$$\Phi_{\Pi}(z) = \Gamma + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad \Omega_{\Pi}(z) = \Gamma + \overline{\Gamma'} + O\left(\frac{1}{z^2}\right),$$

$$\Phi_{\text{З}}(z) = \tilde{\Gamma} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad \Omega_{\text{З}}(z) = -\tilde{\Gamma} - \overline{\tilde{\Gamma}'} + O\left(\frac{1}{z^2}\right),$$

де $\Gamma = \frac{1}{4}q$, $\Gamma' = \frac{1}{2}q$, $\tilde{\Gamma} = -\frac{M_x^{\infty} + M_y^{\infty}}{4D(1+\nu)}$, $\tilde{\Gamma}' = -\frac{1}{2m} (M_y^{\infty} - M_x^{\infty} + 2iH_{xy}^{\infty})$; M_y^{∞} , M_x^{∞} та H_{xy}^{∞} – згинальні та крутні моменти на нескінченності; q – розподілене напруження на нескінченності.

П.1. Розглянемо перший випадок. Крайові умови (1) і (2) записуємо у вигляді

$$(\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^+ = (\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^-, \quad f^+(x) = f^-(x), \quad x \in L,$$

з яких, враховуючи (11) та (12), отримаємо задачі лінійного спряження

$$(\Phi_{\Pi}(x) - \Omega_{\Pi}(x))^+ - (\Phi_{\Pi}(x) - \Omega_{\Pi}(x))^- = 0, \quad x \in L,$$

$$(\tilde{\kappa}\Phi_{\text{З}}(x) - \Omega_{\text{З}}(x))^+ - (\tilde{\kappa}\Phi_{\text{З}}(x) - \Omega_{\text{З}}(x))^- = 0, \quad x \in L,$$

розв'язавши які, матимемо

$$\Omega_{\Pi}(z) = \Phi_{\Pi}(z) + \overline{\Gamma'}, \quad \Omega_{\text{З}}(z) = \tilde{\kappa}\Phi_{\text{З}}(z) - (\tilde{\kappa} + 1)\tilde{\Gamma} - \overline{\tilde{\Gamma}'}. \quad (13)$$

З крайової умови (1) та першого співвідношення (11), використавши (13), одержимо

$$\left(\Phi_{\Pi}(x) + \frac{1}{2}\overline{\Gamma'} \right)^+ + \left(\Phi_{\Pi}(x) + \frac{1}{2}\overline{\Gamma'} \right)^- = 0, \quad x \in L. \quad (14)$$

Розв'язавши задачу лінійного спряження (14) та задовольнивши умову однозначності переміщень при обході першої тріщини, отримаємо

$$\Phi_{\Pi}(z) = \frac{q}{4} \left(-1 + 2 \frac{z^2 - rz + r_1}{X(z)} \right),$$

де $r = \frac{c+d}{2}$, $r_1 = \frac{dc-l^2}{2} - \frac{(d-l)(c+l)}{2} \frac{E(\rho)}{K(\rho)}$, $\rho = \sqrt{\frac{2l(d-c)}{(d-l)(c+l)}}$,

$X(z) = \sqrt{(z^2 - l^2)(z - c)(z - d)}$;

$K(\rho)$ і $E(\rho)$ – повні еліптичні інтеграли першого та другого роду.

Враховуючи друге співвідношення (12) та (13), з крайової умови (2) маємо задачу лінійного спряження

$$\begin{aligned} \left(\tilde{\kappa} \Phi_3(x) - \frac{1}{2} \left((\tilde{\kappa} + 1) \tilde{\Gamma} + \overline{\tilde{\Gamma}'} \right) \right)^+ + \left(\tilde{\kappa} \Phi_3(x) - \frac{1}{2} \left((\tilde{\kappa} + 1) \tilde{\Gamma} + \overline{\tilde{\Gamma}'} \right) \right)^- = \\ = i \frac{C'_j}{m}, \quad x \in L_j, \quad (j = 1, 2), \end{aligned}$$

