ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат. 2008. Вип.68. С.179-185 Ser.Mech-Math. 2008. Vol.68. P.179-185

УДК 517.53

ПРО ЗВ'ЯЗОК МІЖ МАКСИМУМОМ МОДУЛЯ І МАКСИМАЛЬНИМ ЧЛЕНОМ ЦІЛОГО РЯДУ ДІРІХЛЕ У ТЕРМІНАХ ТРИЧЛЕННОЇ СТЕПЕНЕВОЇ АСИМПТОТИКИ

Любомира ЛУГОВА

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1*

Знайдено умови на показники λ_n, за яких $\ln M(\sigma, F)$ і $\ln \mu(\sigma, F)$ мають однакове зростання у термінах тричленної степеневої асимптотики.

Ключові слова: ряд Діріхле, максимальний член, максимум модуля, тричленна степенева асимптотика.

Нехай $\Lambda = (\lambda_n)$ – зростаюча до $+\infty$ послідовність додатних чисел, $\lambda_0 = 0$, $n(t) = \sum_{\lambda_n \leq t} 1$ – лічильна функція послідовності (λ_n), а $S(\Lambda)$ – клас цілих рядів Діріхле

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\{z\lambda_n\}, \quad z = \sigma + it. \tag{1}$$

Приймемо $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma+it)| : t \in \mathbb{R}\}$, і нехай $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| \exp\{\sigma\lambda_n\} : n \geq 1\}$ – максимальний член ряду (1), а $\nu(\sigma, F) = \max\{n : \mu(\sigma, F) = |a_n| \exp\{\sigma\lambda_n\}\}$ – його центральний індекс.

Зростання цілого ряду Діріхле ототожнюється зі зростанням функції $\ln M(\sigma, F)$, а зв'язок між зростанням $\ln M(\sigma, F)$ і поводженням коефіцієнтів a_n переважно вивчають у два етапи. Спочатку визначають зв'язок між зростанням функції $\ln \mu(\sigma, F)$ і спаданням коефіцієнтів a_n, а потім досліджують умови на показники λ_n, за яких $\ln M(\sigma, F)$ і $\ln \mu(\sigma, F)$ мають однакове зростання в певній шкалі зростання. У термінах тричленної степеневої асимптотики зв'язок між зростанням $\ln \mu(\sigma, F)$ і поводженням послідовностей a_n і λ_n досліджено в [1], де доведено такі теореми.

Теорема А. *Нехай $p_1 > 1$, $0 < p < p_2 < p_1$, $T_1 > 0$, $T_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\tau \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ і $\tau^* = \tau I_{\{p: p \geq 2p_2 - p_1\}}(p) - \dfrac{(T_2 p_2)^2}{2T_1 p_1 (p_1 - 1)} I_{\{p: p \leq 2p_2 - p_1\}}(p)$, де $I_E(p)$ – характеристична функція множини E, тобто $I_E(p) = 1$, для $p \in E$, і $I_E(p) = 0$, для $p \notin E$. Тоді для того, щоб*

$$\ln \mu(\sigma) = T_1 \sigma^{p_1} + T_2 \sigma^{p_2} + (\tau + o(1))\sigma^p, \quad \sigma \to +\infty,$$

необхідно, а у випадку, коли $p \geq 2p_2 - p_1$, і достатньо, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$:

1) існувало $n_0 = n_0(\varepsilon)$ таке, що для всіх $n \geq n_0$

$$\ln|a_n| \leq -T_1(p_1-1)\Big(\frac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{p_1/(p_1-1)} + T_2\Big(\frac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{p_2/(p_1-1)} + \\ +(\tau^*+\varepsilon)\Big(\frac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{\frac{\max\{p,\,2p_2-p_1\}}{p_1-1}};$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що

$$\ln|a_{n_k}| \geq -T_1(p_1-1)\Big(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{p_1/(p_1-1)} + T_2\Big(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{p_2/(p_1-1)} + \\ +(\tau^*-\varepsilon)\Big(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{\frac{\max\{p,\,2p_2-p_1\}}{p_1-1}}$$

і $\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k} = o\Big(\lambda_{n_k}^{\frac{p_1+\max\{p,\,2p_2-p_1\}-2}{2(p_1-1)}}\Big), \quad k \to \infty.$

Теорема Б. *Нехай $2p_2 - p_1 > 0$ і $(3p_2-2p_1)(3p_2-2p_1+1) \neq 0$. Для того, щоб*

$$\ln\mu(\sigma) = T_1\sigma^{p_1} + T_2\sigma^{p_2} + \frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}\sigma^{2p_2-p_1} + o(\sigma^{3p_2-2p_1}), \quad \sigma \to +\infty,$$

необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$:

1) існувало $n_0 = n_0(\varepsilon)$ таке, що для всіх $n \geq n_0$

$$\ln|a_n| \leq -T_1(p_1-1)\Big(\frac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{p_1/(p_1-1)} + T_2\Big(\frac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{p_2/(p_1-1)} - \\ -\left(\frac{(3p_2-2p_1+1)(T_2p_2)^3}{6(T_1p_1(p_1-1))^2} + \varepsilon\right)\left(\frac{\lambda_n}{T_1p_1}\right)^{(3p_2-2p_1)/(p_1-1)};$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що

$$\ln|a_{n_k}| \geq -T_1(p_1-1)\Big(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{p_1/(p_1-1)} + T_2\Big(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{p_2/(p_1-1)} - \\ -\left(\frac{(3p_2-2p_1+1)(T_2p_2)^3}{6(T_1p_1(p_1-1))^2} - \varepsilon\right)\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\right)^{(3p_2-2p_1)/(p_1-1)}$$

і $\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k} = o\Big(\lambda_{n_k}^{\frac{3p_2-2p_1-2}{2(p_1-1)}}\Big)$, $k \to \infty$.

Щодо зв'язку між зростанням $\ln M(\sigma, F)$ і $\ln\mu(\sigma, F)$ у термінах тричленної степеневої асимптотики, то в [2] доведено таку теорему.

Теорема В. *Для того, щоб для кожної функції $F \in S(\Lambda)$ співвідношення*

$$\ln\mu(\sigma) \leq T_1\sigma^{p_1} + T_2\sigma^{p_2} + (\tau + o(1))\sigma^p, \quad \sigma \to +\infty,$$

і

$$\ln M(\sigma) \leq T_1\sigma^{p_1} + T_2\sigma^{p_2} + (\tau + o(1))\sigma^p, \quad \sigma \to +\infty.$$

були рівносильними, достатньо, а у випадку, коли $p \geqslant 2p_2 - p_1$, і необхідно, щоб послідовність Λ задовольняла умову

$$\ln n(t) = o\left(t^{\frac{p}{p_1}}\right), \quad t \to +\infty.$$

У доведенні необхідності у теоремі В використовують теорему А. Якщо ж використати теорему Б, то можна довести таку теорему.

Теорема 1. *Нехай $3p_2 - 2p_1 > 0$. Для того, щоб для кожної функції $F \in S(\Lambda)$ співвідношення*

$$\ln \mu(\sigma) \le T_1\sigma^{p_1} + T_2\sigma^{p_2} + \frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}\sigma^{2p_2-p_1} + o(\sigma^{3p_2-2p_1}), \quad \sigma \to +\infty, \qquad (2)$$

і

$$\ln M(\sigma) \le T_1\sigma^{p_1} + T_2\sigma^{p_2} + \frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}\sigma^{2p_2-p_1} + o(\sigma^{3p_2-2p_1}), \quad \sigma \to +\infty, \qquad (3)$$

були рівносильними необхідно і достатньо, щоб послідовність Λ задовольняла умову

$$\ln n(t) = o\left(t^{\frac{3p_2-2p_1}{p_1}}\right), \quad t \to +\infty. \qquad (4)$$

Для доведення цієї теореми, крім теореми Б, будуть потрібні ще декілька результатів.

Лема 1 [3-4]. *Якщо (μ_n) – зростаюча до $+\infty$ послідовність додатних чисел і $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\dfrac{\ln n}{\mu_n} > 1$, то існує підпослідовність (μ_k^*) послідовності (μ_n) така, що $k \le \exp\{\mu_k^*\} + 1$ для всіх $k \in \mathbb{N}$ і $k_j \ge \exp\{\mu_{k_j}^*\}$ для деякої зростаючої до $+\infty$ послідовності (k_j).*

Припустимо, що

$$\Phi(\sigma) = T_1\sigma^{p_1} + T_2\sigma^{p_2} + \tau\sigma^{p} + \delta\sigma^{s} \quad (\sigma \ge \sigma_0),$$

