ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2008. Вип.68. С.186-193 *Ser.Mech-Math. 2008. Vol.68. P.186-193*

УДК 517.5

ПРО ПІДСУМОВУВАННЯ ДВОКРАТНИХ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РЯДІВ УЗАГАЛЬНЕНИМИ МЕТОДАМИ

Олеся ЛЮБИЦЬКА

Національний університет "Львівська політехніка",
79013, Львів, вул. С. Бандери, 12
e-mail: olesja_ljubitska@yahoo.com

Розглянуто узагальнені суми двократних тригонометричних рядів. Досліджено похибки наближення функцій послідовностями узагальнених частинних сум рядів.

Ключові слова: кратні тригонометричні ряди, узагальнені методи підсумовування рядів, ядра Фейєра, дельтоподібні послідовності функцій.

1. Для наближення розривних функцій чи похідних від інтегровних за Лебегом функцій, використовують [1, 2, 3, 6] послідовності узагальнених частинних сум рядів (послідовності частинних сум рядів, підсумовуваних узагальненими методами). В основу досліджень збіжності рядів, підсумовуваних узагальненими методами, і оцінки похибок наближення функцій послідовностями частинних сум рядів, покладено інтегральне їхнє зображення. В [4] розглянуто узагальнені методи підсумовування тригонометричних рядів, що ґрунтуються на використанні ядер Фейєра у вигляді дельтаподібних фінітних функцій; знайдено оцінки наближення функцій однієї змінної послідовностями узагальнених частинних сум рядів. Мета нашої праці – дослідити оцінки наближення функцій послідовностями узагальнених частинних сум двократних тригонометричних рядів, що ґрунтується на використанні дельтаподібних послідовностей фінітних функцій.

2. Узагальнена сума ряду. Нехай $f(x)$, $x = (x_1, x_2) \in R^2 - 2\pi$- періодична функція за кожною змінною, інтегрована за Лебегом, $f(x_1, x_2) \in L^1(Q)$, $Q = \{x : -\pi \le x_j \le \pi;\ j = 1, 2\}$. Розглянемо кратний ряд Фур'є

$$f(x_1, x_2) \sim \sum_{k_{12}=-\infty}^{\infty} c_{k_{12}} e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)}, \tag{1}$$

де

$$c_{k_{12}} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_1, x_2) e^{-i(k_1 x_1 + k_2 x_2)} dx_1 dx_2, \tag{2}$$

– коефіцієнти Фур'є функції$f(x_1, x_2)$.

Введемо послідовність функцій $\{\varphi(kr)\} = \{\varphi(k_1 r_1) \cdot \varphi(k_2 r_2)\}$, члени якої визначають за формулою

$$\varphi(k_j r_j) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} g(|\, t_j\,|) e^{k_j r_j t_j} dt_j, \tag{3}$$

де $r_1, r_2 \in R_+$; $j = 1, 2$, $g\,(\,t_j\,)$ – неперервна функція на проміжку $[0; 1]$, має похідну $(p+1)$-го порядку обмеженої варіації, $\int_0^1 g(t)\, dt = 1$ і, відповідно [5], правильна оцінка

$$|\varphi(k_j r_j)| = O\left(\frac{1}{k_j^{p+1}}\right) \quad (p \geq 1). \tag{4}$$

Розглянемо також ряд

$$S(f; x; r) = \sum_{k_{12}=-\infty}^{\infty} \varphi(k_1 r_1) \varphi(k_2 r_2) c_{k_{12}} e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)}, \tag{5}$$

який внаслідок оцінки $|c_k| = O(1)$ для $f(x_1, x_2) \in L^1(Q)$ та оцінки (4) рівномірно збігається стосовно x при $r_j \neq 0$.