розв'язок якої подамо у вигляді

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa} \Phi_3(z) - \frac{1}{2} \left(i \frac{C'_0}{m} + \left((\tilde{\kappa} + 1) \tilde{\Gamma} + \overline{\tilde{\Gamma}'} \right) \right) = \frac{O_2 z^2 + O_1 z + O_0}{X(z)} + \\ + \frac{1}{2m\pi X(z)} \int_c^d \frac{C'_0 X^+(t) dt}{(t-z)}, \end{aligned} \quad (15)$$

де $C'_0 = C'_2 - C'_1$, C'_j – невідомі дійсні сталі; O_n ($n = \overline{0, 2}$) – невідомі сталі, які визначаємо з поведінки функції $\Phi_3(z)$ при великих z ,

$$O_2 = \tilde{\kappa} \tilde{\Gamma} - \frac{1}{2} \left(\frac{iC'_1}{m} + (\tilde{\kappa} + 1) \tilde{\Gamma} + \overline{\tilde{\Gamma}'} \right), \quad O_1 = -O_2 r. \quad (16)$$

Сталу O_0 знайдемо з умови однозначності кутів повороту при обході контура першої тріщини

$$O_0 = O_2 r_1 + \frac{C'_0}{m} r_2,$$

$$\text{де } r_2 = - \frac{\sqrt{(d-l)(c+l)}}{4\pi K(\rho)} \int_{-l}^l \int_c^d \frac{X^+(t) dt}{t-x} \frac{1}{\sqrt{(l^2-x^2)(c-x)(d-x)}} dx.$$

Для визначення сталих C'_1 та C'_2 скористаємось умовами однозначності прогину при обході кожного контура тріщин

$$\int_{L_j} \left(\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^+ - \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^- \right) dx = 0 \quad (j = \overline{1, 2}), \quad (17)$$

з яких після відповідних спрощень, матимемо

$$C'_1 = C'_2 = -H_{xy}^\infty. \quad (18)$$

Враховуючи (16), (18), з (15) одержимо

$$\Phi_3(z) = - \frac{M_x^\infty (3 + \nu) + M_y^\infty (1 - \nu)}{16\mu\tilde{\kappa}h^3(1 + \nu)} - \frac{3M_y^\infty z^2 - rz + r_1}{8\mu\tilde{\kappa}h^3 X(z)}. \quad (19)$$

Скориставшись співвідношеннями

$$\frac{\partial[v]}{\partial x} = Im \frac{\kappa + 1}{2\mu} [\Phi_{II}^+(x) - \Phi_{II}^-(x)] = \frac{2q}{\mu(1 + \nu)} \frac{x^2 - rx + r_1}{\sqrt{(l^2 - x^2)(c - x)(d - x)}},$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] &= (\tilde{\kappa} + 1) \operatorname{Im} [\Phi_3^+(x) - \Phi_3^-(x)] = \\ &= -\frac{3M_y^\infty}{\mu h^3(3 + \nu)} \frac{x^2 - rx + r_1}{\sqrt{(l^2 - x^2)(c - x)(d - x)}}, \quad x \in L_1, \end{aligned}$$

із нерівності (3) визначаємо діапазон зміни зовнішнього навантаження, коли береги тріщин не взаємодіють

$$(q, M_y^\infty) \in \Omega_1 = \left\{ (q, M_y^\infty) : q > \frac{3(1 + \nu)}{2h^2(3 + \nu)} M_y^\infty \right\}.$$

II.2. Розглянемо другий випадок. На основі крайових умов (4) та (5) аналогічно як і в першому випадку, одержимо (13).

