ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2008. Вип.68. С.115-151 *Ser.Mech-Math. 2008. Vol.68. P.115-151*

УДК 517.95

ЛОКАЛЬНА ГЛАДКА РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ЗАДАЧІ З ВІЛЬНИМИ МЕЖАМИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНИХ ГІПЕРБОЛІЧНИХ СИСТЕМ КВАЗІЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Володимир КИРИЛИЧ[1], **Андрій ФІЛІМОНОВ**[2]

[1]*Львівський національний університет імені Івана Франка, 79000, Львів, вул. Університетська, 1*
[2]*Московський державний університет шляхів сполучення, 27994, Росія, Москва, вул. Образцова, 15*

За допомогою методу характеристик і принципу стискуючих відображень доведено класичну локальну розв'язність задачі з невідомими межами для сингулярних квазілінійних гіперболічних систем першого порядку.

Ключові слова: гіперболічні системи, квазілінійні рівняння, задача Стефана.

Для А.Філімонова робота підтримана РФФД, номер ґранту 06-01-00356а.

Запропонована праця є продовженням [1] і містить умови, за яких узагальнений неперервний розв'язок наведеної нижче задачі буде класичним.

У несингулярному випадку квазілінійних гіперболічних систем подібні задачі для знаходження класичних розв'язків досліджувались в [2-4].

1. Формулювання задачі, основні позначення та припущення. У прямокутнику $\Pi(T_0) = \{(x,t) |\ 0 \le x \le \ell,\ 0 \le t \le T_0\}$, де $\ell > 0$, $T_0 > 0$ – деякі константи, розглядаємо систему

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i(x,t,u,v)\frac{\partial u_i}{\partial x} = f_i(x,t,u,v), \quad i = 1,\dots,m, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v_j}{\partial x} = q_j(x,t,u,v), \quad j = 1,\dots,n, \tag{2}$$

$$\frac{d}{dt}s_j = r_j(t, s(t), u(s_j(t),t), v(s_j(t),t)), \quad j = 1,\dots,n, \tag{3}$$

де $u = (u_1,\dots,u_m),\ v = (v_1,\dots,v_n),\ s = (s_1,\dots,s_n)$, $s(t)$ – невідомі функції.

© Кирилич В., Філімонов А., 2008

Початкові та крайові умови мають вигляд

$$u(x,0) = \alpha(x), \quad 0 \le x \le \ell, \tag{4}$$

$$s_j(0) = c_j, \quad j = 1,\ldots,n, \quad 0 \le c_j \le \ell, \tag{5}$$

$$u_i(0,t) = \gamma_i^0(t, u(0,t)), \quad i \in I_+^0 = \{i|\ \mathrm{sgn}(\lambda_i(0,0,0,0)) = 1\}, \tag{6}$$

$$u_i(\ell,t) = \gamma_i^\ell(t, u(\ell,t)), \quad i \in I_-^\ell = \{i|\ \mathrm{sgn}(\lambda_i(\ell,0,0,0)) = -1\}, \tag{7}$$

$$v_j(s_j(t),t) = \beta_j(t), \quad j = 1,\ldots,n, \tag{8}$$

де функції $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$, $\beta = (\beta_1,\ldots,\beta_n)$, γ_i^0 $(i \in I_+^0)$, γ_i^ℓ $(i \in I_-^\ell)$ і константи c_j $(j = 1,\ldots,n)$ є заданими.

Позначивши $w = (u,v)$, розглянемо такі множини:

$$D(T_0,P_0) = \Pi(T_0) \times \{w|\ w \in \mathbb{R}^{m+n}, \|w\| \le P_0\},$$

$$D^1(T_0,P_0) = [0,T_0] \times \{w|\ w \in \mathbb{R}^{m+n}, \|w\| \le P_0\},$$

$$D^2(T_0,P_0) = [0,T_0] \times [0,\ell]^n \times \{w|\ w \in \mathbb{R}^{m+n}, \|w\| \le P_0\},$$

де $P_0 > 0$ – деяка стала.

Введемо позначення

$$|u| = \max_i |u_i|, \quad |v| = \max_j |v_j|, \quad |s| = \max_j |s_j|, \quad |w| = \max\{|u|,|v|\}.$$

Припускаємо, що виконуються такі умови.

A1. В області $D^1(T_0,P_0)$ для $i = 1,\ldots,m$

$$\mathrm{sgn}(\lambda_i(0,t,u,v)) = \mathrm{const}, \quad \mathrm{sgn}(\lambda_i(\ell,t,u,v)) = \mathrm{const}. \tag{9}$$

A2. Функції $\lambda_i(x,t,w), f_i(x,t,w)$ для $i = 1,\ldots,m$, $q_j(x,t,w)$ для $j = 1,\ldots,n$ визначені в області $D(T_0,P_0)$, а функції $r_j(x,t,w)$ для $j = 1,\ldots,n$ визначені в області $D^2(T_0,P_0)$. Всі ці функції обмежені за модулем деякими константами Λ, F, Q, R відповідно. Крім того, функції $q_j(x,t,w)$ для $j = 1,\ldots,n$ неперервні за t.

A3. Існують невід'ємні, сумовні на $[0,T_0]$ (і $[0,\ell]$ відповідно) функції $\Lambda_1(t)$, $\Lambda_2(t)$, $F_1(t)$, $F_2(t)$, $R_1(t)$, $R_2(t)$, $Q_2(x)$, причому $Q_2(x)$, крім того, сумовна з квадратом) такі, що майже для всіх $t \in [0,T_0]$ $(x \in [0,\ell])$ при $(x_1,t,w_1) \in D(T_0,P_0)$, $(x_2,t,w_2) \in \in D(T_0,P_0)$, $(x^1,t,w_1) \in D^2(T_0,P_0)$, $(x^2,t,w_2) \in D^2(T_0,P_0)$ (і при $(x,t,w_1) \in D(T_0,P_0)$, $(x,t,w_2) \in D(T_0,P_0)$ відповідно) для $i = 1,\ldots,m$ та $j = 1,\ldots,n$ виконуються нерівності

$$\begin{gathered}
|\lambda_i(x_1,t,w_1) - \lambda_i(x_2,t,w_2)| \le \Lambda_1(t)|x_1 - x_2| + \Lambda_2(t)|w_1 - w_2|,\\
|f_i(x_1,t,w_1) - f_i(x_2,t,w_2)| \le F_1(t)|x_1 - x_2| + F_2(t)|w_1 - w_2|,\\
|r_j(x^1,t,w_1) - r_j(x^2,t,w_2)| \le R_1(t)|x^1 - x^2| + R_2(t)|w_1 - w_2|,\\
|q_j(x,t,w_1) - q_j(x,t,w_2)| \le Q_2(x)|w_1 - w_2|.
\end{gathered} \tag{10}$$

A4. Функції $\lambda_i(x,t,w)$, $f_i(x,t,w)$, $r_j(x,t,w)$, $q_j(x,t,w)$ вимірні в області $D(T_0,P_0)$ для всіх $i = 1,\ldots,m$ та $j = 1,\ldots,n$ відповідно.

З умов A2, A3, A4 випливає, що в області $D(T_0, P_0)$ функції $\lambda_i(x,t,w)$, $f_i(x,t,w)$ для $i = 1,\dots,m$ (та функції $r_j(x,t,w)$, $q_j(x,t,w)$ при $j = 1,\dots,n$ відповідно) неперервні за сукупністю x, w (за t, w) для майже всіх $t \in [0, T_0]$ ($x \in [0, \ell]$) і сумовні за t (за x) на $[0, T_0]$ ($[0, \ell]$) при фіксованих x, w (та t, w відповідно). Звідси випливає таке: якщо $w : \Pi^{T_0} \to \mathbb{R}^{m+n}$ і $x : [0, T_0] \to [0, \ell]$ – неперервні функції, то функції $\lambda_i(x(t), t, w(x(t), t))$, $f_i(x(t), t, w(x(t), t))$, $i = 1,\dots,m$, та $r_j(x(t), t, w(x(t), t))$, $j = 1,\dots,n$, будуть сумовні на $[0, T_0]$.

A5. Виконуються умови погодження нульового порядку

$$\gamma_i^0(0, \alpha(0)) = \alpha_i(0), \quad i \in I_+^0, \qquad \gamma_i^\ell(0, \alpha(\ell)) = \alpha_i(\ell), \quad i \in I_-^\ell. \tag{11}$$

A6. Функції $(x,t,u,v) \to q_j(x,t,u,v)$, $j = 1,\dots,n$, не залежать від тих v_k, для яких $c_k \neq c_j$.

A7. Функції $r_j(t, 0, u, v) \geq 0$, якщо $c_j = 0$, і нехай $r_j(t, \ell, u, v) \leq 0$ при $c_j = \ell$.

A8. Нехай існує невід'ємна сумовна на $[0, \ell]$ функція $x \to M(x)$ така, що

$$|q_j(x,t,w)| \leq M(x)|v|, \quad j = 1,\dots,n.$$

Крім того, припускаємо, що квадрат $M(x)$ також є сумовною функцією.

A9. Функції $x \to \alpha_i(x)$, $i = 1,\dots,m$, ліпшицеві з константою A_1 та обмежені за модулем зверху константою A.

A10. Функції $(t,u) \to \gamma_i^0(t,u)$ ($i \in I_+^0$), $(t,u) \to \gamma_i^\ell(t,u)$ ($i \in I_-^\ell$), $t \to \beta_j(t)$ локально ліпшицеві за t, u з константами Γ_1, Γ_2 і B_1 відповідно.

A11. Нехай $\gamma_i^0(t,u)$, $i \in I_+^0$, не залежить від тих u_k, для яких $k \in I_+^0$, а $\gamma_i^\ell(t,u)$, $i \in I_-^\ell$, не залежить від тих u_k, для яких $k \in I_-^\ell$. Вважаємо, що $T \in (0, T_0]$.

A12. Існують такі сталі $\varepsilon_0 \in (0, \ell)$ і $\Lambda_0 > 0$, що всі значення $\lambda_i(x,t,w)$ ($i \in I_+^0$) при $0 \leq x \leq \varepsilon_0$ та $-\lambda_i(x,t,w)$ ($i \in I_-^\ell$) при $\ell - \varepsilon_0 \leq x \leq \ell$ не менші за величину Λ_0 при $(t,w) \in D^1(T_0, P_0)$.

