ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат. 2008. Вип.68. С.171-178 Ser.Mech-Math. 2008. Vol.68. P.171-178

УДК 517.98

# ФУНКЦІОНАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ДЛЯ РЕГУЛЯРНИХ ЕЛІПТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ

**Віра ЛОЗИНСЬКА**[1], **Ольга М'ЯУС**[2]

[1]*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 79060, Львів, вул. Наукова, 3б*

[2]*Національний університет "Львівська політехніка", 79013, Львів, вул. С. Бандери, 12*

Функціональне числення побудовано для генераторів сильно неперервних груп обмежених лінійних операторів, що діють над довільним банаховим простором [1], застосовують до регулярних еліптичних диференціальних операторів, які діють над банаховим простором $L_p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$, $\Omega$ – обмежена множина. Показано, що у цьому випадку функціональне числення існує над просторами кореневих векторів еліптичного оператора.

*Ключові слова:* еліптичний оператор, кореневий вектор, функціональне числення.

Розглянемо простір $\{L_p(\Omega), \|\cdot\|\}$ $(1 < p < \infty)$, $\Omega$ – обмежена множина. Нехай в $L_p(\Omega)$ діє рівномірно обмежена однопараметрична $C_0$-група $\mathbb{R} \ni t \to U_t := e^{-itA} \in \mathcal{L}(L_p(\Omega))$ з генератором $A$. Через $\mathcal{L}(L_p(\Omega))$ позначаємо банахову алгебру обмежених лінійних операторів над $L_p(\Omega)$ з одиничним оператором $I$. Оператор $A$ – регулярний еліптичний оператор порядку $2m$

$$A : \mathcal{D}(A) \ni u \longmapsto \sum_{|\alpha| \le 2m} a_\alpha(t) D^\alpha u(t) \in L_p(\Omega), \quad a_\alpha(t) \in C^\infty(\overline{\Omega})$$

з областю визначення $\mathcal{D}(A) := \left\{ u \in W_p^{2m}(\Omega) : B_j u(t)_{|\partial\Omega} = 0;\ j = 1, \ldots, m \right\}$, де $W_p^{2m}(\Omega)$ – простір Соболєва і $B_j = \sum_{|\alpha| \le k_j} b_{j,\alpha}(t) D^\alpha$, $b_{j,\alpha}(t) \in C^\infty(\partial\Omega)$, $0 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_m$ – набір граничних операторів.

Спектр $\sigma(A)$ оператора $A$ є послідовністю власних чисел $\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$ з єдиною точкою скупчення на безмежності. Кожному числу $\lambda_j \in \sigma(A)$ відповідає скінченновимірний кореневий підпростір

$$R(\lambda_j) := \{x \in X : (\lambda_j I - A)^{r_j} x = 0\},$$

де $r_j-$ індекс власного числа $\lambda_j$, тобто, найменше невід'ємне ціле число $r$ таке, що $(\lambda_j I - A)^r x = 0$ для довільного вектора $x$, для якого $(\lambda_j I - A)^{r+1} x = 0$ [2].

Розглянемо при фіксованих $m \in Z_+, a > 0$ простір $L_1^{(m,a)}(\mathbb{R})$ вимірних функцій $\varphi(t)$ з нормою

$$\|\varphi\|_{L_1^{(m,a)}(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{\infty} |t^m \omega(at)\varphi(t)| dt < \infty,$$

де $\omega(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ – ціла трансцендентна функція нульового роду, корені якої лежать на уявній додатній півосі вигляду $\omega(t) := C \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t}{it_k}\right)$, $C \geq 1$, $0 < t_1 \leq \leq t_2 \leq t_3 \leq \ldots$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{t_k} < \infty$.

Для кожного $\nu > 0$ розглянемо в $L_1^{(m,a)}(\mathbb{R})$ підпростір

$$E_\nu^{(m,a)} := \left\{ \varphi \in L_1^{(m,a)}(\mathbb{R}) \Big| \, \|\varphi\|_{E_\nu^{(m,a)}} = \sup_{k \in \mathrm{Z}_+} \frac{\|D^k \varphi\|_{L_1^{(m,a)}(\mathbb{R})}}{\nu^k} < \infty \right\}.$$

Простори $E_\nu^{(m,a)}$ є банаховими та складаються з цілих функцій експоненціального типу [3], [4].