Використавши (11), (13) та врахувавши позначення (7), контактні зусилля між берегами тріщин можемо записати у вигляді

$$N(x) = -2h(\Phi_{\text{II}}^+(x) - \Phi_{\text{II}}^-(x)) - 2h\overline{\Gamma}, \quad x \in L. \quad (20)$$

Враховуючи (5) і (13), на основі другої залежності (12) одержимо

$$M_y(x) = -iC'_j + m \left(\tilde{\kappa} (\Phi_3^+(x) - \Phi_3^-(x)) - (\tilde{\kappa} + 1) \tilde{\Gamma} - \overline{\tilde{\Gamma}'} \right), \quad x \in L. \quad (21)$$

Підставляючи (20) і (21) у першу крайову умову (6), отримаємо задачу лінійного спряження

$$F^+(x) + F^-(x) = \begin{cases} 0, & x \in L_1, \\ -iC'_0, & x \in L_2, \end{cases} \quad (22)$$

де $F(z) = -2h\beta\Phi_{\text{II}}(z) - m\tilde{\kappa}\Phi_3(z) - h\beta\overline{\Gamma} + \frac{1}{2} \left(iC'_1 + m \left((\tilde{\kappa} + 1) \tilde{\Gamma} + \overline{\tilde{\Gamma}'} \right) \right)$. Розв'язок задачі лінійного спряження (22) має вигляд

$$F(z) = \frac{D_2 z^2 + D_1 z + D_0}{X(z)} - \frac{1}{2\pi X(z)} \int_c^d \frac{C'_0 X^+(t) dt}{t - z}, \quad (23)$$

де $D_2 = -2h\beta\Gamma - m\tilde{\kappa}\tilde{\Gamma} - h\beta\overline{\Gamma} + \frac{1}{2} \left(iC'_1 + m \left((\tilde{\kappa} + 1) \tilde{\Gamma} + \overline{\tilde{\Gamma}'} \right) \right)$, $D_1 = -D_2 r$, $D_0 = D_2 r_1 - C'_0 r_2$. На підставі крайових умов

$$\sigma_{xy}^+ + \sigma_{xy}^- = 0, \quad P^+(x) + P^-(x) = 0,$$

врахувавши співвідношення (11) і (12), отримаємо задачі лінійного спряження

$$\begin{aligned} &(\Phi_{\text{II}}(x) - \overline{\Phi_{\text{II}}(x)})^+ + (\Phi_{\text{II}}(x) - \overline{\Phi_{\text{II}}(x)})^- = 0, \quad x \in L, \\ &\left(\Phi_3(x) - \overline{\Phi_3(x)} - \frac{iC'_1}{m\tilde{\kappa}} + \frac{\tilde{\Gamma}' - \overline{\tilde{\Gamma}'}}{2\tilde{\kappa}} \right)^+ + \left(\Phi_3(x) - \overline{\Phi_3(x)} - \frac{iC'_1}{m\tilde{\kappa}} + \frac{\tilde{\Gamma}' - \overline{\tilde{\Gamma}'}}{2\tilde{\kappa}} \right)^- = \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} 0, & x \in L_1, \\ \frac{2iC'_0}{m\tilde{\kappa}}, & x \in L_2, \end{cases}$$

розв'язавши які, знаходимо

$$\Phi_{\Pi}(z) = \overline{\Phi}_{\Pi}(z),$$

$$\Phi_3(z) - \overline{\Phi}_3(z) - \frac{iC'_1}{m\tilde{\kappa}} + \frac{\tilde{\Gamma}' - \overline{\tilde{\Gamma}'}}{2\tilde{\kappa}} = \frac{B_2z^2 + B_1z + B_0}{X(z)} + \frac{1}{m\tilde{\kappa}\pi X(z)} \int_c^d \frac{C'_0 X^+(t) dt}{t-z}, \quad (24)$$

де $B_2 = -\frac{iC'_1}{m\tilde{\kappa}} + \frac{\tilde{\Gamma}' - \overline{\tilde{\Gamma}'}}{2\tilde{\kappa}}$, $B_1 = -B_2r$, $B_0 = B_2r_1 + \frac{C'_0r_2}{m\tilde{\kappa}}$.