Введемо позначення: $\delta = \min_j \min\{c_j, \ell - c_j |\ c_j \neq 0, c_j \neq \ell\}$.
Якщо $c_j \neq 0$ і $c_j \neq \ell$, то для таких j приймемо

$$D_j^0 = \{(x,t) \in \Pi(T) |\ 0 \leq x \leq c_j - RT; 0 \leq t \leq T\},$$

$$D_j^\ell = \{(x,t) \in \Pi(T) |\ c_j + RT \leq x \leq \ell; 0 \leq t \leq T\},$$

$$D_j^c = \Pi(T) \setminus (D_j^0 \cup D_j^\ell) = \{(x,t) \in \Pi(T) |\ c_j - RT \leq x \leq c_j + RT; 0 \leq t \leq T\}.$$

Якщо ж $c_j = 0$, то приймемо $D_j^0 = \emptyset$,

$$D_j^\ell = \{(x,t) \in \Pi(T) |\ c_j + RT \leq x \leq \ell; 0 \leq t \leq T\}, \quad D_j^c = \Pi(T) \setminus D_j^\ell.$$

Аналогічні позначення, коли $c_j = \ell$. Також позначимо

$$\|v\| = \max_j \max\{\max_{D_j^0}(|v_j(x,t)| \exp(-H(c_j - RT - x))), \quad \max_{D_j^c} |v_j(x,t)|,$$

$$\max_{D_j^\ell}(|v_j(x,t)| \exp(-H(x - c_j - RT)))\},$$

$\|u\| = \max_{\Pi(T)} |u|$, $\|w\| = \max\{\|u\|, \|v\|\}$, $\|s\| = \max_{\Pi(T)} |s|$, де константа $H > 0$ буде означена пізніше.

Розглянемо простір $\mathbb{E}$ неперервних функцій $w : \Pi(T) \to \mathbb{R}^{m+n}$, причому функції $(x,t) \to u(x,t)$ будемо вважати ліпшицевими за x, t, а функції $(x,t) \to v(x,t)$ – ліпшицевими за x. Нехай $\mathbb{E}_0(T)$ – куля $\|w\| \le P_0 = \max\{U, V\}$ в цьому просторі.

Через $\mathbb{E}_1(T, L)$ позначимо множину функцій $(u, v) \in \mathbb{E}_0(T)$ таких, що константи Ліпшиця для функції $(x,t) \to u(x,t)$ (за x, t) і для функції $(x,t) \to v(x,t)$ (за x) обмежені зверху величиною $L > 0$. Розв'язок задачі

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_i(x, t, w(x,t)), \quad i = 1, \ldots, m, \qquad x(\breve{t}) = \breve{x}, \quad w \in \mathbb{E}_0(T), \tag{12}$$

(де рівність розуміємо в значенні рівності майже всюди) будемо називати характеристикою i-ї сім'ї, що відповідає функції w, і позначати через $\varphi_i(t; \breve{x}, \breve{t}, w)$. Розв'язок задачі

$$\frac{ds_j}{dt} = r_j(t, s(t), w(s_j(t), t)), \quad j = 1, \ldots, n, \qquad s_j(0) = c_j, \quad w \in \mathbb{E}_0(T), \tag{13}$$

(де рівність розуміємо в значенні рівності майже всюди) будемо позначати через $s_j(t; w)$ і називати j-ю (внутрішньою) границею.

Через $\chi_i(\breve{x}, \breve{t}, w)$ позначимо найменше значення аргумента t, для якого визначений розв'язок $\varphi_i(t; \breve{x}, \breve{t}, w)$.

Для $i = 1, \ldots, m$ введемо множини: $\Pi_i^\alpha(w) = \{(x,t) \in \Pi(T) |\ \chi_i(x,t,w) = 0\}$,
$\Pi_i^0(w) = \{(x,t) \in \Pi(T) |\ \chi_i(x,t,w) > 0,\ \varphi_i(\chi_i(x,t,w); x, t, w) = 0\}$,
$\Pi_i^\ell(w) = \{(x,t) \in \Pi(T) |\ \chi_i(x,t,w) > 0,\ \varphi_i(\chi_i(x,t,w); x, t, w) = \ell\}$.
Позначимо

$$\mathfrak{R}_i[w](x,t) = \left\{ \begin{array}{rll} \alpha_i(\varphi_i(0; x, t, w)), & i = \overline{1,m}, & (x,t) \in \Pi_i^\alpha(w); \\ \gamma_i^0(\chi_i(x,t,w), u(0, \chi_i(x,t,w))), & i \in I_+^0, & (x,t) \in \Pi_i^0(w); \\ \gamma_i^\ell(\chi_i(x,t,w), u(\ell, \chi_i(x,t,w))), & i \in I_-^\ell, & (x,t) \in \Pi_i^\ell(w); \end{array} \right. \tag{14}$$

$$\mathfrak{I}_i[w](x,t) = \int\limits_{\chi_i(x,t,w)}^{t} f_i(\varphi_i(\tau; x, t, w), \tau, w(\varphi_i(\tau; x, t, w), \tau)) d\tau; \tag{15}$$

$$\mathfrak{A}_i[w](x,t) = \mathfrak{R}_i[w](x,t) + \mathfrak{I}_i[w](x,t), \quad i = 1, \ldots, m; \tag{16}$$

$$\mathfrak{B}_j[w](x,t) = \beta_j(t) + \int\limits_{s_j(t;w)}^{x} q_j(\xi, t, w(\xi, t)) d\xi, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{17}$$

Очевидно, що неперервна функція $w = (u, v) : \Pi(T) \to \mathbb{R}^{m+n}$ задовольняє систему

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u_i(x,t) & = & \mathfrak{A}_i[w](x,t), \quad i = 1, \ldots, m, \\ v_j(x,t) & = & \mathfrak{B}_j[w](x,t), \quad j = 1, \ldots, n. \end{array} \right. \tag{18}$$

Наведені вище умови A1-A12 забезпечують існування та єдиність узагальненого неперервного розв'язку задачі (1)-(8) [1].

Звідси, зокрема, випливає, що на підставі умов А2-А4 та за умови, що $w \in \mathbb{E}_0(T)$, неперервний розв'язок задачі (13) існує, єдиний та може бути продовжений до границі $\Pi(T)$. Розглянемо тепер умови, за яких неперервний узагальнений розв'язок задачі (1)-(8) буде класичним.

Вважатимемо, що додатково виконуються ще такі умови.

А13. Функції $\lambda_i(x,t,w), f_i(x,t,w), \alpha_i(x),\ i = 1,\dots,m,\ \gamma_i^0(t,u)\ (i \in J_0),\ \gamma_i^\ell(t,u)$ $(i \in J_\ell)$, $q_j(x,t,w), r_j(x,t,w), \beta_j(t)\quad (j = 1,\dots,n)$ неперервно диференційовні в тих областях, де вони були визначені, і, крім того, λ_i та f_i задовольняють умову Ліпшиця за t з деякими константами Λ_3, F_3 відповідно, а q_j задовольняє умову Ліпшиця за t з константою Q_3 і за x з константою Q_1, а також $Q_2\ell < 1$. Нехай, нарешті, функції $f_i(x,t,w)$, $\lambda_i(x,t,w)$ $(i = 1,\dots,m)$, $r_j(x,t,w)$ $(j = 1,\dots,n)$ задовольняють таку саму умову, що і функції $q_j(x,t,w)$ $(j = 1,\dots,n)$ у припущенні А6, і, крім того, функції $q_j(x,t,w)$ $(j = 1,\dots,n)$ не залежать від тих u_k, для яких $c_k \neq c_j$.

А14. Частинні похідні $(f_i)'_x, (f_i)'_t, (f_i)'_{v_j}, (f_i)'_{u_i}$ $(i = 1,\dots,m; j = 1,\dots,n)$ задовольняють умову Ліпшиця в області $\Pi(T) \cup \mathbb{E}_0(T)$ за змінними x,t,w відповідно з константами F_1^1, F_3^1, F_2^1, крім того, всі ці похідні обмежені зверху за модулем константою F^1.

Позначимо: $\breve{F}_1 = \max\{F_1, F_2, F_3, F_1^1, F_2^1, F_3^1\}$, $\breve{F} = \max\{F, F^1\}$.

А15. Частинні похідні $(\lambda_i)'_x, (\lambda_i)'_t, (\lambda_i)'_{v_j}, (\lambda_i)'_{u_i} (i = 1,\dots,m; j = 1,\dots,n)$ задовольняють умову Ліпшиця в області $\Pi(T) \cup \mathbb{E}_0(T)$ за змінними x,t,w відповідно з константами $\Lambda_1^1, \Lambda_3^1, \Lambda_2^1$, крім того, всі ці похідні обмежені зверху за модулем константою Λ^1.

Позначимо: $\breve{\Lambda}_1 = \max\{\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_1^1, \Lambda_2^1, \Lambda_3^1\}$, $\breve{\Lambda} = \max\{\Lambda, \Lambda^1\}$.

А16. Частинні похідні $(q_j)'_x, (q_j)'_t, (q_j)'_{v_i}, (q_j)'_{u_i} (i = 1,\dots,m; j = 1,\dots,n)$ задовольняють умову Ліпшиця в області $\Pi(T) \cup \mathbb{E}_0(T)$ за змінними t,w відповідно з константами Q_1^1, Q_2^1, крім того, всі ці похідні обмежені зверху за модулем константою Q^1.

Позначимо: $\breve{Q}_1 = \max\{Q_1, Q_2, Q_3, Q_1^1, Q_2^1\}$, $\breve{Q} = \max\{Q, Q^1\}$.

А17. Похідні $\alpha'_i(x)$ $(i = 1,\dots,m)$ є ліпшицевими з константою A_1^1 при $0 \le x \le \ell$.

Позначимо: $A^1 = \max\limits_{[0,\ell]} |\alpha'(x)|$, $\breve{A}_1 = \max\{A_1, A_1^1\}$; $\breve{A} = \max\{A, A^1\}$.

А18. Похідні $\beta'_j(x)$ $(j = 1,\dots,n)$ є ліпшицевими з константою B_1^1 при $0 \le t \le T$.

Позначимо: $B^1 = \max\limits_{[0,T]} |\beta'(x)|$, $\breve{B}_1 = \max\{B_1, B_1^1\}$; $\breve{B} = \max\{B, B^1\}$.

А19. Частинні похідні $(\gamma_i^0)'_t$, $(\gamma_i^0)'_{u_j}$ $(i \in I_+^0, j \bar{\in} I_+^0)$, $(\gamma_i^\ell)'_t$, $(\gamma_i^\ell)'_{u_j}$ $(i \in I_-^\ell, j \bar{\in} I_-^\ell)$ задовольняють умову Ліпшиця в області $[0,T] \cup \mathbb{E}_0(T)$ за аргументами t і u відповідно з константами Γ_1^1 та Γ_2^1.

Позначимо: $\breve{\Gamma} = \max\limits_{[0,T]\cup\mathbb{E}_0(T)} \{|(\gamma_i^0)'_t|, |(\gamma_i^0)'_{u_j}|, |(\gamma_i^\ell)'_t|, |(\gamma_i^\ell)'_{u_j}|\}$, $\breve{R}_1 = \max\{R_1, R_2\}$.