Означення 1. *(Див. [2]) Ряд (1) підсумовують методом $\{\varphi(kr)\}$ при $r \to 0$ до $f(x)$ в точці x, якщо в цій точці $\lim\limits_{r \to 0} S(f; x; r) = f(x)$.*

Розглянемо 2π-періодичне продовження функції $g(t_j)$

$$G(t_j, r_j) = \begin{cases} \dfrac{1}{2r_j} g\left(\dfrac{|\, t_j\,|}{r_j}\right), & |\, t_j\,| \leq r_j, \\ 0, & r_j < |\, t_j\,| \leq \pi. \end{cases}$$

Функція $G(t_j, r_j)$ є фінітним ядром Фейера, вона має неперервну похідну p-го порядку і має похідну $(p+1)$-го порядку обмеженої варіації. Розвинення в тригонометричний ряд цього ядра таке:

$$G(t_j, r_j) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k_j=-\infty}^{\infty} \varphi(k_j r_j) e^{i k_j t_j}. \tag{6}$$

Ряд (6) рівномірно збігається стосовно x при $r_j \neq 0$.

Введемо двовимірне ядро Фейера

$$G(t, r) = G(t_1, r_1) \cdot G(t_2, r_2). \tag{7}$$

Врахувавши в (5) формули (2) і (7), запишемо функцію $S(f; x; r)$ в інтегральній формі

$$S(f,x,r)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x_1+t_1,x_2+t_2)G(t_1,r_1)G(t_2,r_2)\,dt_1dt_2. \tag{8}$$

Зробивши заміну $\frac{t_j}{r_j}=u_j$ в (8) і врахувавши формули (2), (3), одержимо ще таку формулу для суми ряду (5)

$$S(f;x;r)=\frac{1}{4}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} f(x_1+r_1u_1,x_2+r_2u_2)g(|\,u_1\,|)g(|\,u_2\,|)\,du_1du_2. \tag{9}$$

3. Оцінки збіжності рядів функції $f(x)\in L^1(Q)$. Позначимо [3] через $H_\alpha(Q)$ простір 2π-періодичних неперервних функцій $f(x)\in H_\alpha(Q)$, які задовольняють нерівність

$$|f(x_1+t_1,x_2+t_2)-f(x_1,x_2)|\le h_1t_1^{\alpha_1}+h_2t_2^{\alpha_2}, \tag{10}$$

де $0<\alpha_j\le 1; h_j,t_j\in R$.

Розглянемо наближення функції $f(x)$ послідовністю тригонометричних поліномів вигляду

$$S_N(f;x;r)=\sum_{k_1=-N_1}^{N_1}\sum_{k_2=-N_2}^{N_2}\varphi(k_1r_1)\varphi(k_2r_2)\,c_{k_{12}}e^{i(k_1x_1+k_2x_2)},$$

де $r_j\ne 0; N_j\in Z$, $c_{k_{12}}$ – коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$.

Відхилення функції $f(x)$ від полінома $S_N(f;x;r)$ позначимо через

$$\varepsilon_N(f;r)=\max\nolimits_{x\in Q}|S_N(f;x;r)-f(x)|$$

і перетворимо його так:

$$\begin{aligned}\varepsilon_N(f;r)&=\max_{x\in Q}|S(f;x;r)-f(x)+S_N(f;x;r)-S(f;x;r)|\le\\ &\le\max_{x\in Q}|S(f;x;r)-f(x)|+\max_{x\in Q}|S_N(f;x;r)-S(f;x;r)|\,.\end{aligned} \tag{11}$$

Відхилення (11) залежить від двох параметрів – r, N і $\lim\limits_{r\to 0}\lim\limits_{N\to\infty}\varepsilon_N(f;r)=0$. Зміна порядку граничних переходів не допускається. Існують криві $r=r(N)$, $r(N)>0$ з асимптотою $r=0$, що $\lim\limits_{N\to\infty}\varepsilon_N(f,r(N))=0$. Запишемо рівняння цих кривих у вигляді [4]

$$r_j=\frac{r_{0j}}{N_j^{\gamma_j}}, \tag{12}$$

де r_{0j},γ_j – сталі величини, які не залежать від N_j.

Теорема 1. *Нехай $f(x)\in H_\alpha(Q)$, тоді справджується оцінка*

$$\varepsilon_N(f;r(N))\le\begin{cases}\dfrac{A_1}{N_1^{\alpha_1\gamma_1}}+\dfrac{A_2}{N_2^{\alpha_2\gamma_2}}, & \text{якщо}\ \ 0<\gamma_j\le\dfrac{\alpha_j+p}{\alpha_j+p+1};\\[2ex] \dfrac{A_1}{N_1^{\alpha_1\gamma_1}}+\dfrac{A_2}{N_2^{\alpha_2\gamma_2}}+\dfrac{B}{N_1^{\alpha_1\gamma_1}N_2^{\alpha_2\gamma_2}}, & \text{якщо}\ \ \dfrac{\alpha_j+p}{\alpha_j+p+1}<\gamma_j<\dfrac{\alpha_j+p}{p+1};\end{cases}$$

де $A_j,B=const$.