де $T_1 > 0$, $p_1 > 1$, $0 < p < p_2 < p_1$, $s \le p$, $T_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\tau \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ і $\delta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Лема 2 [1]. *Якщо $p = 2p_2 - p_1$, $s = 3p_2 - 2p_1$, $\tau = \dfrac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$, $(3p_2-2p_1)(3p_2-2p_1+1) \ne 0$ і $\delta \ne \dfrac{(3p_2-2p_1+1)(T_2p_2)^3}{6(T_1p_1(p_1-1))^2}$, то*

$$\Phi(\varphi(x)) = T_1\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_1}{p_1-1}} + \frac{T_2(p_1-p_2-1)}{p_1-1}\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_2}{p_1-1}} +$$

$$+\frac{3p_2-3p_1+1}{p_1-1}\left(\frac{(3p_2-2p_1+1)(T_2p_2)^3}{6(T_1p_1(p_1-1))^2} - \delta + o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{3p_2-2p_1}{p_1-1}}.$$

Зауважимо, що функція φ, яка є оберненою до похідної Φ' функції Φ, за умов леми 2 має вигляд

$$\varphi(x) = \left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{1}{p_1-1}} - \frac{T_2p_2}{T_1p_1(p_1-1)}\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_2-p_1+1}{p_1-1}} +$$

$$+\frac{3p_2-2p_1}{T_1p_1(p_1-1)}\left(\frac{(3p_2-2p_1+1)(T_2p_2)^3}{6(T_1p_1(p_1-1))^2}-\delta+o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{3p_2-3p_1+1}{p_1-1}}.$$

Лема 3 [2]. *Нехай* $T_1>0$, $p_1>1$, $0<p<p_m<\dots<p_2<p_1$, $T_j\in\mathbb{R}$ $(j=1,\dots,m)$ *і* $T\in\mathbb{R}$. *Тоді, якщо*

$$\ln n(t)=o(t^{p/p_1}),\quad t\to+\infty,$$

то з асимптотичної нерівності

$$\ln\mu(\sigma,F)\le\sum_{j=1}^{m}T_j\sigma^j+(T+o(1))\sigma^p,\quad \sigma\to+\infty,$$

випливає асимптотична нерівність

$$\ln M(\sigma,F)\le\sum_{j=1}^{m}T_j\sigma^j+(T+o(1))\sigma^p,\quad \sigma\to+\infty.$$

Доведення теореми 1. Необхідність умови (4) будемо доводити від супротивного. Припустимо, що вона не виконується, тобто

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{\lambda_n^{(3p_2-2p_1)/p_1}}>\beta>0.$$

Тоді за лемою 1 існує підпослідовність $(\lambda_k^\star)$ послідовності (λ_n) така, що

$$k\le\exp\left\{\beta\,(\lambda_k^\star)^{(3p_2-2p_1)/p_1}\right\}+1$$

для всіх $k\in\mathbb{N}$ і

$$k_j\ge\exp\left\{\beta\left(\lambda_{k_j}^\star\right)^{(3p_2-2p_1)/p_1}\right\}$$

для деякої зростаючої до $+\infty$ послідовності (k_j).

Приймемо $a_n=0$, якщо $\lambda_n\notin\{\lambda_k^\star\}$, і $a_n=a_k^\star$, якщо $\lambda_n\in\{\lambda_k^\star\}$, де

$$\ln a_k^\star=-T_1(p_1-1)\Big(\frac{\lambda_k^\star}{T_1p_1}\Big)^{p_1/(p_1-1)}+T_2\Big(\frac{\lambda_k^\star}{T_1p_1}\Big)^{p_2/(p_1-1)}-$$

$$-\frac{(3p_2-2p_1+1)(T_2p_2)^3}{6(T_1p_1(p_1-1))^2}\Big(\frac{\lambda_k^\star}{T_1p_1}\Big)^{(3p_2-2p_1)/(p_1-1)}.$$

Для цілого ряду Діріхле з такими коефіцієнтами за теоремою Б правильна асимптотична рівність (2). Зауважимо таке: $3p_2-2p_1>0$, то $2p_2-p_1>0$. Нехай $m_j=\left[k_j-\sqrt{k_j}\right]$. Тоді

$$\lambda_{m_j}^\star\ge\left(\frac{\ln(m_j-1)}{\beta}\right)^{\frac{p_1}{3p_2-2p_1}}\ge\left(\frac{\ln(k_j-\sqrt{k_j}-2)}{\beta}\right)^{\frac{p_1}{3p_2-2p_1}}=$$

$$= \left(\frac{\ln k_j - \frac{(1+o(1))}{\sqrt{k_j}}}{\beta} \right)^{\frac{p_1}{3p_2-2p_1}} = \left(\frac{\ln k_j}{\beta} \right)^{\frac{p_1}{3p_2-2p_1}} \left(1 - \frac{1+o(1)}{\sqrt{k_j}\ln k_j} \right)^{\frac{p_1}{3p_2-2p_1}} \geq$$

$$\geq \lambda^\star_{k_j} - \lambda^\star_{k_j} \frac{(1+o(1))p_1}{(3p_2-2p_1)\sqrt{k_j}\ln k_j} = \lambda^\star_{k_j} - \delta_j,$$