А20. Виконуються умови погодження першого порядку:

$$(\gamma_i^0)'_t(0,\alpha(0)) + \sum_{j \bar{\in} I_+^0} (\gamma_i^0)'_{u_j}(0,\alpha(0))\,[f_j(0,0,\alpha(0),v(0,0)) - \lambda_j(0,0,\alpha(0),v(0,0))\alpha'_j(0)] =$$
$$= f_i(0,0,\alpha(0),v(0,0)) - \lambda_i(0,0,\alpha(0),v(0,0))\alpha'_i(0), \quad i \in I_+^0; \quad (19)$$

$$(\gamma_i^\ell)'_t(0,\alpha(\ell)) + \sum_{j \bar{\in} I_-^\ell} (\gamma_i^\ell)'_{u_j}(0,\alpha(\ell))\,[f_j(\ell,0,\alpha(\ell),v(\ell,0)) - \lambda_j(\ell,0,\alpha(\ell),v(\ell,0))\alpha'_j(\ell)] =$$
$$= f_i(\ell,0,\alpha(\ell),v(\ell,0)) - \lambda_i(\ell,0,\alpha(\ell),v(\ell,0))\alpha'_i(\ell), \quad i \in I_-^\ell. \quad (20)$$

Тут значення функції $v(x,t)$ в точках $(0,0)$, $(\ell,0)$ знаходимо з розв'язку системи

$$v_j(x,0) = \beta_j(0) + \int\limits_{c_j}^{x} q_j(\xi, 0, \alpha(\xi), v(\xi,0))d\xi, \quad j = 1,\dots,n.$$

A21. Нехай існує невід'ємна неперервна функція $x \to M^1(x)$ така, що

$$|(q_j)'_t(x,t,w)| \le M^1(x)|v|, \quad j = 1,\dots,n;$$

$$|(q_j)'_{u_i}(x,t,w)| \le M^1(x)|v|, \quad j = 1,\dots,n, \quad i = 1,\dots,m.$$

Крім того, припускаємо, що функція $M(x)$ з умови A8 неперервна.

Розглянемо простір $\breve{\mathbb{E}}_0(T)$ вектор-функцій $\breve{w} = (u, u^1, v, v^{(2)}) : \Pi(T) \to \mathbb{R}^{2m+2n}$, де $u = (u_1,\dots,u_m)$, $u^1 = (u_1^1,\dots,u_m^1)$, $v = (v_1,\dots,v_n)$, $v^{(2)} = (v_1^{(2)},\dots,v_n^{(2)})$, причому кожна компонента вектор-функцій u, u^1 та v є ліпшицевою за двома змінними, а кожна компонента вектор-функції $v^{(2)}$ є ліпшицевою за x, причому $(u,v) \in \mathbb{E}_0(T)$ і, крім того, v ліпшицева за t. Нехай виконуються умови:

$\|w^1\| = \max\{\|u^1\|, \|v^{(2)}\|\} \le P_0^1$, $v^{(2)}(x,t) = \frac{\partial v(x,t)}{\partial t}$, $\|\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\| \le Q$,

де P_0^1 – деяка стала, причому будемо вважати, що $Q \le P_0^1$, $\|u^1\| = \max|u_i^1|$,

$$\|v^{(2)}\| = \max_j \max\{\max_{D_j^0} |v_j^{(2)}(x,t)|e^{-H(c_j - RT - x)}, \quad \max_{D_j^c} |v_j^{(2)}(x,t)|,$$

$$\max_{D_j^\ell} |v_j^{(2)}(x,t)|e^{-H(x - c_j - RT)}\}.$$

Позначимо $\breve{P}_0 = \max\{P_0, P_0^1\}$, $\|\breve{w}\| = \max\{\|w\|, \|w^1\|\}$.

В просторі $\breve{\mathbb{E}}_0(T)$ введемо метрику $\breve{\rho}$ за формулою:

$$\breve{\rho}(\breve{w}_1, \breve{w}_2) = \max\{\rho(w_1,w_2), \quad \rho^1(w_1^1, w_2^1)\},$$

де $\rho(w_1,w_2) = \max\{\max\limits_{\Pi(T)} \|u_1(x,t) - u_2(x,t)\|, \quad \max\limits_{\Pi(T)} \|v_1(x,t) - v_2(x,t)\|\}$,

$\rho^1(w_1^1, w_2^1) = \max\{\max\limits_{\Pi(T)} \|u_1^1(x,t) - u_2^1(x,t)\|, \quad \max\limits_{\Pi(T)} \|v_1^{(2)}(x,t) - v_2^{(2)}(x,t)\|\}$.

Нехай $L_1^1(u^1)$, $L_2^1(u^1)$ константи Ліпшиця за x і t відповідно для функції $u^1(x,t)$, а $L_1^1(v^{(2)})$ константа Ліпшиця за x для функції $v^{(2)}(x,t)$. Позначимо $\breve{L} = \max\{L, \max\{L_1^1(u^1), L_2^1(u^1), L_1^1(v^1)\} = L^1\}$, де замість L візьмемо таку саму константу Ліпшиця для функцій u, v, що й вище, з урахуванням ліпшицевості функції v за t.

Позначимо через $\breve{\mathbb{E}}_1(T, \breve{L})$ множину функцій $\breve{w} \in \breve{\mathbb{E}}_0(T)$, для яких константами Ліпшиця за x і t відповідно слугують L для u, v; L^1 для $u^1, v^{(2)}$ (для функції $v^{(2)}$ ліпшицевість тільки за x).

Введемо такі позначення для $(i = 1,\dots,m, \ j = 1,\dots,n)$:

$$v_j^1(x,t) = q_j(x,t,w); \quad \|v^1\| \le Q;$$

$$u_i^{(2)}(x,t) = f_i(x,t,u(x,t),v(x,t)) - \lambda_i(x,t,u(x,t),v(x,t))u_i^1(x,t); \tag{21}$$

$$\varphi_i^1(\tau;x,t,\breve{w}) = \exp\int\limits_t^\tau [(\lambda_i)'_x(\varphi_i(\theta;x,t,w),\theta,w(\varphi_i(\theta;x,t,w),\theta))+$$

$$+\sum_{k=1}^m(\lambda_i)'_{u_k}(\varphi_i(\theta;x,t,w),\theta,w(\varphi_i(\theta;x,t,w),\theta))u_k^1(\varphi_i(\theta;x,t,w),\theta)+$$

$$+\sum_{r=1}^n(\lambda_i)'_{v_k}(\varphi_i(\theta;x,t,w),\theta,w(\varphi_i(\theta;x,t,w),\theta))v_r^1(\varphi_i(\theta;x,t,w),\theta)]d\theta; \qquad (22)$$

$$\chi_i^1(x,t,\breve{w}) = \begin{cases} -\frac{\varphi_i^1(\chi_i(x,t,w);x,t,\breve{w})}{\lambda_i(0,\chi_i(x,t,w),w(0,\chi_i(x,t,w)))}, & (x,t)\in\Pi_i^0(w), \\ -\frac{\varphi_i^1(\chi_i(x,t,w);x,t,\breve{w})}{\lambda_i(\ell,\chi_i(x,t,w),w(\ell,\chi_i(x,t,w)))}, & (x,t)\in\Pi_i^\ell(w). \end{cases} \qquad (23)$$

Зауваження 1. Якщо розв'язок задачі (1)-(8) є гладким, то: $u^1 = u_x$, $u^{(2)} = u_t$, $\varphi_i^1(\tau;x,t,\breve{w}) = \frac{\partial}{\partial x}\varphi_i(\tau;x,t,w)$, $\chi_i^1(x,t,\breve{w}) = \frac{\partial}{\partial x}\chi_i(x,t,w)$, $v^1 = v_x$, $v^{(2)} = v_t$.

Тепер розглянемо систему, яку отримують з (16)-(17) формальним диференціюванням перших m рівнянь системи (16) за x, а інших n рівнянь системи (17) за t, замінюючи u_x на u^1, v_x на v^1 та всіма іншими відповідними замінами на основі зауваження 1. До одержаної системи приєднуємо систему (16)-(17). Тоді з урахуванням (18) матимемо

$$u_i(x,t) = \mathfrak{R}_i[w](x,t) + \mathfrak{I}_i[w](x,t), \quad i=1,\ldots,m, \qquad (24)$$

$$u_i^1(x,t) = \mathfrak{R}_i^1[\breve{w}](x,t) + \mathfrak{I}_i^1[\breve{w}](x,t) + \mathfrak{Y}_i^1[\breve{w}](x,t), \quad i=1,\ldots,m, \qquad (25)$$

$$v_j(x,t) = \beta_j(t) + \int\limits_{s_j(t;w)}^x q_j(\xi,t,w(\xi,t))d\xi, \quad j=1,\ldots,n, \qquad (26)$$

$$v_j^{(2)}(x,t) = \beta'_j(t) + \mathfrak{I}_{1j}^1[\breve{w}](x,t) + \mathfrak{Y}_{1j}^1[w](t), \quad j=1,\ldots,n, \qquad (27)$$