Розглянемо простір

$$E := \bigcap\nolimits_{m,a} \bigcup\nolimits_{\nu} E_\nu^{(m,a)} = \lim_{m,a} \mathrm{pr} \left( \lim_{\nu \to +\infty} \mathrm{ind}\, E_\nu^{(m,a)} \right),$$

де вкладення просторів $E_\nu^{(m,a)} \subset E_\mu^{(m,a)}$ $(\nu \leq \mu)$, $\bigcup_\nu E_\nu^{(m+1,a+1)} \subset \bigcup_\nu E_\nu^{(m,a)}$ неперервні. Простір $E$ – секвенціально повний та інваріантний стосовно дії групи зсувів $T_s : \varphi(t) \to \varphi(t-s)$, де $s \in \mathbb{R}$ [3].

Через $E'$ позначимо спряжений простір до $E$ і наділимо слабкою топологією спряженого простору. Канонічну білінійну форму, яка задає двоїстість між просторами $E'$ і $E$, позначимо через $\langle f \mid \varphi \rangle$. Елементи спряженого простору називаємо узагальненими функціями експонеціального типу. Для довільної узагальненої функції експонеціального типу $f \in E'$ та функції $\varphi \in E$ операцію згортки визначимо співвідношенням

$$(f \star \varphi)(t) := \langle f(s) \mid \varphi(t+s) \rangle = \langle f(s) \mid T_{-s}\varphi(t) \rangle = \langle f(s) \mid T_{-t}\varphi(s) \rangle,$$

де $f(s)$ позначає дію функціонала $f$ на функцію $T_{-s}\varphi(t)$ за змінною $s$. Перетворення Фур'є виконує лінійний ізоморфізм $\mathcal{F} : E \ni \varphi(t) \longrightarrow \widehat{\varphi}(\xi) \in \widehat{E}$. Простір $\widehat{E}$ наділяємо топологією стосовно відображення $\mathcal{F}$. Обернене перетворення можна визначити формулою $\mathcal{F}^{-1} : \widehat{E} \ni \widehat{\varphi}(\xi) \longrightarrow \varphi(t) \in E$, оскільки Фур'є-образи функцій експоненціального типу є фінітними [5]. Двоїстість $\langle E' \mid E \rangle$ допомагає визначити спряжене відображення до оберненого $(\mathcal{F}^{-1})' : E' \ni f \longrightarrow \widehat{f} \in \widehat{E}'$. Його образ $\widehat{E}'$, який породжує двоїстість вигляду $\langle \widehat{E}' \mid \widehat{E} \rangle$, наділяємо слабкою топологією.

Простір $\widehat{E}'$ є комутативною алгеброю [3] щодо множення, визначеного співвідношенням $\langle \widehat{g} \cdot \widehat{f} \mid \widehat{\varphi} \rangle := \langle \widehat{g} \mid \widehat{f} \cdot \widehat{\varphi} \rangle$, де для будь-яких $f, g \in E'$, $\varphi, \psi \in E$ $\widehat{f \star \varphi} := \widehat{f} \cdot \widehat{\varphi}$, $\langle \widehat{f} \cdot \widehat{\varphi} \mid \widehat{\psi} \rangle := \langle \widehat{f} \mid \widehat{\varphi} \cdot \widehat{\psi} \rangle$.