З другої крайової умови (6), на підставі (11) та (12), можемо записати задачу лінійного спряження

$$\left(\frac{\delta}{2} (\Phi_{\Pi}(z) + \overline{\Phi}_{\Pi}(z)) + \Phi_3(x) + \overline{\Phi}_3(x) \right)^+ -$$

$$- \left(\frac{\delta}{2} (\Phi_{\Pi}(z) + \overline{\Phi}_{\Pi}(z)) + \Phi_3(x) + \overline{\Phi}_3(x) \right)^- = 0, \quad x \in L,$$

на основі якої, отримаємо

$$\frac{\delta}{2} (\Phi_{\Pi}(z) + \overline{\Phi}_{\Pi}(z)) + \Phi_3(z) + \overline{\Phi}_3(z) = \delta\Gamma + 2\tilde{\Gamma}. \quad (25)$$

Тут $\delta = \frac{\kappa+1}{\mu\alpha(\tilde{\kappa}+1)}$. Для визначення сталих C'_1 та C'_2 скористаємось умовами (17), з яких після відповідних спрощень отримаємо (18).

Використавши (18) та розв'язавши систему рівнянь (23), (24) і (25) стосовно $\Phi_{\Pi}(z)$ і $\Phi_3(z)$, отримаємо

$$\Phi_{\Pi}(z) = 4Q(1+\nu) \left\{ -\alpha + \frac{q'h}{6} \left(-3\frac{\beta\alpha}{h^2} + \frac{3+\nu}{1+\nu} \right) + \alpha \left(1 + q'\frac{\beta}{h} \right) \frac{z^2 - rz + r_1}{X(z)} \right\},$$

$$\Phi_3(z) = \frac{1}{\mu} Q(1-\nu) \left\{ 2q'\frac{\beta}{h} - \eta_y - \frac{M_x^\infty}{M_y^\infty} \eta_x - 2 \left(1 + q'\frac{\beta}{h} \right) \frac{z^2 - rz + r_1}{X(z)} \right\},$$

де $Q = \frac{3M_y^\infty}{16h(3\beta\alpha(1+\nu) + h^2(3+\nu))}$, $q' = \frac{2h^2q}{M_y^\infty}$, $\eta_y = 3\frac{\beta\alpha}{h^2} + \frac{1-\nu}{1+\nu}$,

$$\eta_x = 3\frac{\beta\alpha}{h^2} + \frac{3+\nu}{1+\nu}.$$

На підставі залежності (20) знаходимо контактні зусилля між берегами тріщин

$$N(x) = \frac{3M_y^\infty\alpha(1+\nu) - 2qh^3(3+\nu)}{3\beta\alpha(1+\nu) + h^2(3+\nu)}, \quad x \in L. \quad (26)$$

Як видно з формули (26), контактне зусилля між берегами тріщин не залежить від відстані між ними і залишається таким самим, як для однієї тріщини [2].

П.3. Розглянемо третій випадок крайових умов (повний контакт бере- гів тріщин). На підставі крайових умов (8) та (9) як і в першому випадку приходимо до залежностей (13).

Врахувавши вирази (13), з крайових умов

$$\sigma_{xy}^+ + \sigma_{xy}^- = 0, \quad P^+(x) + P^-(x) = 0,$$

аналогічно як у другому випадку отримуємо співвідношення (24).

З перших крайових умов (8) та (9), на підставі співвідношень (11) і (12), матимемо задачі лінійного спряження

$$(\Phi_{\Pi}(x) + \bar{\Phi}_{\Pi}(x))^+ - (\Phi_{\Pi}(x) + \bar{\Phi}_{\Pi}(x))^- = 0, \quad x \in L,$$

$$(\Phi_3(x) + \bar{\Phi}_3(x))^+ - (\Phi_3(x) + \bar{\Phi}_3(x))^- = 0, \quad x \in L,$$

розв'язавши які, знаходимо

$$\begin{aligned} \Phi_{\Pi}(z) + \bar{\Phi}_{\Pi}(z) &= 2\Gamma, \\ \Phi_3(z) + \bar{\Phi}_3(z) &= 2\tilde{\Gamma}. \end{aligned} \quad (27)$$

Сталі C'_1 та C'_2 визначаємо з умов (17) і після відповідних спрощень приходимо до (18).

Розв'язавши систему рівнянь (24), (27) стосовно $\Phi_{\Pi}(z)$ і $\Phi_3(z)$ та скориставшись (18), можемо записати

$$\Phi_{\Pi}(z) = \Gamma, \quad \Phi_3(z) = \tilde{\Gamma}, \quad (28)$$

тобто при такому формулюванні задачі наявність тріщин не впливає на напружено-деформований стан пластини.