де введено позначення:

$$\mathfrak{R}_i^1[\breve{w}](x,t) = \begin{cases} [(\gamma_i^0)'_t(\chi_i(x,t,w),u(0,\chi_i(x,t,w))) + \sum\limits_{j\in I_+^0}(\gamma_i^0)'_{u_j}(\chi_i(x,t,w), \\ u(0,\chi_i(x,t,w)))u_j^{(2)}(0,\chi_i(x,t,w))]\chi_i^1(x,t,\breve{w}), \ (x,t)\in\Pi_i^0(w); \\ \alpha'_i(\varphi_i(0;x,t,w))\varphi_i^1(0;x,t,\breve{w}), \ (x,t)\in\Pi_i^\alpha(w); \\ [(\gamma_i^\ell)'_t(\chi_i(x,t,w),u(\ell,\chi_i(x,t,w))) + \sum\limits_{j\in I_-^\ell}(\gamma_i^\ell)'_{u_j}(\chi_i(x,t,w), \\ u(\ell,\chi_i(x,t,w)))u_j^{(2)}(\ell,\chi_i(x,t,w))]\chi_i^1(x,t,\breve{w}), \ (x,t)\in\Pi_i^\ell(w); \end{cases} \qquad (28)$$

$$\mathfrak{Y}_i^1[\breve{w}](x,t) = \begin{cases} -f_i(0,\chi_i(x,t,w),w(0,\chi_i(x,t,w)))\chi_i^1(x,t,\breve{w}), & (x,t)\in\Pi_i^0(w); \\ 0, & (x,t)\in\Pi_i^\alpha(w); \\ -f_i(\ell,\chi_i(x,t,w),w(\ell,\chi_i(x,t,w)))\chi_i^1(x,t,\breve{w}), & (x,t)\in\Pi_i^\ell(w). \end{cases} \qquad (29)$$

$$\mathfrak{I}_i^1[\breve{w}](x,t) = \int\limits_{\chi_i(x,t,w)}^t [(f_i)'_x(\varphi_i(\tau;x,t,w),\tau,w(\varphi_i(\tau;x,t,w),\tau))+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}(f_i)'_{u_j}(\varphi_i(\tau;x,t,w),\tau,w(\varphi_i(\tau;x,t,w),\tau))u_j^1(\varphi_i(\tau;x,t,w),\tau)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}(f_i)'_{v_k}(\varphi_i(\tau;x,t,w),\tau,w(\varphi_i(\tau;x,t,w),\tau))\,v_k^1(\varphi_i(\tau;x,t,w),\tau)]\varphi_i^1(\tau;x,t,\breve{w})d\tau, \quad (30)$$

$$\mathfrak{I}_{1j}^1[\breve{w}](x,t)=\int\limits_{s_j(t;w)}^{x}[(q_j)'_t(\xi,t,w(\xi,t))+\sum_{i:c_i=c_j}(q_j)'_{u_i}(\xi,t,w(\xi,t))u_i^{(2)}(\xi,t)+$$
$$+\sum_{k:c_k=c_j}(q_j)'_{v_k}(\xi,t,w(\xi,t))v_k^{(2)}(\xi,t)]d\xi, \quad (31)$$

$$\mathfrak{Y}_{1j}^1[w](t)=r_j(t,s(t),w(s_j(t),t))q_j(s_j(t;w),t,w(s_j(t;w),t)). \quad (32)$$

Розглянемо оператор $\breve{\mathfrak{S}}=(\mathfrak{S},\mathfrak{S}^1)$, визначений на $\breve{\mathbb{E}}_0(T)$, значення якого $\breve{\mathfrak{S}}[\breve{w}]=(\mathfrak{S}[w],\mathfrak{S}^1[\breve{w}])$ на функціях $\breve{w}=(w,w^1)$ обчислюють за правилом

$$\mathfrak{S}=(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_2,\dots,\mathfrak{A}_m;\mathfrak{B}_1,\mathfrak{B}_2,\dots,\mathfrak{B}_n);$$

$$\mathfrak{S}^1=(\mathfrak{A}_1^1,\mathfrak{A}_2^1,\dots,\mathfrak{A}_m^1;\mathfrak{B}_1^1,\mathfrak{B}_2^1,\dots,\mathfrak{B}_n^1);$$

$$\mathfrak{A}_i[w](x,t)=\mathfrak{R}_i[w](x,t)+\mathfrak{I}_i[w](x,t);\quad i=1,\dots,m; \quad (33)$$

$$\mathfrak{B}_j[w](x,t)=\beta_j(t)+\int\limits_{s_j(t;w)}^{x}q_j(\xi,t,w(\xi,t))d\xi;\quad j=1,\dots,n; \quad (34)$$

$$\mathfrak{A}_i^1[\breve{w}](x,t)=\mathfrak{R}_i^1[\breve{w}](x,t)+\mathfrak{I}_i^1[\breve{w}](x,t)+\mathfrak{Y}_i^1[\breve{w}](x,t);\quad i=1,\dots,m; \quad (35)$$

$$\mathfrak{B}_j^1[\breve{w}](x,t)=\beta_j'(t)+\mathfrak{I}_{1j}^1[\breve{w}](x,t)+\mathfrak{Y}_{1j}^1[w](t);\quad j=1,\dots,n. \quad (36)$$

Позначимо також $\breve{\mathfrak{A}}=(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_2,\dots,\mathfrak{A}_m;\mathfrak{A}_1^1,\mathfrak{A}_2^1,\dots,\mathfrak{A}_m^1)$;
$\breve{\mathfrak{B}}=(\mathfrak{B}_1,\mathfrak{B}_2,\dots,\mathfrak{B}_n;\mathfrak{B}_1^1,\mathfrak{B}_2^1,\dots,\mathfrak{B}_n^1)$.

2. Локальна класична розв'язність задачі.

Теорема. Для досить малого $T>0$, при виконанні наведених вище припущень та умов A1-A21, існує єдиний класичний розв'язок задачі (1)-(8).

Доведення теореми розіб'ємо на допоміжні леми.

Лема 1. *Функція* $\breve{\mathfrak{S}}[\breve{w}](x,t)$ *неперервна в* $\Pi(T)$.

Доведення. Неперервність функції $\mathfrak{S}[w](x,t)$ і $\mathfrak{A}_i^1[\breve{w}](x,t)$ в кожній із областей $\bar{\Pi}_i^{\alpha}(w)$, $\bar{\Pi}_i^{0}(w)$, $\bar{\Pi}_i^{\ell}(w)$ випливає з їхнього визначення. Тому перевіримо, наприклад, неперервність функцій $\mathfrak{A}_i^1[\breve{w}](x,t)$ на лініях $\varphi_i(\tau;0,0,w)$ та $\varphi_i(\tau;\ell,0,w)$. Розглянемо неперервність $\mathfrak{A}_i^1[\breve{w}](x,t)$ на лінії $\varphi_i(\tau;0,0,w)$ (неперервність функції $\mathfrak{A}_i^1[\breve{w}](x,t)$ на лінії $\varphi_i(\tau;\ell,0,w)$ розглядається аналогічно). На цій лінії $\chi_i(x,t,w)=0$, тому з (23) матимемо

$$\chi_i^1(x,t,\breve{w})=-\frac{\varphi_i^1(0;x,t,\breve{w})}{\lambda_i(0,0,w(0,0))}. \quad (37)$$

Знайдемо тепер різницю $[\mathfrak{S}_i^1[\breve{w}](x,t)]_{\text{лів}} - [\mathfrak{S}_i^1[\breve{w}](x,t)]_{\text{пр}}$. Оскільки $\chi_i(x,t,w)=0$, то з (30) отримуємо, що

$$[\mathfrak{I}_i^1[\breve{w}](x,t)]_{\text{лів}} - [\mathfrak{I}_i^1[\breve{w}](x,t)]_{\text{пр}} = 0. \tag{38}$$

З (29), (37) випливає рівність

$$[\mathfrak{Y}_i^1[\breve{w}](x,t)]_{\text{лів}} - [\mathfrak{Y}_i^1[\breve{w}](x,t)]_{\text{пр}} = f_i(0,0,w(0,0))\frac{\varphi_i^1(0;x,t,\breve{w})}{\lambda_i(0,0,\alpha(0))}. \tag{39}$$

Далі, з (28), (21), (37) та з урахуванням умов погодження першого порядку (19), одержимо

$$[\mathfrak{R}_i^1[\breve{w}](x,t)]_{\text{лів}} - [\mathfrak{R}_i^1[\breve{w}](x,t)]_{\text{пр}} = [(\gamma_i^0)'_t(0,\alpha(0)) + \sum_{j\bar{\in} I_+^0}(\gamma_i^0)'_{u_j}(0,\alpha(0))\times$$

$$\times(f_j(0,0,\alpha(0),v(0,0)) - \lambda_j(0,0,\alpha(0),v(0,0))\alpha_j'(0))](-\frac{\varphi_i^1(0;x,t,\breve{w})}{\lambda_i(0,0,\alpha(0))})-$$

$$-\alpha_i'(0)\varphi_i^1(0;x,t,\breve{w}) = -\frac{\varphi_i^1(0;x,t,\breve{w})}{\lambda_i(0,0,\alpha(0))}[f_i(0,0,\alpha(0),v(0,0)) - \lambda_i(0,0,\alpha(0),v(0,0))\alpha_i'(0)]-$$

$$-\alpha_i'(0)\varphi_i^1(0;x,t,\breve{w}) = -\frac{\varphi_i^1(0;x,t,\breve{w})}{\lambda_i(0,0,\alpha(0))}f_i(0,0,\alpha(0),v(0,0)). \tag{40}$$

Отже, з (35), (38), (39) і (40) отримуємо, що на лінії $\varphi_i(\tau;0,0,w)$ виконується

$$[\mathfrak{A}_i^1[\breve{w}](x,t)]_{\text{лів}} - [\mathfrak{A}_i^1[\breve{w}](x,t)]_{\text{пр}} = 0.$$

Неперервність функції $\mathfrak{B}_j^1[\breve{w}](x,t)$ випливає з її визначення.

Отож, матимемо

$$[\mathfrak{S}_i^1[\breve{w}](x,t)]_{\text{лів}} - [\mathfrak{S}_i^1[\breve{w}](x,t)]_{\text{пр}} = 0. \tag{41}$$

Зауваження 2. Через $N_i, N^i \quad (i=1,\dots)$ надалі позначатимемо сталі, залежні тільки від вихідних даних задачі, тобто від констант $\breve{\Lambda}$, Λ_0, $\breve{\Lambda}_1$, $\breve{F}$, $\breve{F}_1$, $\breve{\Gamma}$, $\breve{\Gamma}_1$, $\breve{A}$, $\breve{A}_1$, T_0, $\breve{P}$, m, n, $\breve{B}$, $\breve{B}_1$, $\breve{R}$, $\breve{R}_1$, $\breve{Q}$, $\breve{Q}_1$, і не залежні від T, $\breve{L}$.