Використаємо поняття з [6] спектрального підпростору оператора. Введемо простір функцій

$$\mathcal{E}_m := \Big\{ \rho \in E \ \Big| \ \widehat{\rho}\,|_{[-m,m]} = 1 \Big\}, \ \ m \in \mathbb{N}.$$

Спектральним підпростором оператора $A$ називаємо підпростір вигляду

$$S_m := \Big\{ x \in L_p(\Omega) \ \Big| \ \widehat{\rho}(A)x = x \Big\},$$

де оператор $\widehat{\rho}(A)$ визначений так:

$$\widehat{\rho}(A) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itA}\rho(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} U_t\rho(t)dt.$$

В [6] визначено, що підпростори $S_m$ є замкненими та задовольняють умову $S_m \subset S_{m+1}$, а звуження оператора $A$ на них має властивість $Ax = A\widehat{\rho}(A)x = \widehat{-i\rho'}(A)x$, тому $S_m \subset \mathcal{D}(A)$. Оператор $A$ на $S_m$ обмежений і є генератором рівномірно обмеженої сильно неперервної групи, тому об'єднання $\bigcup_m S_m$ є щільним в $L_p(\Omega)$. У [7] показано, що спектральні підпростори регулярного еліптичного оператора $A$ збігаються з прямою сумою його кореневих підпросторів, тобто

$$S_m = \bigoplus_{|\lambda_j| \le m} R(\lambda_j).$$

Нехай $E(\mathbb{R};X) := X \widetilde{\otimes} E$ – поповнення проективного тензорного добутку просторів $X$ та $E$. Лінійний оператор $\widehat{f}(A)$ визначимо як і в [1] співвідношенням

$$\widehat{f}(A) : \ \widehat{E}(X) \ni \widehat{x} \to \widehat{f}(A)\widehat{x} := \int_{-\infty}^{\infty} (U_t \otimes K_f)x(t)\,dt \in \widehat{E}(X), \tag{1}$$

де $\widehat{E}(X) := \Big\{ \widehat{x} = \int_{-\infty}^{\infty} (U_t \otimes I)x(t)\,dt \ \Big| \ x \in E(\mathbb{R};X) \Big\}$, $K_f\varphi = f \star \varphi$, $f \in E'$, $\varphi \in E$. Нехай $\mathcal{L}(\bigoplus_{|\lambda_j| \le m} R(\lambda_j))$ – банахова алгебра обмежених лінійних операторів над $\bigoplus_{|\lambda_j| \le m} R(\lambda_j)$ з одиничним оператором $I$.

**Теорема 1.** *Для довільної узагальненої функції $f \in E'$ та чисел $m \in \mathrm{N}$ співвідношення*

$$\widehat{f}(A) : \bigoplus_{|\lambda_j| \le m} R(\lambda_j) \ni x \longrightarrow \widehat{(f \star \rho)}(A)x \in \bigoplus_{|\lambda_j| \le m} R(\lambda_j)$$

*виконується для кожної функції $\rho \in \mathcal{E}_m$.*

*Крім того, $\widehat{f}(A)\,|_{\bigoplus_{|\lambda_j| \le m} R(\lambda_j)} \in \mathcal{L}(\bigoplus_{|\lambda_j| \le m} R(\lambda_j))$.*

*Доведення.* З формули (1) отримуємо $\widehat{f}(A)x = \widehat{f}(A)\widehat{\rho}(A)x = \widehat{(f \star \rho)}(A)x$, $\forall x \in \bigoplus_{|\lambda_j| \le m} R(\lambda_j)$. Підставляючи $x(t) = x \otimes \rho(t)$ в (1) при $x \in \bigoplus_{|\lambda_j| \le m} R(\lambda_j)$ також, маємо

$$\|\widehat{f}(A)x\| = \|\widehat{f \star \rho}(A)x\| \le \int_{-\infty}^{\infty} \|U_t x\|\,|\rho(t)|\,dt \le \|U_t\|\|x\|\,\|\rho\|_{L_1}$$

для функції $\rho \in \mathcal{E}_m$. Звідси $\widehat{f}(A)_{|\bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R(\lambda_j)} \in \mathcal{L}(\bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R(\lambda_j))$. Теорему доведено.

Нехай топологія в підпросторі $R(A) = \bigcup\limits_m \bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R(\lambda_j)$ індукується з простору $L_p(\Omega)$ і в алгебрі $\mathcal{L}(R(A))$ задана сильна операторна топологія.