Доведення. Оцінимо перший доданок виразу (11) при $r_j = r_j(N_j)$ з врахуванням формули (9), (10) та (12)

$$|S(f;x;r) - f(x)| = \left|\frac{1}{4}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} f(x_1 + r_1t_1, x_2 + r_2t_2)g(|\,t_1\,|)g(|\,t_2\,|)\,dt_1dt_2 - f(x_1, x_2)\right| \leq$$

$$\leq A\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} |\,h_1r_1^{\alpha_1}(N_1)t_1^{\alpha_1} + h_2r_2^{\alpha_2}(N_2)t_2^{\alpha_2}\,|\,g(|\,t_1\,|)g(|\,t_2\,|)\,dt_1dt_2 =$$

$$= a_1r_1^{\alpha_1}(N_1) + a_2r_2^{\alpha_2}(N_2) = \frac{A_1}{N_1^{\alpha_1\gamma_1}} + \frac{A_2}{N_2^{\alpha_2\gamma_2}},$$

де $a_j, A_j, A = const$.

Знайдемо оцінку для другого доданку (11), з врахуванням нерівності (4), яку запишемо у вигляді

$$|\varphi(k_jr_j)| \leq \frac{A_j}{(k_jr_j)^{p+1}}, \tag{13}$$

та нерівності $c_{k_{12}} \leq \dfrac{b}{k_1^{\alpha_1}k_2^{\alpha_2}}$, де $k_jr_j >> 1$, $A_j, b = const$.

$$|S_N(f;x;r(N)) - S(f;x;r(N))| =$$

$$= \left|\sum_{k_1=\pm N_1}^{\infty}\sum_{k_2=\pm N_2}^{\infty} \varphi(k_1r_1(N_1))\varphi(k_2r_2(N_2))c_{k_{12}}e^{i(k_1x_1+k_2x_2)}\right| <$$

$$< B_1\sum_{k_1=\pm N_1}^{\infty}\sum_{k_2=\pm N_2}^{\infty} \frac{1}{(k_1r_1(N_1))^{p+1}(k_2r_2(N_2))^{p+1}k_1^{\alpha_1}k_2^{\alpha_2}} \leq$$

$$\leq B\frac{1}{N_1^{p+\alpha_1-\gamma_1(p+1)}N_2^{p+\alpha_2-\gamma_2(p+1)}}.$$

Тут $B, B_1 = const$.

Отже, остаточну оцінку для відхилення одержимо у вигляді

$$\varepsilon_N(f;r(N)) \leq \frac{A_1}{N_1^{\alpha_1\gamma_1}} + \frac{A_2}{N_2^{\alpha_2\gamma_2}} + B\frac{1}{N_1^{p+\alpha_1-\gamma_1(p+1)}N_2^{p+\alpha_2-\gamma_2(p+1)}}. \tag{14}$$

Знайдемо порядок наближення функції $f(x)$ поліномом $S_N(f;x;r(N))$ при $N \to \infty$ на основних напрямах – N_j. Відповідні доданки (14) нескінченно малі величини за умови $0 < \gamma_j < \dfrac{p+\alpha_j}{p+1}$. Найбільший порядок малості величини $\varepsilon_N(f;r(N))$ на цих напрямах досягають за такої умови: $\alpha_j\gamma_j^0 = \alpha_j + p - \gamma_j^0(p+1)$. Звідки $\gamma_j^0 = \dfrac{\alpha_j + p}{\alpha_j + p + 1}$.

Легко переконатися, що перший доданок в (14) для значень $0 < \gamma_j \le \gamma_j^0$ є нескінченно малою найнижчого порядку на будь-яких напрямах, тому

$$\varepsilon_N(f;r(N)) \le \frac{A_1}{N_1^{\alpha_1\gamma_1}} + \frac{A_2}{N_2^{\alpha_2\gamma_2}},\ A_j = const.$$

Для значень параметрів γ_j, $\gamma_j^0 < \gamma_j < \dfrac{\alpha_j+p}{p+1}$, нескінченно малою найнижчого порядку може бути перший і другий доданки залежно від напряму.