Лема 2. *Для* $\tau \in [\max\{\chi_i(x_1,t,w),\chi_i(x_2,t,w)\},t]$ *правильна оцінка*

$$|\varphi_i^1(\tau;x_1,t,\breve{w}) - \varphi_i^1(\tau;x_2,t,\breve{w})| \le N_2(1+\breve{L})T|x_1-x_2|. \tag{42}$$

Доведення. З (22) випливає, що

$$|\varphi_i^1(\tau;x_1,t,\breve{w}) - \varphi_i^1(\tau;x_2,t,\breve{w})| = |\exp(\int_\tau^t[(\lambda_i)'_x(\varphi_i(\theta;x_1,t,w),\theta,$$

$$w(\varphi_i(\theta;x_1,t,w),\theta)) + \sum_{k=1}^m(\lambda_i)'_{u_k}(\varphi_i(\theta;x_1,t,w),\theta,w(\varphi_i(\theta;x_1,t,w),\theta))\times$$

$$\times u_k^1(\varphi_i(\theta;x_1,t,w),\theta)+\sum_{r=1}^{n}(\lambda_i)'_{v_r}(\varphi_i(\theta;x_1,t,w),\theta,w(\varphi_i(\theta;x_1,t,w),\theta))\times$$

$$\times v_r^1(\varphi_i(\theta;x_1,t,w),\theta)]d\theta)-\exp(\int_{\tau}^{t}[(\lambda_i)'_x(\varphi_i(\theta;x_2,t,w),\theta,$$

$$w(\varphi_i(\theta;x_2,t,w),\theta))+\sum_{k=1}^{m}(\lambda_i)'_{u_k}(\varphi_i(\theta;x_2,t,w),\theta,w(\varphi_i(\theta;x_2,t,w),\theta))\times$$

$$\times u_k^1(\varphi_i(\theta;x_2,t,w),\theta)+\sum_{r=1}^{n}(\lambda_i)'_{v_r}(\varphi_i(\theta;x_2,t,w),\theta,w(\varphi_i(\theta;x_2,t,w),\theta))\times$$

$$\times v_r^1(\varphi_i(\theta;x_2,t,w),\theta)]d\theta)|\le N_1\int_{\tau}^{t}\{(\Lambda_1^1+\Lambda_2^1L)|\varphi_i(\theta;x_1,t,w)-\varphi_i(\theta;x_2,t,w)|+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}|(\lambda_i)'_{u_k}(\varphi_i(\theta;x_1,t,w),\theta,w(\varphi_i(\theta;x_1,t,w),\theta))u_k^1(\varphi_i(\theta;x_1,t,w),\theta)-$$

$$-(\lambda_i)'_{u_k}(\varphi_i(\theta;x_1,t,w),\theta,w(\varphi_i(\theta;x_1,t,w),\theta))u_k^1(\varphi_i(\theta;x_2,t,w),\theta)|+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}|(\lambda_i)'_{u_k}(\varphi_i(\theta;x_1,t,w),\theta,w(\varphi_i(\theta;x_1,t,w),\theta))u_k^1(\varphi_i(\theta;x_2,t,w),\theta)-$$

$$-(\lambda_i)'_{u_k}(\varphi_i(\theta;x_2,t,w),\theta,w(\varphi_i(\theta;x_2,t,w),\theta))u_k^1(\varphi_i(\theta;x_2,t,w),\theta)|+$$

$$+\sum_{r=1}^{n}[\Lambda^1|v_r^1(\varphi_i(\theta;x_1,t,w),\theta)-v_r^1(\varphi_i(\theta;x_2,t,w),\theta)|+Q(\Lambda_1^1+\Lambda_2^1L)\times$$

$$\times|\varphi_i(\theta;x_1,t,w)-\varphi_i(\theta;x_2,t,w)|]\}d\theta\le N_1\int_{\tau}^{t}\{\Lambda_1^1+\Lambda_2^1L+m\Lambda^1L^1+mP_0^1(\Lambda_1^1+$$

$$+\Lambda_2^1L)+n\Lambda^1(Q_1+Q_2L)+nQ(\Lambda_1^1+\Lambda_2^1L)\}|\varphi_i(\theta;x_1,t,w)-\varphi_i(\theta;x_2,t,w)|d\theta,$$

де $N_1=\exp(T_0\Lambda^1(1+P_0^1m+nQ))$. Крім того, тут і надалі будемо використовувати формулу $|e^a-e^b|\le e^c|a-b|$, $a\le c\le b$.

Отже, одержуємо

$$|\varphi_i^1(\tau;x_1,t,\breve{w})-\varphi_i^1(\tau;x_2,t,\breve{w})|\le N_1M_1(\Lambda^1L^1m+\Lambda^1n(Q_1+Q_2L)+$$

$$+(\Lambda_1^1+\Lambda_2^1L)(1+P_0^1m+Qn))T|x_1-x_2|\le N_2(1+\breve{L})T|x_1-x_2|, \tag{43}$$

де $N_2=N_1M_1[\breve{\Lambda}_1(1+P_0^1m+Qn)+\Lambda^1m+\Lambda^1n\breve{Q}_1]$.

Лема 3. *Нехай* $\breve{w}_1,\breve{w}_2\in\breve{\mathbb{E}}_1(T,\breve{L})$. *Тоді для* $\tau\in[\max\{\chi_i(x,t,w_1),$ $\chi_i(x,t,w_2)\},t]$ *правильна оцінка*

$$|\varphi_i^1(\tau;x,t,\breve{w}_1)-\varphi_i^1(\tau;x,t,\breve{w}_2)|\le N_3(1+\breve{L})T\breve{\rho}. \tag{44}$$

Доведення. Розглянемо

$$|\varphi_i^1(\tau;x,t,\breve{w}_1)-\varphi_i^1(\tau;x,t,\breve{w}_2)|\le N_1\int\limits_\tau^t\{\Lambda_1^1|\varphi_i(\theta;x,t,w_1)-\varphi_i(\theta;x,t,w_2)|+$$

$$+\Lambda_2^1|w_1(\varphi_i(\theta;x,t,w_1),\theta)-w_2(\varphi_i(\theta;x,t,w_2),\theta)|+\sum_{k=1}^m\Lambda^1|u_{1k}^1(\varphi_i(\theta;x,t,w_1),\theta)-$$

$$-u_{2k}^1(\varphi_i(\theta;x,t,w_2),\theta)|+\sum_{k=1}^m P_0^1(\Lambda_1^1|\varphi_i(\theta;x,t,w_1)-\varphi_i(\theta;x,t,w_2)|+$$

$$\Lambda_2^1|w_1(\varphi_i(\theta;x,t,w_1),\theta)-w_2(\varphi_i(\theta;x,t,w_2),\theta)|)+\sum_{r=1}^n\Lambda^1|v_{1r}^1(\varphi_i(\theta;x,t,w_1),\theta)-$$

$$-v_{2r}^1(\varphi_i(\theta;x,t,w_2),\theta)|+\sum_{r=1}^n Q(\Lambda_1^1|\varphi_i(\theta;x,t,w_1)-\varphi_i(\theta;x,t,w_2)|+$$

$$+\Lambda_2^1|w_1(\varphi_i(\theta;x,t,w_1),\theta)-w_2(\varphi_i(\theta;x,t,w_2),\theta)|)\}d\theta\le N_1\int\limits_\tau^t\{(\Lambda_1^1+\Lambda_2^1L)M_1\times$$

$$\times\nu_0\rho+\Lambda_2^1e^{H\ell}\rho+m(\Lambda^1L^1M_1\nu_0\rho+\Lambda^1\rho^1)+P_0^1m(\Lambda_1^1+\Lambda_2^1L)M_1\nu_0\rho+mP_0^1\Lambda_2^1e^{H\ell}\rho+$$
$$+n\Lambda^1[(Q_1+Q_2L)M_1\nu_0\rho+Q_2e^{H\ell}\rho]+Qn(\Lambda_1^1+\Lambda_2^1L)M_1\nu_0\rho+nQ\Lambda_2^1e^{H\ell}\rho\}d\theta\le$$
$$\le N_3(1+\breve{L})T\breve{\rho}, \tag{45}$$

де $N_3=N_1(\breve{\Lambda}_1(M_1\nu_0+e^{H\ell}+P_0^1mM_1\nu_0+mP_0^1e^{H\ell}+QnM_1\nu_0+Qne^{H\ell})+m\Lambda^1(M_1\nu_0+$ $+1)+n\Lambda^1(M_1\breve{Q}_1\nu_0+Q_2e^{H\ell}))$.

Лема 4. *Для $\tau_1,\tau_2\in[\chi_i(x,t,w),t]$ правильна оцінка*

$$|\varphi_i^1(\tau_1;x,t,\breve{w})-\varphi_i^1(\tau_2;x,t,\breve{w})|\le N_4|\tau_1-\tau_2|. \tag{46}$$

Доведення. Нехай для визначеності $\tau_1\le\tau_2$. Тоді з (22) одержуємо, що

$$|\varphi_i^1(\tau_1;x,t,\breve{w})-\varphi_i^1(\tau_2;x,t,\breve{w})|\le N_1\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\Lambda^1(1+P_0^1m+nQ)d\theta=N_4|\tau_1-\tau_2|, \tag{47}$$

де $N_4=N_1\Lambda^1(1+P_0^1m+nQ)$.

Наслідок 1. *З леми 4 та з леми 2 випливає, що при $(x_1,t),(x_2,t)\in\Pi_i^0(w)$ (або $(x_1,t),(x_2,t)\in\Pi_i^\ell(w)$) матимемо оцінку*

$$|\varphi_i^1(\chi_i(x_1,t,w);x_1,t,\breve{w})-\varphi_i^2(\chi_i(x_2,t,w);x_2,t,\breve{w})|\le N_2(1+\breve{L})T|x_1-x_2|+$$
$$+N_4|\chi_i(x_1,t,w)-\chi_i(x_2,t,w)|\le N_5(1+\breve{L}T)|x_1-x_2|, \tag{48}$$

де $N_5=N_2(1+T_0)+N_4M_2$.

Напишемо нерівності, які використовуватимемо далі

$$|\varphi_i^1(\tau; x, t, \breve{w})| \leq N_1; |\chi_i^1(x, t, \breve{w})| \leq N_1 \Lambda_0^{-1};$$

$$|u_i^{(2)}(x, t)| \leq P_0^{(2)} \stackrel{def}{=} F + \Lambda P_0^1. \tag{49}$$

Ці нерівності відразу випливають із визначення відповідних функцій.

Лема 5. *Функція $u_i^{(2)}(x, t)$ $(i = 1, \ldots, m)$ задовольняє нерівність*

$$|u_i^{(2)}(0, t_1) - u_i^{(2)}(0, t_2)| \leq N_6(1 + \breve{L})|t_1 - t_2|. \tag{50}$$

Доведення. З (21) маємо

$$|u_i^{(2)}(0, t_1) - u_i^{(2)}(0, t_2)| \leq |f_i(0, t_1, u(0, t_1), v(0, t_1)) - f_i(0, t_2, u(0, t_2), v(0, t_2))| +$$

$$+\Lambda|u_i^1(0, t_1) - u_i^1(0, t_2)| + P_0^1|\lambda_i(0, t_1, u(0, t_1), v(0, t_1)) - \lambda_i(0, t_2, u(0, t_2), v(0, t_2))| \leq$$

$$\leq [F_3 + F_2 L + \Lambda L^1 + P_0^1(\Lambda_3 + \Lambda_2 L)]|t_1 - t_2| \leq N_6(1 + \breve{L})|t_1 - t_2|, \tag{51}$$

де $N_6 = \breve{F}_1 + \Lambda + P_0^1 \breve{\Lambda}^1$.