**Теорема 2.** *Відображення $\widehat{E}' \ni \widehat{f} \longrightarrow \widehat{f}(A) \in \mathcal{L}(R(A))$ виконує неперервний гомоморфізм алгебри $\widehat{E}'$ в алгебру $\mathcal{L}(R(A))$, при цьому*

$$\widehat{(D^k f)}(A) = i^k A^k \widehat{f}(A), \quad \widehat{(it)^k f}(A) = D^k \widehat{f}(A).$$

*Оператори $\widehat{f}(A)$ над простором $L_p(\Omega)$ допускають замикання з областю визначення*

$$\Big\{x = \sum_{m=1}^{\infty} x_m \in L_p(\Omega) \;\Big|\; x_m \in \bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R(\lambda_j),\ \sum_{m=1}^{\infty} \|\widehat{f}(A)x_m\| < \infty\Big\}.$$

*Доведення.* Оскільки $\mathcal{E}_m \subset E$, то звідси випливає, що оператор $\widehat{f}(A)$ є звуженням такого самого оператора з теореми 4 [1]. Відображення $\widehat{E}' \ni \widehat{f} \longrightarrow \widehat{f}(A) \in \mathcal{L}(R(A))$ є гомоморфізмом алгебри $\widehat{E}'$ в алгебру $\mathcal{L}(R(A))$. Перевіримо неперервність відображення $E' \ni f \longrightarrow \widehat{f}(A)x \in L_p(\Omega)$. Для кожного $x \in R(A)$, маємо $\|\widehat{f}(A)x - \widehat{g}(A)x\| \le$ $\le \int_{-\infty}^{\infty} \|U_t x\| \, |(f-g)\star\rho(t)| dt \le \|U_t\| \|x\| \int_{-\infty}^{\infty} |(f-g)\star\rho(t)| dt \to 0$ при $f \to g$ в просторі $E'$.

Доведемо існування замикання оператора $\widehat{f}(A)$ над простором $L_p(\Omega)$, використовуючи міркування [7]. Визначимо простір абсолютно збіжних рядів

$$l_1\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R(\lambda_j);\, L_p(\Omega)\Big] := \Big\{x = \sum_{m=1}^{\infty} x_m \in L_p(\Omega) \;\Big|\; x_m \in \bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R(\lambda_j);$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \|x_m\| < \infty\Big\}$$

з нормою $\|x\|_{l_1} := \inf \sum\limits_{m=1}^{\infty} \|x_m\|$, де inf беремо за всіма зображеннями вектора $x$ у вигляді такого ряду $x = \sum\limits_{m=1}^{\infty} x_m$.

Доведемо, що простір $l_1\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R(\lambda_j);\, L_p(\Omega)\Big]$ ізометричний простору $L_p(\Omega)$. Оскільки $\|x\| = \|\sum\limits_{m=1}^{\infty} x_m\| \leqslant \sum\limits_{m=1}^{\infty} \|x_m\|$, для довільного $x \in l_1\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R(\lambda_j);\, L_p(\Omega)\Big]$, то $l_1\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R(\lambda_j);\, L_p(\Omega)\Big] \subset \overline{R(A)}$, де замикання за нормою $L_p(\Omega)$. З іншого боку, $R(A) \subset l_1\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R(\lambda_j);\, L_p(\Omega)\Big]$ і $\|x\|_{l_1} = \|x\|$ для всіх $x \in \bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R(\lambda_j)$ і всіх $m \in \mathbb{N}$. Тому $\|x\|_{l_1} = \|x\|$ для всіх $x \in R(A)$, отже, $\overline{R(A)} \subset l_1\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R(\lambda_j);\, L_p(\Omega)\Big]$. Згідно з попереднім зауваженням $\overline{R(A)} = L_p(\Omega)$.