Отже, нерівність (14) набуде вигляду

$$\varepsilon_N(f;r(N)) \le \begin{cases} \dfrac{A_1}{N_1^{\alpha_1\gamma_1}} + \dfrac{A_2}{N_2^{\alpha_2\gamma_2}}, & \text{якщо}\ \ 0 < \gamma_j \le \dfrac{\alpha_j+p}{\alpha_j+p+1}; \\ \dfrac{A_1}{N_1^{\alpha_1\gamma_1}} + \dfrac{A_2}{N_2^{\alpha_2\gamma_2}} + \dfrac{B}{N_1^{\alpha_1\gamma_1}N_2^{\alpha_2\gamma_2}}, & \text{якщо}\ \ \dfrac{\alpha_j+p}{\alpha_j+p+1} < \gamma_j < \dfrac{\alpha_j+p}{p+1}; \end{cases}$$

Теорему доведено.

Знайдено також оцінку наближення похідної від функції $f(x_1,x_2)$. Запишемо вираз відхилення функції $f^{(m)}(x)$ від полінома $S_N^{(m)}(f;x;r)$ в області D^*, строго внутрішній до області $D \subset Q$

$$\begin{aligned} &\varepsilon_N^*\Big(\frac{\partial^m f(x)}{\partial x^m};r\Big) \le \\ &\le \max_{x\in D^*}\Big|S^{(m)}(f;x;r) - f^{(m)}(x)\Big| + \max_{x\in D^*}\Big|S_N^{(m)}(f;x;r) - S^{(m)}(f;x;r)\Big|. \end{aligned} \tag{15}$$

Теорема 2. *Нехай $f(x)$ 2π- періодична функція, $f(x) \in L^1(Q)$. В області, строго внутрішній до області$D \subset Q$, вона має неперервну похідну m - го порядку ($m \ge 1$) і обмежену похідну $(m+1)$ - го порядку, $f^{(m)}(x) = \dfrac{\partial^{m_1+m_2} f}{\partial x_1^{m_1}\partial x_2^{m_2}}, m = m_1 + m_2$. Тоді справджується оцінка*

$$\varepsilon_N^*\left(f^{(m)}(x);r(N)\right) \le \begin{cases} \dfrac{A_1}{N_1^{\gamma_1}} + \dfrac{A_2}{N_2^{\gamma_2}}, & \textit{якщо}\ \ 0 < \gamma_j \le \dfrac{p-m_j}{p+2}; \\ \dfrac{A_1}{N_1^{\gamma_1}} + \dfrac{A_2}{N_2^{\gamma_2}} + \dfrac{B}{N_1^{\gamma_1}N_2^{\gamma_2}}, & \textit{якщо}\ \ \dfrac{p-m_j}{p+2} < \gamma_j < \dfrac{p-m_j}{p+1}; \end{cases}$$

де $A_j, B = const$.

Доведення. Продиференціюємо ряд (5) та інтеграл (8) m разів у точці неперервності функції $f(x_1,x_2), (m_j \le p-1)$ при $r_j \ne 0$. Враховуючи, що

$$G^{(m_j)}(t_j,r_j) = \begin{cases} \dfrac{1}{2r_j}\dfrac{\partial^{m_j}}{\partial t_j^{m_j}} g\left(\dfrac{|\,t_j\,|}{r_j}\right), & |\,t_j\,| \le r_j, \\ \qquad 0, & r_j < |\,t_j\,| \le \pi, \end{cases}$$

– неперервна функція з похідною обмеженої варіації і ряд

$$G^{(m_j)}(t_j, r_j) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k_j=-\infty}^{\infty} (ik)^{m_j} \varphi(k_j r_j) e^{ik_j t_j}$$