де

$$\delta_j = \frac{(1+o(1))p_1}{(3p_2-2p_1)\beta} \left(\lambda^\star_{k_j} \right)^{\frac{p_1-3p_2+2p_1}{p_1}} \exp\left\{ -\frac{\beta}{2} \left(\lambda^\star_{k_j} \right)^{\frac{3p_2-2p_1}{p_1}} \right\}, \quad j \to \infty,$$

а для $\sigma > 0$

$$M(\sigma, F) \geq \sum_{k=m_j}^{k_j} a^\star_k \exp\{\sigma \lambda^\star_k\} \geq (k_j - m_j + 1) a^\star_{k_j} \exp\{\sigma \lambda^\star_{k_j}\} \geq$$

$$\geq \sqrt{k_j} a^\star_{k_j} \exp\{\sigma(\lambda^\star_{k_j} - \delta_j)\}.$$

Звідси випливає, що

$$\ln\, M(\sigma, F) \geq \frac{1}{2} \ln\, k_j + \ln\, a^\star_{k_j} + \sigma \lambda^\star_{k_j} - \sigma \delta_j \geq$$

$$\geq \frac{\beta}{2} \left(\lambda^\star_{k_j} \right)^{(3p_2-2p_1)/p_1} - T_1(p_1-1) \left(\frac{\lambda^\star_{k_j}}{T_1 p_1} \right)^{p_1/(p_1-1)} + T_2 \left(\frac{\lambda^\star_{k_j}}{T_1 p_1} \right)^{p_2/(p_1-1)} -$$

$$- \frac{(3p_2-2p_1+1)(T_2 p_2)^3}{6(T_1 p_1 (p_1-1))^2} \left(\frac{\lambda^\star_{k_j}}{T_1 p_1} \right)^{(3p_2-2p_1)/(p_1-1)} + \sigma \lambda^\star_{k_j} - \sigma \delta_j. \qquad (5)$$

Нехай

$$\sigma = \sigma_j = \varphi(\lambda^\star_{k_j}) = \left(\frac{\lambda^\star_{k_j}}{T_1 p_1} \right)^{1/(p_1-1)} - \frac{T_2 p_2}{T_1 p_1 (p_1-1)} \left(\frac{\lambda^\star_{k_j}}{T_1 p_1} \right)^{(p_2-p_1+1)/(p_1-1)} +$$

$$+ \frac{(3p_2-2p_1)(3p_2-2p_1+1)(T_2 p_2)^3}{T_1 p_1 (p_1-1) 6 (T_1 p_1 (p_1-1))^2} \left(\frac{\lambda^\star_{k_j}}{T_1 p_1} \right)^{(3p_2-3p_1+1)/(p_1-1)}.$$

Тоді $\sigma_j \delta_j \to 0$ при $j \to \infty$ і з (5) одержимо

$$\ln\, M(\sigma_j, F) \geq \frac{\beta}{2} \left(\lambda^\star_{k_j} \right)^{(3p_2-2p_1)/p_1} - T_1(p_1-1) \left(\frac{\lambda^\star_{k_j}}{T_1 p_1} \right)^{p_1/(p_1-1)} +$$

$$+ T_2 \left(\frac{\lambda^\star_{k_j}}{T_1 p_1} \right)^{p_2/(p_1-1)} - \frac{(3p_2-2p_1+1)(T_2 p_2)^3}{6(T_1 p_1 (p_1-1))^2} \left(\frac{\lambda^\star_{k_j}}{T_1 p_1} \right)^{(3p_2-2p_1)/(p_1-1)} +$$

$$+ T_1 p_1 \left(\frac{\lambda^\star_{k_j}}{T_1 p_1} \right)^{p_1/(p_1-1)} - \frac{T_2 p_2}{p_1-1} \left(\frac{\lambda^\star_{k_j}}{T_1 p_1} \right)^{p_2/(p_1-1)} +$$

$$+\frac{(3p_2-2p_1)(3p_2-2p_1+1)(T_2p_2)^3}{(p_1-1)6(T_1p_1(p_1-1))^2}\left(\frac{\lambda^\star_{k_j}}{T_1p_1}\right)^{(3p_2-2p_1)/(p_1-1)}+o(1)=$$

$$=T_1\left(\frac{\lambda^\star_{k_j}}{T_1p_1}\right)^{p_1/(p_1-1)}+T_2\frac{p_1-p_2-1}{p_1-1}\left(\frac{\lambda^\star_{k_j}}{T_1p_1}\right)^{p_2/(p_1-1)}+$$

$$+\left(\frac{(3p_2-2p_1+1)(3p_2-3p_1+1)(T_2p_2)^3}{6(p_1-1)(T_1p_1(p_1-1))^2}+\frac{\beta}{2}\right)\left(\frac{\lambda^\star_{k_j}}{T_1p_1}\right)^{\frac{3p_2-2p_1}{p_1-1}}+o(1).$$