Введемо ще один допоміжний простір

$$l_1\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R(\lambda_j)\Big] := \Big\{\, x=(x_m)_{m=1}^{\infty} \;\Big|\; x_m\in \bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R(\lambda_j),$$

$$\|x\|_l=\sum_{m=1}^{\infty}\|x_m\|<\infty\Big\}.$$

Сильно спряжений простір до $l_1\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R(\lambda_j)\Big]$ має вигляд

$$l_{\infty}\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R(\lambda_j)'\Big] := \Big\{\, y=(y_m)_{m=1}^{\infty} \;\Big|\; y_m\in \bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R(\lambda_j)',\;\; \|y\|_{\infty}<\infty\Big\},$$

де $\|y\|_{\infty} := \sup\limits_{m\ge 1}\|y_m\|$ – його норма, простір $\bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R(\lambda_j)'$ – спряжений простір до $\bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R(\lambda_j)$ з нормою $\|y_m\| = \sup\limits_{\|x_m\|\le 1} |\langle x_m, y_m\rangle|$, де $x_m\in\bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R(\lambda_j)$.

Доведемо, що сильно спряжений простір до $l_1\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R(\lambda_j);\, L_p(\Omega)\Big]$ ізометричний до простору

$$l_{\infty}^{0}\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R(\lambda_j)'\Big] = \Big\{ y=(y_m)_{m=1}^{\infty}\in l_{\infty}\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R(\lambda_j)'\Big] \;\Big|\; \sum_{m=1}^{\infty}\langle x_m, y_m\rangle = 0,$$

$$\forall \sum_{m=1}^{\infty} x_m = 0\Big\}.$$

Визначимо відображення $\Phi\,:\, l_1\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R(\lambda_j)\Big]\ni x\mapsto \sum\limits_{m=1}^{\infty} x_m\in L_p(\Omega)$. Згідно з означенням простір $l_1\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R(\lambda_j);\, L_p(\Omega)\Big]$ ізометричний фактор-простору по ядру відображення $\Phi$, тобто

$$l_1\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R(\lambda_j);\, L_p(\Omega)\Big]\simeq l_1\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R(\lambda_j)\Big]/\operatorname{Ker}\Phi.$$

Сильно спряжений простір до $l_1\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R(\lambda_j)\Big]$ збігається з простором $l_{\infty}\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R(\lambda_j)'\Big]$. Тому сильно спряжений до $l_1\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R(\lambda_j)\Big]/\operatorname{Ker}\Phi$ є полярою в просторі $l_{\infty}\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R(\lambda_j)'\Big]$ ядра $\operatorname{Ker}\Phi$ [8, гл.V, п.1] стосовно двоїстості $\Big\langle l_1\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R(\lambda_j)\Big],\, l_{\infty}\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R(\lambda_j)'\Big]\Big\rangle$.

З попередніх тверджень випливає, що для будь-якого функціонала $y\in L_p'(\Omega)$ послідовність його звужень $y_m = y\,|_{\bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R(\lambda_j)}$ визначає елемент простору $l_{\infty}^{0}\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R(\lambda_j)'\Big]$ і відображення

$$L_p'(\Omega)\ni y\to (y_m)_{m=1}^{\infty}\in l_{\infty}^{0}\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R(\lambda_j)'\Big]$$

виконує ізометричний ізоморфізм просторів, тобто виконується рівність $\|y\| = \sup\limits_{m\geq 1}\|y_m\|$.

Перейдемо до питання існування замикання функцій від оператора. Підпростір $l_{fin}\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\leq m}R(\lambda_j)^{'}\Big]$ – фінітних послідовностей слабо щільний у просторі $l_{\infty}\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\leq m}R(\lambda_j)^{'}\Big]$. Тому підпростір вигляду

$$l^0_{fin}\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\leq m}R(\lambda_j)^{'}\Big] := l_{fin}\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\leq m}R(\lambda_j)^{'}\Big]\bigcap l^0_{\infty}\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\leq m}R(\lambda_j)^{'}\Big]$$

слабо щільний у $l^0_{\infty}\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\leq m}R(\lambda_j)^{'}\Big]$. Двоїстість

$$\Big\langle l_1\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\leq m}R(\lambda_j);\, L_p(\Omega)\Big],\, l^0_{\infty}\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\leq m}R(\lambda_j)^{'}\Big]\Big\rangle$$

реалізується білінійною формою $\langle x,\, y\rangle = \sum\limits_{m=1}^{\infty}\langle x_m,\, y_m\rangle$, де

$$x = \sum_{m=1}^{\infty}x_m \in l_1\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\leq m}R(\lambda_j);\, L_p(\Omega)\Big], y = (y_m)^{\infty}_{m=1}\in l^0_{\infty}\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\leq m}R(\lambda_j)^{'}\Big]$$