Лема 6. *Нехай $(x_1, t), (x_2, t) \in \Pi_i^0(w)$ (або $(x_1, t), (x_2, t) \in \Pi_i^\ell(w)$). Тоді*

$$|\chi_i^1(x_1, t, \breve{w}) - \chi_i(x_2, t, \breve{w})| \leq N_7(1 + \breve{L})|x_1 - x_2|. \tag{52}$$

Доведення. З леми 2, наслідку 1 та нерівності (49) можемо записати

$$|\chi_i^1(x_1, t, \breve{w}) - \chi_i(x_2, t, \breve{w})| \leq \left| \frac{\varphi_i^1(\chi_i(x_1, t, w); x_1, t, \breve{w})}{\lambda_i(0; \chi_i(x_1, t, w), w(0, \chi_i(x_1, t, w)))} - \right.$$

$$\left. - \frac{\varphi_i^1(\chi_i(x_2, t, w); x_2, t, \breve{w})}{\lambda_i(0; \chi_i(x_2, t, w), w(0, \chi_i(x_2, t, w)))} \right| \leq \left| \frac{\varphi_i^1(\chi_i(x_1, t, w); x_1, t, \breve{w})}{\lambda_i(0; \chi_i(x_1, t, w), w(0, \chi_i(x_1, t, w)))} - \right.$$

$$\left. - \frac{\varphi_i^1(\chi_i(x_2, t, w); x_2, t, \breve{w})}{\lambda_i(0; \chi_i(x_1, t, w), w(0, \chi_i(x_1, t, w)))} \right| + \left| \frac{\varphi_i^1(\chi_i(x_2, t, w); x_2, t, \breve{w})}{\lambda_i(0; \chi_i(x_1, t, w), w(0, \chi_i(x_1, t, w)))} - \right.$$

$$\left. - \frac{\varphi_i^1(\chi_i(x_2, t, w); x_2, t, \breve{w})}{\lambda_i(0; \chi_i(x_2, t, w), w(0, \chi_i(x_2, t, w)))} \right| \leq \Lambda_0^{-1}|\varphi_i^1(\chi_i(x_1, t, w); x_1, t, \breve{w}) -$$

$$-\varphi_i^1(\chi_i(x_2, t, w); x_2, t, \breve{w})| + N_1 \Lambda_0^{-2}|\lambda_i(0; \chi_i(x_1, t, w), w(0, \chi_i(x_1, t, w))) -$$

$$-\lambda_i(0; \chi_i(x_2, t, w), w(0, \chi_i(x_2, t, w)))| \leq (\Lambda_0^{-1} N_5(1 + \breve{L}T) + N_1 \Lambda_0^{-2}(\Lambda_3 +$$

$$+\Lambda_2 L) M_2)|x_1 - x_2| \leq N_7(1 + \breve{L})|x_1 - x_2|, \tag{53}$$

де $N_7 = N_1 \Lambda_0^{-2} \breve{\Lambda}_1 M_2 + \Lambda_0^{-1} N_5(1 + T_0)$.

Лема 7. *Нехай $(x, t) \in \Pi_i^0(w_1) \cap \Pi_i^0(w_2)$ або $(x, t) \in \Pi_i^\ell(w_1) \cap \Pi_i^\ell(w_2)$. Тоді*

$$|\chi_i^1(x, t, \breve{w}_1) - \chi_i^1(x, t, \breve{w}_2)| \leq N_8(1 + \breve{L}T)\breve{\rho}. \tag{54}$$

Доведення. Нехай для визначеності $(x,t) \in \Pi_i^0(w_1) \cap \Pi_i^0(w_2)$ (випадок $(x,t) \in \Pi_i^\ell(w_1) \cap \cap \Pi_i^\ell(w_2)$ розглядають аналогічно).

На підставі лем 3, 4 отримаємо

$$|\chi_i^1(x,t,\breve{w}_1) - \chi_i^1(x,t,\breve{w}_2)| \le \Lambda_0^{-1}|\varphi_i^1(\chi_i(x,t,w_1);x,t,\breve{w}_1) - \varphi_i^1(\chi_i(x,t,w_2);x,t,\breve{w}_2)| +$$
$$+ N_1\Lambda_0^{-2}(\Lambda_3|\chi_i(x,t,w_1) - \chi_i(x,t,w_2)| + \Lambda_2|w_1(0,\chi_i(x,t,w_1)) - w_2(0,\chi_i(x,t,w_2))|) \le$$
$$\le \Lambda_0^{-1}(N_3(1+\breve{L})T\breve{\rho} + N_4|\chi_i(x,t,w_1) - \chi_i(x,t,w_2)|) +$$
$$+ N_1\Lambda_0^{-2}(\Lambda_3 + \Lambda_2 L)\breve{M}_2 T\rho + \Lambda_2 N_1 \Lambda_0^{-2} e^{H\ell}\rho \le N_8(1+\breve{L}T)\breve{\rho}, \tag{55}$$

де $\breve{M}_2 = M_2 e^{H\ell}\Lambda_2$, $N_8 = \Lambda_0^{-1}N_3(T_0+1) + N_4\breve{M}_2\Lambda_0^{-1}T_0 + N_1\Lambda_0^{-2}\breve{M}_2\breve{\Lambda}_1(T_0+1) + +\Lambda_2 N_1\Lambda_0^{-2}e^{H\ell}$.

Лема 8. *На множині $\Pi_i^\alpha(w)$ функція $\breve{\mathfrak{A}}_i[\breve{w}](x,t)$ задовольняє умову Ліпшиця за x з константою $N_{12}(1+\breve{L}T)$.*

Доведення. Нехай $(x_1,t),(x_2,t) \in \bar{\Pi}_i^\alpha(w)$. Тоді $\mathfrak{Y}_i^1[\breve{w}](x_1,t) = \mathfrak{Y}_i^1[\breve{w}](x_2,t) = 0$. З леми 2 випливає

$$|\mathfrak{R}_i^1[\breve{w}](x_1,t) - \mathfrak{R}_i^1[\breve{w}](x_2,t)| = |\alpha_i'(\varphi_i(0;x_1,t,w))\varphi_i^1(0;x_1,t,\breve{w}) -$$
$$-\alpha_i'(\varphi_i(0;x_2,t,w))\varphi_i^1(0;x_2,t,\breve{w})| \le A^1|\varphi_i^1(0;x_1,t,\breve{w}) - \varphi_i^1(0;x_2,t,\breve{w})| +$$
$$+ N_1 A_1^1|\varphi_i(0;x_1,t,w) - \varphi_i(0;x_2,t,w)| \le (A^1 N_2(1+\breve{L})T +$$
$$+ N_1 A_1^1 M_1)|x_1 - x_2| \le N_9(1+\breve{L}T)|x_1 - x_2|, \tag{56}$$

де $N_9 = A^1 N_2(1+T_0) + N_1 A_1^1 M_1$. Далі, $\chi_i(x_1,t,w) = \chi_i(x_2,t,w) = 0$ при (x_1,t), $(x_2,t) \in \Pi_i^\alpha(w)$. Отже,

$$|\mathfrak{I}_i^1[\breve{w}](x_1,t) - \mathfrak{I}_i^1[\breve{w}](x_1,t)| \le \int_0^t \{N_1(F_1^1 + F_2^1 L)|\varphi_i(\tau;x_1,t,w) - \varphi_i(\tau;x_2,t,w)| +$$
$$+ N_1\sum_{j=1}^m (F^1|u_j^1(\varphi_i(\tau;x_1,t,w),\tau) - u_j^1(\varphi_i(\tau;x_2,t,w),\tau)| + P_0^1(F_1^1 + F_2^1 L) \times$$
$$\times|\varphi_i(\tau;x_1,t,w) - \varphi_i(\tau;x_2,t,w)|) + N_1\sum_{k=1}^n (F^1|v_k^1(\varphi_i(\tau;x_1,t,w),\tau) -$$
$$-v_k^1(\varphi_i(\tau;x_2,t,w),\tau)| + Q(F_1^1 + F_2^1 L)|\varphi_i(\tau;x_1,t,w) - \varphi_i(\tau;x_2,t,w)|) + (F^1 +$$
$$+F^1(P_0^1 m + Qn))|\varphi_i^1(\tau;x_1,t,\breve{w}) - \varphi_i^1(\tau;x_2,t,\breve{w})|\}d\tau \le \int_0^t \{N_1(F_1^1 + F_2^1 L)M_1 \times$$
$$\times|x_1 - x_2| + (N_1 m(F^1 L^1 + P_0^1(F_1^1 + F_2^1 L)) + N_1 n(F^1(Q_1 + Q_2 L) + Q(F_1^1 +$$
$$+F_2^1 L)))M_1|x_1 - x_2| + (F^1 + F^1(P_0^1 m + Qn))N_2(1+\breve{L})T|x_1 - x_2|\}d\tau \le$$
$$\le N_{10}(1+\breve{L})T|x_1 - x_2|, \tag{57}$$

де $N_{10} = \breve{F}_1 N_1 M_1 + M_1 N_1 m(F^1 + P_0^1 \breve{F}_1) + (F^1 + F^1(P_0^1 m + Qn))N_2 T_0 + N_1 n(F^1 \breve{Q}_1 + + Q\breve{F}_1)M_1$.

Тоді з (56), (57), (35) матимемо

$$|\mathfrak{A}_i^1[\breve{w}](x_1,t) - \mathfrak{A}_i^1[\breve{w}](x_2,t)| \le N_{11}(1+\breve{L}T)|x_1 - x_2|, \tag{58}$$

де $N_{11} = N_9 + N_{10}(1+T_0)$.

Зрештою, з (58) одержуємо

$$|\breve{\mathfrak{A}}_i^1[\breve{w}](x_1,t) - \breve{\mathfrak{A}}_i^1[\breve{w}](x_2,t)| \le N_{12}(1+\breve{L}T)|x_1 - x_2|, \tag{59}$$

де $N_{12} = \max\{N_{11}, (A_1 M_1 + M_1 \breve{F}_1(T_0+1)) = N^1\}$.

Лема 9. *На множині $\Pi_i^\alpha(w)$ функція $\breve{\mathfrak{A}}_i[\breve{w}](x,t)$ задовольняє умову Ліпшиця за t з константою* $\max\{N^2(1+LT), N_{13} + N_{12}\Lambda(1+\breve{L}T)\}$.

Доведення. В $\Pi_i^\alpha(w)$ функція $\mathfrak{A}_i[w](x,t)$ задовольняє умову Ліпшиця за t з константою $N^2(1+LT)$, де $N^2 = F + \max\{1,\Lambda\}N^1$.