внаслідок оцінки $|\, k^{m_j} \varphi(k_j r_j)\,| \leq \dfrac{A}{k_j^q} \quad (q \geq 2)$ рівномірно збігається, правильна рівність

$$\begin{gathered}\sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=\infty}^{\infty} (ik_1)^{m_1}(ik_2)^{m_2} \varphi(k_1 r_1)\varphi(k_2 r_2) c_{12} e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)} = \\ = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t_1, t_2) G_{x_1}^{m_1}(t_1 - x_1; r_1) G_{x_2}^{m_2}(t_2 - x_2; r_2)\, dt_1 dt_2. \end{gathered} \tag{16}$$

Оцінимо перший доданок виразу (15) при $r_j = r_j(N_j)$ в області D^* з врахуванням (12). В інтегралі (16) зробимо заміну $\dfrac{t_j - x_j}{r_j} = \xi_j$, застосуємо формулу інтегрування за частинами і врахуємо рівності $\left.\dfrac{\partial^{l_j} g(|\xi_j|)}{\partial \xi_j^{l_j}}\right|_{-1}^{1} = 0$, $(0 < l_j < m_j)$,

$$S^{(m)}(f; x; r) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t_1, t_2) G_{x_1}^{m_1}(t_1 - x_1; r_1) G_{x_2}^{m_2}(t_2 - x_2; r_2)\, dt_1 dt_2 =$$

$$= \frac{1}{4} \frac{(-1)^{m_1+m_2}}{r_1^{m_1} r_2^{m_2}} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x_1 + r_1\xi_1; x_2 + r_2\xi_2) \frac{\partial^{m_1}}{\partial \xi_1^{m_1}} g(|\xi_1|) \frac{\partial^{m_2}}{\partial \xi_2^{m_2}} g(|\xi_2|)\, d\xi_1 d\xi_2 =$$

$$= \frac{1}{4} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\partial^{m_1+m_2} f(x_1 + r_1\xi_1; x_2 + r_2\xi_2)}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2}} g(|\xi_1|) g(|\xi_2|)\, d\xi_1 d\xi_2.$$

Використовуючи ці формули для $S^{(m)}(f; x; r)$, одержимо вираз

$$\left| S^{(m)}(f; x; r) - f^{(m)}(x) \right| =$$

$$= \Big| \frac{1}{4} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\partial^{m_1+m_2} f(x_1 + r_1\xi_1; x_2 + r_2\xi_2)}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2}} g(|\xi_1|) g(|\xi_2|)\, d\xi_1 d\xi_2 - f^{(m)}(x) \Big| \leq$$

$$\leq \frac{1}{4} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} |r_1\xi_1 + r_2\xi_2|\, g(|\xi_1|) g(|\xi_2|)\, d\xi_1 d\xi_2 < \frac{A_1}{N_1^{\gamma_1}} + \frac{A_2}{N_2^{\gamma_2}},\ A_j = const.$$

Враховуючи нерівності (13) та нерівність $|c_k| \leq A < \infty$, $f(x) \in L^1(Q)$, знайдемо оцінку другого доданку виразу (15)

$$\left|S_{N}^{(m)}(f;x;r(N)) - S^{(m)}(f;x;r(N))\right| =$$

$$= \Big|\sum_{k_1=\pm N_1}^{\infty}\sum_{k_2=\pm N_2}^{\infty}(ik)^{m_1+m_2}\cdot\varphi(k_1r_1(N_1))\varphi(k_1r_1(N_1))c_{k_{12}}\cdot e^{i(k_1x_1+k_2x_2)}\Big| \leq$$

$$\leq B_1\sum_{k_1=\pm N_1}^{\infty}\sum_{k_2=\pm N_2}^{\infty}\frac{k_1^{m_1}k_2^{m_2}}{(k_1r_1(N_1))^{p+1}(k_2r_2(N_2))^{p+1}} <$$

$$< B\frac{1}{N_1^{p-m_1-\gamma_1(p+1)}N_2^{p-m_2-\gamma_2(p+1)}},\ B, B_j = const.$$

Отже,

$$\varepsilon_N^*\left(f^{(m)}(x);r(N)\right) \leq \frac{A_1}{N_1^{\gamma_1}} + \frac{A_2}{N_2^{\gamma_2}} + B\frac{1}{N_1^{p-m_1-\gamma_1(p+1)}N_2^{p-m_2-\gamma_2(p+1)}}, \tag{17}$$

де $A_j, B = const < \infty$.