Використавши (11), (12) та (28), з крайових умов (8) та (9) знаходимо на берегах тріщин

$$\sigma_{yy} = q, \quad M_y = M_y^{\infty}, \quad x \in L.$$

Із нерівності (10) визначаємо діапазон зміни зовнішнього навантаження, коли відбувається повний контакт берегів тріщин

$$(q, M_y^{\infty}) \in \Omega_3 = \left\{ (q, M_y^{\infty}) : q \leq -\frac{3}{2h^2} M_y^{\infty} \right\}.$$

Отже, при зовнішньому навантаженні

$$(q, M_y^{\infty}) \in \Omega_2 = \left\{ -\frac{3}{2h^2} M_y^{\infty} < q \leq \frac{3(1+\nu)}{2h^2(3+\nu)} M_y^{\infty} \right\}$$

береги тріщин контактують частково по її висоті.

Коефіцієнти інтенсивності зусиль (КІЗ) K_{Nn} і моментів (КІМ) K_{3n} [6] знаходимо за формулами

$$\begin{aligned} K_{Nn}^{\mp} &= \pm 4\sqrt{2}h \lim_{x \rightarrow a^{\mp} 0} \left(\Phi_{\Pi}(x) \sqrt{|x-a|} \right) = \\ &= A_n^{\mp}(q, M_y^{\infty}) \frac{(l_n \mp (-1)^n r)^2 - l_k^2 + [(l_n - l_k)^2 - r^2] \frac{E(\rho_{nk})}{K(\rho_{nk})}}{\sqrt{l_n [(l_n \mp (-1)^n r)^2 - l_k^2]}}, \end{aligned}$$

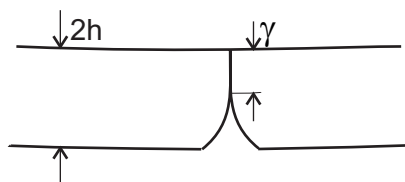
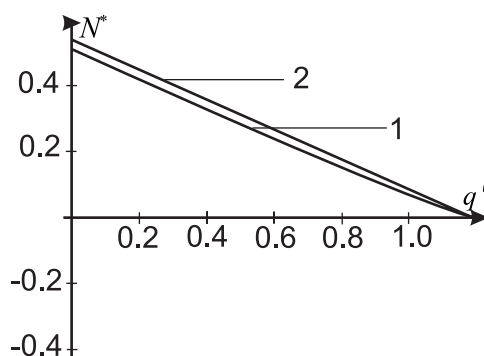


Рис. 2: Схема контакту берегів тріщини

Рис. 3: Залежність контактних зусиль від q' при різних β^* та α^*

$$K_{3n}^{\mp} = \mp \sqrt{8D(3+\nu)} \lim_{x \rightarrow a \mp 0} (\Phi_3(x) \sqrt{|x-a|}) =$$