Нехай для визначеності $t_1 \le t_2$ і $(x,t_1),(x,t_2) \in \Pi_i^\alpha(w)$. Тоді, очевидно, що знайдеться точка $(x_3,t_1) \in \Pi_i^\alpha(w)$ така, що $\varphi_i(t_1; x, t_2, w) = x_3$. Звідси

$$|\mathfrak{A}_i^1[\breve{w}](x_3,t_1) - \mathfrak{A}_i^1[\breve{w}](x,t_2)| \le N_1(F^1 + F^1(Qn + P_0^1 m))|t_1 - t_2| = N_{13}|t_1 - t_2|, \tag{60}$$

де $N_{13} = N_1(F^1 + F^1(P_0^1 m + Qn))$.

Тому на підставі леми 8 одержимо оцінку

$$|\mathfrak{A}_i^1[\breve{w}](x,t_1) - \mathfrak{A}_i^1[\breve{w}](x,t_2)| \le |\mathfrak{A}_i^1[\breve{w}](x,t_1) - \mathfrak{A}_i^1[\breve{w}](x_3,t_1)| + |\mathfrak{A}_i^1[\breve{w}](x_3,t_1) -$$
$$- \mathfrak{A}_i^1[\breve{w}](x,t_2)| \le N_{12}(1+\breve{L}T)|x - x_3| + N_{13}|t_1 - t_2|.$$

Оскільки $|x_3 - x| = |\varphi_i(t_1; x, t_2, w) - x| \le \int_{t_1}^{t_2} \Lambda d\tau \le \Lambda|t_1 - t_2|$, то

$$|\mathfrak{A}_i^1[\breve{w}](x,t_1) - \mathfrak{A}_i^1[\breve{w}](x,t_2)| \le (N_{13} + N_{12}(1+\breve{L}T)\Lambda)|t_1 - t_2|. \tag{61}$$

Звідси і випливає твердження леми.

Наслідок 2. *З лем 8 і 9 одержуємо, що функція $\breve{\mathfrak{A}}_i[\breve{w}](x,t)$ на множині $\Pi_i^\alpha(w)$ задовольняє умову Ліпшиця за двома змінними з константою*

$$\breve{L}_\alpha^{\mathfrak{A}} = N_{14}(1+\breve{L}T), \tag{62}$$

де $N_{14} = \max\{N_{11}, N^2, N_{13} + N_{12}\Lambda\}$.

Лема 10. *На множинах $\Pi_i^0(w)$ і $\Pi_i^\ell(w)$ функція $\breve{\mathfrak{A}}_i[\breve{w}](x,t)$ задовольняє умову Ліпшиця за x з константою $N_{19}(1+\breve{L})$.*

Доведення. Нехай для визначеності $(x_1,t),(x_2,t) \in \Pi_i^0(w)$, $x_1 \le x_2$. Тоді з ліпшицевості функції $\mathfrak{A}_i[w](x,t)$ в $\Pi_i^0(w) \cup \Pi_i^\ell(w)$ за x з константою $N^3(1+L)$, де $N^3 = = \max\{\Gamma_1,\Gamma_2\}M_2 + \breve{F}_1 T_0 M_1 + F M_2$, і на підставі лем 5, 6 отримаємо

$$|\mathfrak{R}_i^1[\breve{w}](x_1,t) - \mathfrak{R}_i^1[\breve{w}](x_2,t)| \le N_1\Lambda_0^{-1}\{(\Gamma_1^1 + \Gamma_2^1 L)|\chi_i(x_1,t,w) - \chi_i(x_2,t,w)| +$$

$$+\sum_{j\bar{\in}I_+^0}(P_0^{(2)}(\Gamma_1^1+\Gamma_2^1L)|\chi_i(x_1,t,w)-\chi_i(x_2,t,w)|+\Gamma^1|u_j^{(2)}(0,\chi_i(x_1,t,w))-$$

$$-u_j^{(2)}(0,\chi_i(x_2,t,w))|)\}+(\Gamma^1+m\Gamma^1P_0^{(2)})|\chi_i^1(x_1,t,\breve{w})-\chi_i^1(x_2,t,\breve{w})|\leq$$

$$\leq N_1\Lambda_0^{-1}\{(\Gamma_1^1+\Gamma_2^1L)M_2|x_1-x_2|+mP_0^{(2)}(\Gamma_1^1+\Gamma_2^1L)M_2|x_1-x_2|+$$

$$+\Gamma^1mN_6(1+\breve{L})M_2|x_1-x_2|\}+(\Gamma^1+m\Gamma^1P_0^{(2)})N_7(1+\breve{L})|x_1-x_2|\leq[N_{15}+\Gamma^1(1+$$

$$+mP_0^{(2)})N_7](1+\breve{L})|x_1-x_2|\leq N_{16}(1+\breve{L})|x_1-x_2|, \tag{63}$$

де $N_{15}=N_1\Lambda_0^{-1}M_2(\breve{\Gamma}_1(1+mP_0^{(2)})+\Gamma^1mN_6), N_{16}=N_{15}+\Gamma^1(1+mP_0^{(2)})N_7$.

Далі

$$|\mathfrak{Y}_i^1[\breve{w}](x_1,t)-\mathfrak{Y}_i^1[\breve{w}](x_2,t)|\leq N_1\Lambda_0^{-1}(F_3+F_2L)|\chi_i(x_1,t,w)-\chi_i(x_2,t,w)|+$$

$$+F|\chi_i^1(x_1,t,\breve{w})-\chi_i^1(x_2,t,\breve{w})|\leq N_1\Lambda_0^{-1}(F_1+F_2L)M_2|x_1-x_2|+$$

$$+FN_7(1+\breve{L})|x_1-x_2|\leq N_{17}(1+\breve{L})|x_1-x_2|, \tag{64}$$

де $N_{17}=N_1M_2\Lambda_0^{-1}\breve{F}_1+FN_7$.

Оскільки $x_1\leq x_2$, то $\chi_i(x_1,t,w)\geq\chi_i(x_2,t,w)$. Тоді, використавши (57), отримаємо

$$|\mathfrak{I}_i^1[\breve{w}](x_1,t)-\mathfrak{I}_i^1[\breve{w}](x_2,t)|\leq\int\limits_{\chi_i(x_1,t,w)}^{t}\{N_1(F_1^1+F_2^1L)M_1|x_1-x_2|+N_1m(F^1L^1+$$

$$+P_0^1(F_1^1+F_2^1L))M_1|x_1-x_2|+N_1n(F^1(Q_1+Q_2L)+Q(F_1^1+F_2^1L))M_1|x_1-x_2|+$$

$$+(F^1+F^1(P_0^1m+Qn))N_2(1+\breve{L})T|x_1-x_2|\}d\tau+\int\limits_{\chi_i(x_2,t,w)}^{\chi_i(x_1,t,w)}(F^1+F^1(P_0^1m+$$

$$+Qn))N_1d\tau\leq N_{18}(1+\breve{L}T)|x_1-x_2|, \tag{65}$$

де $N_{18}=N_{10}(1+T_0)+M_2(F^1+F^1(P_0^1m+Qn))$.

Об'єднуючи (63), (64) і (65), приходимо до потрібного результату, де $N_{19}=$ $=\max\{N^3,N_{16}+N_{17}+N_{18}(T_0+1)\}$.

Наслідок 3. *З леми 8 та леми 10 випливає, що функція* $\breve{\mathfrak{A}}_i[\breve{w}](x,t)$ $(i=1,\dots,m)$ *в* $\Pi(T)$ *задовольняє умову Ліпшиця за* x *з константою* $\breve{L}_1^{\mathfrak{A}}=\max\{N_{19},N_{12}(T_0+$ $+1)\}(1+\breve{L})$.

Справді, якщо точки $(x_1,t),(x_2,t)$ належать різним множинам $\Pi_i^\alpha(w)$ і $\Pi_i^0(w)$ (або ж $\Pi_i^\alpha(w)$ і $\Pi_i^\ell(w)$), то, ввівши проміжну точку і скориставшись лемою 1, отримаємо потрібне твердження. Якщо ж точки $(x_1,t),(x_2,t)$ належать різним множинам $\Pi_i^0(w)$ і $\Pi_i^\ell(w)$, то, ввівши проміжну точку $(x_3,t)\in\Pi_i^\alpha(w)$, задача зводиться до тільки що описаного випадку, який знову приводить до потрібного твердження.

Лема 11. *У прямокутнику* $\Pi(T)$ *функція* $\breve{\mathfrak{A}}[\breve{w}](x,t)$ *є ліпшицевою за* t *з константою* $\max\{M_9(1+L),(N_{13}+\breve{L}_1^{\mathfrak{A}}\Lambda)\}$.

Доведення. Ліпшицевість функції $\breve{\mathfrak{A}}_i[\breve{w}](x,t)$ в $\Pi_i^\alpha(w)$ за t і ліпшицевість функції $\mathfrak{A}_i[w](x,t)$ в $\Pi(T)$ за t з константою $M_9(1+L)$ зразу ж випливає з леми 9. Нехай тепер $(x_1,t),(x_2,t) \in \Pi_i^0(w)$ (випадок $(x_1,t),(x_2,t) \in \Pi_i^\ell(w)$ розглядається аналогічно), крім того, нехай для визначеності $t_1 \geq t_2$. Тоді знайдеться точка (x_3,t_1) така, що $x_3 = \varphi_i(t_1;x,t_2,w)$. Далі, міркуючи так само, як при доведенні леми 9, матимемо

$$|\mathfrak{A}_i^1[\breve{w}](x,t_1) - \mathfrak{A}_i^1[\breve{w}](x,t_2)| \leq |\mathfrak{A}_i^1[\breve{w}](x,t_1) - \mathfrak{A}_i^1[\breve{w}](x_3,t_1)| + |\mathfrak{A}_i^1[\breve{w}](x_3,t_1) - \\ -\mathfrak{A}_i^1[\breve{w}](x,t_2)| \leq (N_{13} + \breve{L}_1^{\mathfrak{A}}\Lambda)|t_1-t_2|. \quad (66)$$

Якщо ж $(x,t_1) \in \Pi_i^0(w)$, $(x,t_2) \in \Pi_i^\alpha(w)$ (випадок $(x,t_1) \in \Pi_i^\ell(w)$, $(x,t_2) \in \Pi_i^\alpha(w)$ розглядається аналогічно), то, ввівши проміжну точку (x,t_3), приходимо до того самого результату.

Отож, отримуємо потрібне твердження з константою Ліпшиця $\breve{L}_2^{\mathfrak{A}} = \max\{M_9(1+L),(N_{13}+\breve{L}_1^{\mathfrak{A}}\Lambda)\}$.

Отже, функція $\breve{\mathfrak{A}}_i[\breve{w}](x,t)$ ліпшицева за x,t з константою $\breve{L}^{\mathfrak{A}} = N_{20}(1+\breve{L})$, де $N_{20} = \max\{M_9,(N_{13}+\max\{1,\Lambda\}\max\{N_{19},N_{12}(T_0+1)\})\}$.