Знайдемо порядок наближення функції $f^{(m)}(x)$ поліномами $S_N^{(m)}(f;x;r(N))$ на основних напрямах N_j. Відповідні доданки (17) є нескінченно малими величинами за умови $0 < \gamma_j < \dfrac{p-m_j}{p+1}$. Найбільший порядок малості величини $\varepsilon_N^*\left(f^{(m)}(x);r(N)\right)$ на цих напрямах досягається за такої умови: $\gamma_j^0 = p - m_j - \gamma_j^0(p+1)$. Звідки $\gamma_j^0 = \dfrac{p-m_j}{p+2}$.

Легко переконатися, що перший доданок в (17) для значень $0 < \gamma_j \leq \gamma_j^0$ є нескінченно малою величиною найнижчого порядку на будь-яких напрямах, тому

$$\varepsilon_N^*\left(f^{(m)}(x);r(N)\right) < \frac{A_1}{N_1^{\gamma_1}} + \frac{A_2}{N_2^{\gamma_2}},\ A_j = const < \infty.$$

Для значень параметрів γ_j в (17) $\gamma_j^0 < \gamma_j < \dfrac{p-m_j}{p+1}$ нескінченно малою найнижчого порядку може бути перший і другий доданки залежно від напряму.

Отож, нерівність (17) набуде вигляду

$$\varepsilon_N^*\left(f^{(m)}(x);r(N)\right) \leq \begin{cases} \dfrac{A_1}{N_1^{\gamma_1}} + \dfrac{A_2}{N_2^{\gamma_2}}, & \text{якщо}\ \ 0 < \gamma_j \leq \dfrac{p-m_j}{p+2}; \\ \dfrac{A_1}{N_1^{\gamma_1}} + \dfrac{A_2}{N_2^{\gamma_2}} + \dfrac{B}{N_1^{\gamma_1}N_2^{\gamma_2}}, & \text{якщо}\ \dfrac{p-m_j}{p+2} < \gamma_j < \dfrac{p-m_j}{p+1}; \end{cases}$$

де $A_j, B = const$. Теорему доведено.

4. Висновки. Сформульовані теореми розширюють межі застосовності математичного апарату методу Фур'є з використанням систем тригонометричних функцій. Зокрема, зведення крайових задач (для довільної області) до інтегральних рівнянь ґрунтується на відшуканні сингулярних розв'язків рівнянь з частинними похідними. Послідовнісний підхід до побудови узагальнених функцій (зображення їх у вигляді границь слабко збіжних послідовностей) забезпечує збіжність послідовностей узагальнених частинних сум рядів до цих сингулярних розв'язків і, відповідно, коректність формулювань інтегральних рівнянь та числових методів їхнього розв'язування.

---

1. *Бугров Я.С.* Теоремы вложения и сходимость кратных рядов Фурье / *Бугров Я.С.* // Труды Математического института АН СССР. – 1988. – Т. 181. – С. 15-26.
2. *Коровкин П.П.* Линейные операторы и теория приближений / *Коровкин П.П.* – М.: ГИФМЛ, 1959. – 212 с.
3. *Степанец А.И.* Равномерные приближения тригонометрическими полиномами / *Степанец А.И.* – Киев: Наукова думка, 1981. – 340 с.
4. *Сухорольський М.А.* Про порядок локального наближення функцій тригонометричними поліномами – частинними сумами операторів усереднення / *Сухорольський М.А.* // Укр. мат. журн. – 1997. №7. – С. 706-714.
5. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том III / *Фихтенгольц Г.М.* – М.: Наука, 1969. – 656 с.
6. *Харди Г.* Расходящиеся ряды / *Харди Г.* – М.: ИЛ, 1951. – 504 с.

ABOUT SUMMABILITY OF DOUBLE TRIGONOMETRIC SERIES BY GENERALIZED METHODS

Olesia LUBYTSKA

Lviv Polytechnic National University,
79013, Lviv, S. Bandery Str., 12
e-mail: olesja_ljubitska@yahoo.com

Generalized sums of double trigonometric series are studied. Errors of approximation of the functions by the sequences of generalized partial sums of series are investigated.

Key words: multiple trigonometric series, generalized methods of the series summability, Fejér's kernel, delta-like sequences of function.

Стаття надійшла до редколегії 03.01.2006

Прийнята до друку 22.10.2008