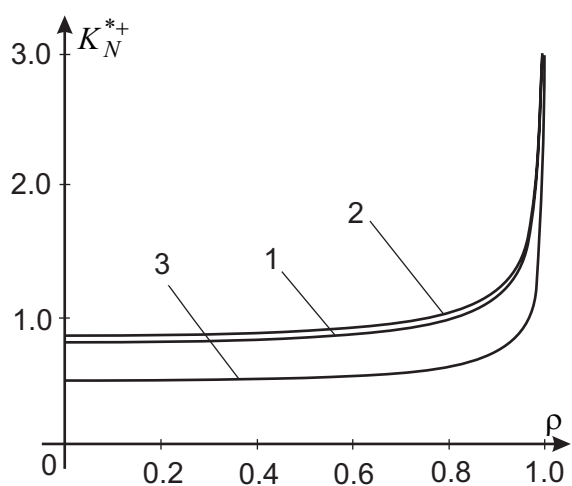
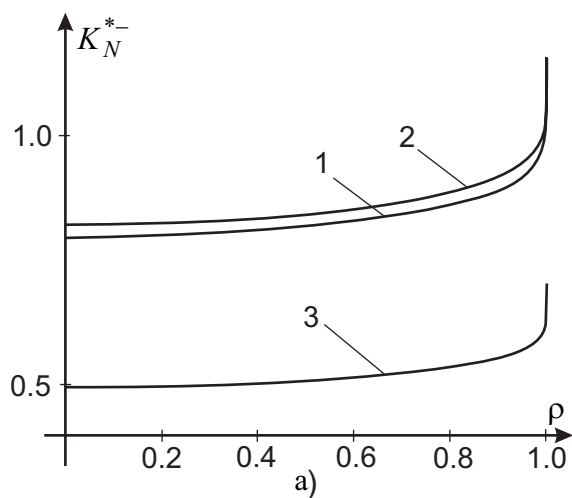
$$= B_n^{\mp}(q, M_y^{\infty}) \frac{(l_n \mp (-1)^n r)^2 - l_k^2 + [(l_n - l_k)^2 - r^2] \frac{E(\rho_{nk})}{K(\rho_{nk})}}{\sqrt{l_n [(l_n \mp (-1)^n r)^2 - l_k^2]}},$$

де при $a = -l$ ($a = c$), беруть верхні значки "+" чи "-", а при $a = l$ ($a = d$) – нижні;
 $l_1 = l$, $l_2 = \frac{d-c}{2}$; $\rho_{nk} = 2 \sqrt{\frac{l_n l_k}{r^2 - (l_n - l_k)^2}}$;

$$A_n^{\mp}(q, M_y^{\infty}) = \begin{cases} hq, & (q, M_y^{\infty}) \in \Omega_1, \\ \mp (-1)^n 8Q(1+\nu)\alpha(h + q'\beta), & (q, M_y^{\infty}) \in \Omega_2, \end{cases}$$

$$B_n^{\mp}(q, M_y^{\infty}) = \begin{cases} 1/2M_y^{\infty}, & (q, M_y^{\infty}) \in \Omega_1, \\ \mp (-1)^n 8/3Q(3+\nu)h^2(h + q'\beta), & (q, M_y^{\infty}) \in \Omega_2, \end{cases}$$

$n = 1$ і $k = 2$, та $n = 2$ і $k = 1$, коли знаходимо відповідні величини для першої і другої тріщини.



б)

Рис. 4. Графічна залежність приведених КІЗ від ρ при різних β^* та α^*

Для визначення граничного значення навантаження, коли відбуватиметься руйнування пластини, скористаємося енергетичним критерієм [1]

$$\frac{\pi}{4h^2 E} \left((K_{Nn}^{\mp})^2 + \frac{3(1+\nu)}{h^2(3+\nu)} (K_{3n}^{\mp})^2 \right) = 2\gamma^*,$$

де γ^* – густина ефективної поверхневої енергії матеріалу.

Зауважимо таке: коли немає згину і $q > 0$, тоді приходимо до результатів монографії [6], коли $r \rightarrow \infty$, чи $c \rightarrow l$ і $\alpha = \beta = h$, то отримуємо результати [2], одержані іншим шляхом.