і білінійні форми $\langle x_m,\, y_m\rangle$ відповідають дуальним парам

$$\Big\langle \bigoplus_{|\lambda_j|\leq m}R(\lambda_j),\, \bigoplus_{|\lambda_j|\leq m}R(\lambda_j)^{'}\Big\rangle.$$

Підпростір $l^0_{fin}\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\leq m}R(\lambda_j)^{'}\Big]$ лежить в області визначення спряженого оператора $\widehat{f}(A)'$ до оператора $\widehat{f}(A)$ щодо двоїстості

$$\Big\langle l_1\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\leq m}R(\lambda_j);\, L_p(\Omega)\Big],\, l^0_{\infty}\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\leq m}R(\lambda_j)^{'}\Big]\Big\rangle.$$

Справді, кожна послідовність $y = (y_m)^{\infty}_{m=1}\in l^0_{fin}\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\leq m}R(\lambda_j)^{'}\Big]$ із $j$ ненульовими членами визначає функціонал вигляду

$$\bigoplus_{|\lambda_j|\leq m}R(\lambda_j)\ni x_m \to \langle\widehat{f}(A)x_m,\, y_m\rangle = \langle x_m,\, \widehat{f}(A)'y_m\rangle$$

стосовно двоїстості $\Big\langle \bigoplus_{|\lambda_j|\leq m}R(\lambda_j),\, \bigoplus_{|\lambda_j|\leq m}R(\lambda_j)'\Big\rangle$. Тому достатньо показати, що цей функціонал має неперервне розширення на простір абсолютно збіжних рядів $l_1\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\leq m}R(\lambda_j);\, L_p(\Omega)\Big]$.

Для довільного елемента $x = \sum\limits_{m=1}^{\infty} x_m \in l_1\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R(\lambda_j);\, L_p(\Omega)\Big]$ правильна нерівність

$$\Big|\sum_{m=1}^{j}\langle x_m, \widehat{f}(A)'y_m\rangle\Big| \le \Big(\sum_{m=1}^{\infty}\|x_m\|\Big)\sup_{1\le m\le j}\|\widehat{f}(A)'y_m\| = \Big(\sum_{m=1}^{\infty}\|x_m\|\Big)\|\widehat{f}(A)'y\|,$$

тому функціонал $\langle x, \widehat{f}(A)'y\rangle = \sum\limits_{m=1}^{j}\langle x_m,\, \widehat{f}(A)'y_m\rangle$ задовольняє нерівність

$$|\langle x, \widehat{f}(A)'y\rangle| \le \Big(\inf\sum_{m=1}^{\infty}\|x_m\|\Big)\,\|\widehat{f}(A)'y\| = \|x\|_{l_1}\,\|\widehat{f}(A)'y\|.$$

Функціонал $\langle x,\, \widehat{f}(A)'y\rangle$ слугує шуканим розширенням, яке визначає спряжений оператор $\widehat{f}(A)'$.

Відомо [9, гл. IV, п. 7], що замикання $\overline{\widehat{f}(A)}$ оператора $\widehat{f}(A)$ існує і збігається з його другим спряженим, якщо область визначення спряженого оператора слабо щільна у спряженому просторі. Отже, існування замикання оператора $\widehat{f}(A)$ доведено.

Область визначення замикання $\overline{\widehat{f}(A)}$, як другого спряженого до $\widehat{f}(A)$, має вигляд

$$\Big\{x = \sum_{m=1}^{\infty} x_m \in l_1\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R(\lambda_j); L_p(\Omega)\Big] \;\Big|\; \Big|\sum_{m=1}^{\infty}\langle \widehat{f}(A)x_m, y_m\rangle\Big| \le C\|y\|\Big\}$$