З іншого боку, використовуючи лему 2 при $j\to\infty$, маємо

$$T_1\sigma_j^{p_1}+T_2\sigma_j^{p_2}+\tau\sigma_j^{2p_2-p_1}+o(\sigma_j^{3p_2-2p_1})=$$

$$=T_1\left(\frac{\lambda^\star_{k_j}}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_1}{p_1-1}}+\frac{T_2(p_1-p_2-1)}{p_1-1}\left(\frac{\lambda^\star_{k_j}}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_2}{p_1-1}}+$$

$$+\frac{3p_2-3p_1+1}{p_1-1}\left(\frac{(3p_2-2p_1+1)(T_2p_2)^3}{6(T_1p_1(p_1-1))^2}+o(1)\right)\left(\frac{\lambda^\star_{k_j}}{T_1p_1}\right)^{\frac{3p_2-2p_1}{p_1-1}}.$$

З двох останніх співвідношень випливає, що співвідношення (3) не виконується, тобто умова (4) є необхідною для того, щоб для кожної функції $F\in S(\Lambda)$ зі співвідношення (2) випливало співвідношення (3).

Достатність умови (4) випливає з леми 3. Достатньо останній член асимптотики у лемі 3 записати у вигляді $(T+o(1))\sigma^p=\tau\sigma^p+o(\sigma^s)$, $\sigma\to+\infty$, та вибрати $m=2$, $p=2p_2-p_1$, $s=3p_2-2p_1$ і $\tau=\dfrac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$.

Зауваження 1. Використовуючи нерівність Коші $\mu(\sigma,F)\le M(\sigma,F)$ з доведення леми 3 в [2] легко отримати за умови (4) $\ln M(\sigma,F)-\ln\mu(\sigma,F)=o\left(\sigma^{3p_2-2p_1}\right)$, $\sigma\to+\infty$. Звідси випливає, що за умови (4) рівносильними є також співвідношення

$$\ln\mu(\sigma)=T_1\sigma^{p_1}+T_2\sigma^{p_2}+\frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}\sigma^{2p_2-p_1}+o(\sigma^{3p_2-2p_1}),\quad \sigma\to+\infty,$$

та

$$\ln M(\sigma)=T_1\sigma^{p_1}+T_2\sigma^{p_2}+\frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}\sigma^{2p_2-p_1}+o(\sigma^{3p_2-2p_1}),\quad \sigma\to+\infty.$$

---

1. *Шеремета М.М.* Тричленна степенева асимптотика логарифма максимального члена цілого ряду Діріхле / *Шеремета М.М., Лугова Л.Л.* // Матем. студії. – 2006. – Т. 25, №2. – С. 149-168.
2. *Лугова Л.Л.* Про тричленну степеневу асимптотику цілого ряду Діріхле / *Лугова Л.Л., Шеремета М.М.* // Матем. студії. – 2007. – Т. 28, №1. – С.37-40.
3. *Sumyk O.M.* On connection between the growth of maximum modulus and maximal term of entire Dirichlet series in term of m-member asymptotics / *Sumyk O.M., Sheremeta M.M.* // Matem. studii – 2003. – V. 19, №1. – P. 83-88.
4. *Шеремета М.Н.* О поведении максимума модуля целого ряда Дирихле вне исключительного множества / *Шеремета М.Н.* // Матем. заметки. – 1995. – Т.57, №2. – С. 283-296.

ON CONNECTION BETWEEN MAXIMUM MODULUS AND MAXIMAL TERM OF ENTIRE DIRICHLET SERIES IN TERM OF THREE-MEMBER ASYMPTOTICS

Lyubomyra LUHOVA

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka str., 1

Condition on the exponent λ_n are found, under which the $\ln M(\sigma, F)$ and $\ln \mu(\sigma, F)$ are equivalent in term of three-member asymptotics.

Key words: Dirichlet series, maximal term, maximum modulus, three-term power asymptotic

Стаття надійшла до редколегії 21.03.2008

Прийнята до друку 22.10.2008