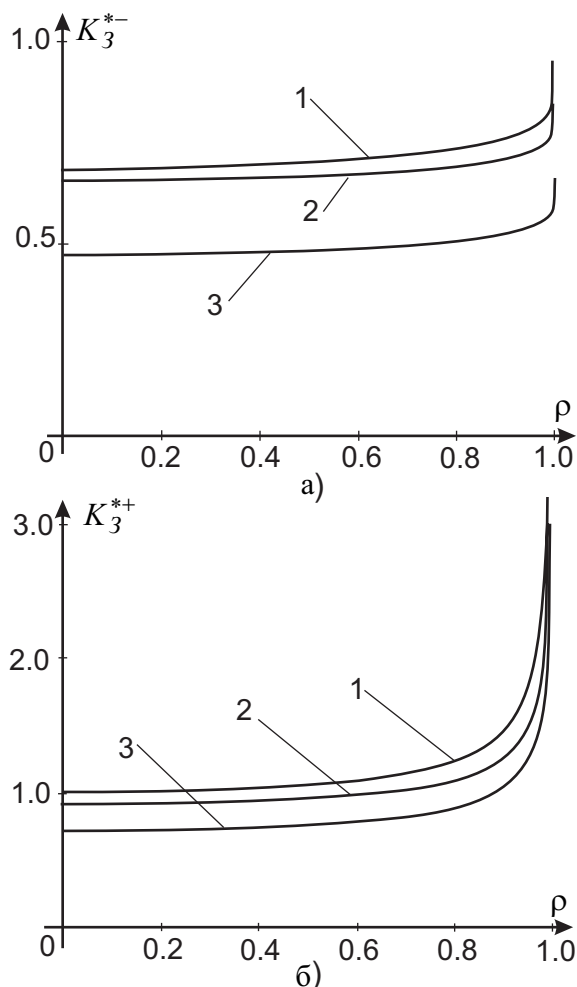


Рис. 5. Графічна залежність приведених КІМ від ρ при різних β^* та α^*

III. Числовий аналіз задачі та висновки. Розглянемо випадок двох колінеарних тріщин однакової довжини $2l$. Будемо вважати, що $(q \geq 0, M_y^\infty) \in \Omega_2$, тобто контакт берегів тріщин відбувається по частині їхньої висоти.

На рис. 2. показано схему контакту берегів тріщини по їхній висоті, при чому вважаємо, що γ змінюється за законом $\gamma = \gamma_M \left(1 - q' \frac{3+\nu}{3(1+\nu)}\right)$, де $\gamma_M = 0,13h$ – ширина області контакту під дією тільки згинального моменту M_y^∞ [3].

На рис. 3-6 подано числовий аналіз задачі при $\nu = 0,3$.

На рис. 3 показано графічну залежність приведених контактних зусиль між берегами тріщин від безрозмірної координати q' : $N^* = \frac{hN}{M_y^\infty} = \frac{3\alpha^*(1+\nu) - q'(3+\nu)}{3\beta^*\alpha^*(1+\nu) + (3+\nu)}$, де

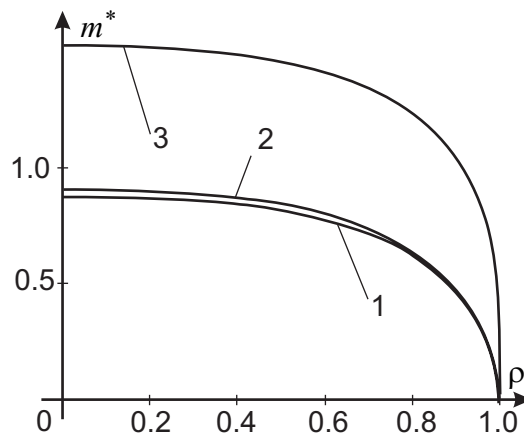


Рис. 6. Значення критичного моменту від ρ при різних β^* та α^*

$\alpha^* = \alpha/h = (1 + (1 - \gamma/h)^2)/2$, $\beta^* = \beta/h = 1 - \frac{1}{3}\gamma/h$ (крива 1) $\beta^* = 1$, $\alpha^* = 1$ [1] та (крива 2). Як видно з рис. 6, врахування ширини області контакту між берегами тріщини приводить до зменшення контактної зусилля порівняно з випадком, коли контакт відбувається по лінії на верхній основі пластини.

Криві 1, на рис. 4-6, побудовані при значеннях $\beta^* = \beta/h = 0,975$ і $\alpha^* = \alpha/h = 0,928$, криві 2 – при $\beta^* = 1$, $\alpha^* = 1$, і відповідають [1], та при $q' = 0.5$. Криві 3, на цих рисунках, зображені при $q' = 0$ (немає розтягу пластини), та $\beta^* = 0,956$ і $\alpha^* = 0,8785$.