для всіх $y \in l_\infty^0\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R(\lambda_j)'\Big]$, де постійна $C$ визначається $x$ і не залежить від $y$. Позначимо $y_m = y\mid_{\bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R(\lambda_j)}$. Якщо ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\langle \widehat{f}(A)x_m,\, y_m\rangle$ збіжний для будь-якого $y \in l_\infty^0\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R(\lambda_j)'\Big]$, то він збіжний абсолютно, тобто збігаються ряди $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\big|\langle \widehat{f}(A)x_m, y_m\rangle\big|$ для всіх таких $y$. Справді, для цього достатньо прийняти $y'_m = e^{-i\theta(m)}y_m$, де $\theta(m)$– аргумент комплексного числа $\langle \widehat{f}(A)x_m,\, y_m\rangle$. Тоді $\|y'_m\| = \|y_m\|$ і $y' = (y'_m) \in l_\infty^0\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R(\lambda_j)'\Big]$. З іншого боку, $\Big|\sum\limits_{m=1}^{\infty}\langle \widehat{f}(A)x_m,\, y_m\rangle\Big| \le$ $\le \sum\limits_{m=1}^{\infty}\big|\langle \widehat{f}(A)x_m,\, y_m\rangle\big| < \infty$.

Використаємо довільність $y' = (y'_m) \in l_\infty^0\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R(\lambda_j)'\Big]$. Для кожного $m$ знайдеться вектор $y'_m$ такий, що $\|y'_m\| = 1$ і $\|\widehat{f}(A)x_m\| = \big|\langle \widehat{f}(A)x_m,\, y'_m\rangle\big|$. Тому для всіх $x$ з області визначення оператора $\overline{\widehat{f}(A)}$ збігаються ряди

$$\sum_{m=1}^{\infty}\|\widehat{f}(A)x_m\|.$$

Навпаки очевидно. Теорему доведено.

---

1. *Лозинська В.Я.* Функціональне числення в згорткових алгебрах узагальнених функцій експоненціального типу / *Лозинська В.Я., М'яус О.М.* // Науковий вісник Чернівецького університету. Математика. – Вип. 349. – 2007. – С. 79-82.
2. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы / *Хилле Э., Филлипс Р.* – М.: ИЛ, 1962.
3. *Лозинська В.Я.* Про узагальнені функції експоненціального типу / *Лозинська В.Я., М'яус О.М.* // Прикладні проблеми механіки і математики. – 2006.– Вип. 4. – С. 48-53.
4. *Радыно Я.В.* Векторы экспоненциального типа в операторном исчислении и дифференциальных уравнениях / *Радыно Я.В.* // Дифференц. уравнения. – 1985. – Т. 21, №9. – С. 1559-1569.
5. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / *Никольский С.М.* – М.: Наука, 1977.
6. *Любич Ю.И.* Об операторах с отделимым спектром / *Любич Ю.И., Мацаев В.И.* // Матем. сборник. – 1962. – Т. 56 (98), №4. – С. 433-468.
7. *Dmytryshyn M.I.* Operator calculus on the exponential type vectors of the operator with point spectrum / *Dmytryshyn M.I., Lopushansky O.V.* // In "General topology in Banach spaces" (ed. T.Banakh). – Huntington; New York: NOVA Science Publishers, Inc. – 2001. – P. 137-145.
8. *Робертсон А.* Топологические векторные пространства / *Робертсон А., Робертсон В.* – М.: Мир, 1967.
9. *Шефер Г.* Топологические векторные пространства / *Шефер Г.* – М.: Мир, 1971.

## FUNCTIONAL CALCULUS FOR THE REGULAR ELLIPTIC DIFFERENTIAL OPERATORS

**Vira LOZYNSKA[1], Olga MYAUS[2]**

[1]*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics*
*National Academy of Sciences of Ukraine,*
*79060, Lviv, Naukova Str., 3b*
[2]*Lviv Polytechnic National University,*
*79013, Lviv, S. Bandery Str., 12*

The some properties of the functional calculus for the regular elliptic differential operators on the Banach space $L_p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$, $\Omega$ – bounded set are constructed are described.

*Key words:* elliptic operator, root vector, functional calculus.

Стаття надійшла до редколегії 14.05.2007

Прийнята до друку 22.10.2008