Наведені коефіцієнти інтенсивності зусиль і моментів подамо у вигляді

$$K_N^{*\mp} = \frac{hK_{N1}^{\mp}}{M_y^{\infty}\sqrt{l}} = \pm \frac{3(1+\nu)\alpha^*(1+q'\beta^*)}{3\beta^*\alpha^*(1+\nu)+3+\nu} \frac{1 \pm \rho - \frac{E(\rho)}{K(\rho)}}{\rho\sqrt{1 \pm \rho}}, \quad K_3^{*\mp} = \frac{K_{31}^{\mp}}{M_y^{\infty}\sqrt{l}} = \frac{(3+\nu)}{3(1+\nu)\alpha^*} K_N^{*\mp},$$

де $\rho = 2l/r$; верхні значки "–" чи "+" беруть, коли знаходимо відповідні величини для вершин -l (d), а нижні для l (c). На рис. 4 і 5 зображено графічні залежності приведених КІЗ та КІМ у вершині -l (рис. 4, а і 5, а) та l (рис. 4, б і 5, б) від безрозмірної координати ρ . Як видно з цих рисунків, врахування ширини області контакту берегів тріщини приводить до зменшення приведених коефіцієнтів інтенсивності зусиль і до збільшення приведених коефіцієнтів інтенсивності моментів порівняно з випадком, коли контакт берегів тріщини відбувається по лінії на верхній основі пластини.

На рис. 6 показано графічну залежність приведенного критичного моменту

$$m^* = \frac{M_y^{\infty}}{2h^2} \sqrt{\frac{\pi l}{2E\gamma^*}} = \frac{1}{1+q'\beta^*} \frac{3\beta^*\alpha^*(1+\nu) + (3+\nu)}{\sqrt{9(1+\nu)^2(\alpha^*)^2 + 3(3+\nu)(1+\nu)}} \frac{\rho\sqrt{1-\rho}}{\frac{E(\rho)}{K(\rho)} + \rho - 1},$$

від безрозмірної координати ρ . На підставі рис. 6. можна зробити висновок, що врахування області контакту берегів тріщини приводить до зменшення критичного моменту порівняно з випадком, коли контакт відбувається по лінії на верхній основі пластини.

1. *Шацький І.П.* Гранична рівновага пластини з колінеарними тріщинами при комбінованому розтязі та згині / *Шацький І.П.* // Доп. НАН України. – 1995 – №10. – С. 62-64.
2. *Шацький І.П.* О контакте берегов разреза в пластине при комбинированном растяжении и изгибе / *Шацький І.П.* // Физ.-хим. механика материалов. – 1989. – №2. – С. 46-50.
3. *Dempsey J.P.* Closure of a through crack in a plate under bending / *Dempsey J.P., Shekhtman I.I., Heruan L.I.* // International Journal solids structures. – 1998. – Vol. 35, №31-32. – P. 4077-4089.
4. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / *Мусхелишвили Н.И.* – М.: Наука, 1966. – 707 с.
5. *Прусов И.А.* Метод сопряжения в теории плит. / *Прусов И.А.* – Минск: Изд-во БГУ, 1975. – 256 с.
6. *Саврук М.П.* Двумерные задачи упругости для тел з тріщинами / *Саврук М.П.* – К.: Наукова думка, 1981. – 324 с.

COMBINATION OF BENDING AND STRAIN OF THE PLATE, WEAKEN OF TWO COLLINEAR CRACKS WITH CONTACTING EDGES

Viktor OPANASOVYCH, Maryan DOROSH

*Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka str., 1*

Using methods of the theory of functions of complex variable the problem of compatible action bending and strain of the plate is investigated, with contain collinear throughout cracks, the edges of the plates are contact in the district, the width of the of lest is constant along the cracks. Solution of a problem is shown to a problem of linear conjugation. Different and possible cases of contacting edges of the plate examination. The obvious view of the complex potentials of the plane problem of the theory elasticity ant classic of theory of bending plate, coefficients of intensity force and moments, contact force between the edges of the crack is founded. For the partly case of two equal cracks the numerical analysis of the problem, which given graphical is done.

Key words: bending, strain, isotropic plate, straight throughout crack, width of the contact area, complex potentials, contact force, plane problem, classic theory of bending.

Стаття надійшла до редколегії 30.05.2007

Прийнята до друку 22.10.2008