Лема 12. *В $\Pi(T)$ функція $\breve{\mathfrak{B}}_j[\breve{w}](x,t)$ задовольняє умову Ліпшиця за x з константою $N_{22} = \max\{Q,Q^1(1+P_0^{(2)}m+nP_0^1)\}$, а функція $\mathfrak{B}_j[w](x,t)$, крім того, є ліпшицевою за t з константою $B_1+RQ+\ell(Q_3+Q_2L)$.*

Доведення. Нехай $(x,t_1),(x,t_2) \in \Pi(T)$ і нехай для визначеності $t_2 \geq t_1$, $s_j(t_2;w) \leq \leq s_j(t_1;w) \leq x$. Тоді для функції $\mathfrak{B}_j[w](x,t)$ виконується нерівність

$$|\mathfrak{B}_j[w](x,t_1) - \mathfrak{B}_j[w](x,t_2)| \leq B_1|t_2-t_1| + \int\limits_{s_j(t_1;w)}^{x} |q_j(\xi,t_1,w(\xi,t_1)) - \\ -q_j(\xi,t_2,w(\xi,t_2))|d\xi + \int\limits_{s_j(t_1;w)}^{s_j(t_2;w)} |q_j(\xi,t_2,w(\xi,t_2))|d\xi \leq (B_1+RQ)|t_1-t_2| + \\ + \int\limits_{s_j(t_1;w)}^{x} (Q_3+Q_2L)|t_1-t_2|d\xi \leq (B_1+RQ+\ell(Q_3+Q_2L))|t_1-t_2|, \quad (67)$$

звідки й отримуємо другу частину твердження леми.

Розглянемо тепер ліпшицевість за x функції $\mathfrak{B}_j^1[\breve{w}](x,t)$.

Нехай $(x_1,t),(x_2,t) \in \Pi(T)$ і $x_1 \leq x_2$. Тоді з (36) маємо

$$|\mathfrak{B}_j^1[\breve{w}](x_1,t) - \mathfrak{B}_j^1[\breve{w}](x_2,t)| \leq \int\limits_{x_1}^{x_2} (Q^1 + Q^1P_0^{(2)}m + Q^1P_0^1n)d\xi = N_{21}|x_1-x_2|, \quad (68)$$

де $N_{21} = Q^1(1+P_0^{(2)}m+nP_0^1)$.

В просторі $\breve{\mathbb{E}}_1(T,\breve{L})$ розглянемо кулю $\breve{\mathbb{E}}_2(T,\breve{L},P,P^1)$, яка містить функції $\breve{w}$ такі, що $\max\{\|u(x,t)-\alpha(x)\|,\|v(x,t)\|\} \leq P$, $\max\{\|u^1(x,t)-\alpha'(x)\|,\ \|v^{(2)}(x,t)\|\} \leq P^1$, де P^1 – деяка константа, причому $P^1 > \max\{A^1,B^1\}$.

Лема 13. *При достатньо малому T оператор $\breve{\mathfrak{S}}$ відображає кулю $\breve{\mathbb{E}}_2(T, \breve{L}, P, P^1)$ в кулю $\breve{\mathbb{E}}_2(T, \breve{L}^{\mathfrak{S}}, P, P^1)$.*

Доведення. Зрозуміло, що оператор $\mathfrak{S}$ відображає кулю $\mathbb{E}_2(T, L, P)$ в кулю $\mathbb{E}_2(T,\ M_{10}(1+L), P)$. Розглянемо тепер дію оператора $\mathfrak{S}^1$.

Нехай $(x,t) \in \Pi_i^{\alpha}(w)$, тоді $\mathfrak{Y}_i^1[\breve{w}](x,t) = 0$, тому отримуємо

$$|\mathfrak{R}_i^1[\breve{w}](x,t) - \alpha_i'(x)| \le |\alpha_i'(\varphi_i(0;x,t,w))\varphi_i^1(0;x,t,\breve{w}) - \alpha_i'(x)| \le$$

$$\le |\alpha_i'(\varphi_i(0;x,t,w))\varphi_i^1(0;x,t,\breve{w}) - \alpha_i'(x)\varphi_i^1(0;x,t,\breve{w})| + |\alpha_i'(x)\varphi_i^1(0;x,t,\breve{w}) - \alpha_i'(x)| \le$$

$$\le A^1|\varphi_i^1(0;x,t,\breve{w}) - 1| + N_1 A_1^1 |\varphi_i(0;x,t,w) - x| \le A_1^1 N_1 \Lambda T + A^1|\varphi_i^1(0;x,t,\breve{w}) - e^0| \le$$

$$\le N_1 A_1^1 \Lambda T + A^1 N_1 \int_0^t (\Lambda^1 + \Lambda^1(mP_0^1 + Qn))d\tau \le (A_1^1 \Lambda N_1 + A^1 \Lambda^1 N_1(1 + mP_0^1 + Qn))T. \quad (69)$$

Далі

$$|\mathfrak{I}_i^1[\breve{w}](x,t)| \le \int_0^t N_1(F^1 + F^1(P_0^1 m + Qn))d\tau \le N_1(F^1 + F^1(P_0^1 m + Qn)). \quad (70)$$

Об'єднуючи (69) і (70), одержимо, що при $(x,t) \in \Pi_i^{\alpha}(w)$ виконується нерівність

$$|\mathfrak{A}_i^1[\breve{w}](x,t) - \alpha_i'(x)| \le N_{22}' T, \quad (71)$$

де $N_{22}' = N_1(A_1^1\Lambda + A^1\Lambda(1 + mP_0^1 + Qn) + F^1 + F^1(P_0^1 m + QN))$.

Нехай далі $(x,t) \in \Pi_i^0(w)$ (випадок $(x,t) \in \Pi_i^{\ell}(w)$ розглядається аналогічно). Тоді, помноживши рівність (19) на $\chi_i^1(x,t,\breve{w})$, перенісши всі одержані члени цієї рівності в ліву частину і віднявши все це від $\mathfrak{R}_i^1[\breve{w}](x,t) + \mathfrak{Y}_i^1[\breve{w}](x,t) - \alpha_i'(x)$, отримаємо

$$|\mathfrak{R}_i^1[\breve{w}](x,t) + \mathfrak{Y}_i^1[\breve{w}](x,t) - \alpha_i'(x)| \le \chi_i^1(x,t,\breve{w})[(\Gamma_1^1 + \Gamma_2^1 L)\chi_i(x,t,w) +$$

$$+ \sum_{j \bar{\in} I_+^0} |(\gamma_i^0)'_{u_j}(\chi_i(x,t,w), u(0,\chi_i(x,t,w)))u_j^{(2)}(0,\chi_i(x,t,w)) -$$

$$-(\gamma_i^0)'_{u_j}(0,u(0,0))u_j^{(2)}(0,0)| + | - f_i(0,\chi_i(x,t,w), w(0,\chi_i(x,t,w))) +$$

$$+ f_i(0,0,w(0,0))|] + \left| \frac{\varphi_i^1(\chi_i(x,t,w);x,t,\breve{w})}{\lambda_i(0,\chi_i(x,t,w),w(0,\chi_i(x,t,w)))}\lambda_i(0,0,\alpha(0))\alpha_i'(0) \ - \alpha_i'(x)\right|.$$

Оскільки $|\chi_i(x,t,w)| \le T$, а також $\Pi_i^0(w)$ в області $x \le \Lambda T$, то, з урахуванням леми 5, маємо

$$|\mathfrak{R}_i^1[\breve{w}](x,t) + \mathfrak{Y}_i^1[\breve{w}](x,t) - \alpha_i'(x)| \le N_1 \Lambda_0^{-1}((\Gamma_1^1 + \Gamma_2^1 L)T + P_0^{(2)} m(\Gamma_1^1 + \Gamma_2^1 L)T +$$

$$+\Gamma^1 m N_6(1 + \breve{L})T + (F_3 + F_2 L)T) + \left| \frac{\varphi_i^1(\chi_i(x,t,w);x,t,\breve{w})}{\lambda_i(0,\chi_i(x,t,w),w(0,\chi_i(x,t,w)))} \times \right.$$

$$\left. \times \lambda_i(0,0,\alpha(0))\alpha_i'(0) - \frac{\varphi_i^1(\chi_i(x,t,w);x,t,\breve{w})}{\lambda_i(0,\chi_i(x,t,w),w(0,\chi_i(x,t,w)))}\lambda_i(0,0,\alpha(0))\alpha_i'(x) \right| +$$

$$+\left|\frac{\varphi_i^1(\chi_i(x,t,w);x,t,\breve{w})}{\lambda_i(0,\chi_i(x,t,w),w(0,\chi_i(x,t,w)))}\lambda_i(0,0,\alpha(0))\alpha_i'(x)-\alpha_i'(x)\right| \le$$

$$\le N_1\Lambda_0^{-1}(\Gamma_1^1+\Gamma_2^1L+P_0^{(2)}m(\Gamma_1^1+\Gamma_2^1L)+\Gamma^1 mN_6(1+\check{L})+F_3+F_2L)T+$$

$$+A_1^1\Lambda\Lambda_0^{-1}N_1\Lambda T+A^1\Lambda_0^{-1}|\varphi_i^1(\chi_i(x,t,w);x,t,\breve{w})\lambda_i(0,0,\alpha(0))-$$

$$-\lambda_i(0;\chi_i(x,t,w),w(0,\chi_i(x,t,w))|\le N_1\Lambda_0^{-1}(\Gamma_1^1+\Gamma_2^1L+P_0^{(2)}m(\Gamma_1^1+\Gamma_2^1L)+$$

$$+\Gamma^1 mN_6(1+\check{L})+F_3+F_2L)T+A_1^1\Lambda^2\Lambda_0^{-1}N_1T+A^1\Lambda_0^{-1}N_1(\Lambda_3+\Lambda_2L)T+$$

$$+A^1\Lambda_0^{-1}\Lambda|\varphi_i^1(\chi_i(x,t,w);x,t,\breve{w})-1|\le N_1\Lambda_0^{-1}(\Gamma_1^1+\Gamma_2^1L+P_0^{(2)}m(\Gamma_1^1+\Gamma_2^1L)+$$

$$+\Gamma^1 mN_6(1+\check{L})+F_3+F_2L)T+A_1^1\Lambda^2\Lambda_0^{-1}N_1T+A^1\Lambda_0^{-1}N_1(\Lambda_3+\Lambda_2L)T+$$

$$+A^1\Lambda_0^{-1}\Lambda^1\Lambda N_1(1+mP_0^1+Qn)T\le A_1^1\Lambda^2\Lambda_0^{-1}N_1T+$$

$$+A^1\Lambda_0^{-1}\Lambda^1\Lambda N_1(1+mP_0^1+Qn)T+N_{23}(1+\check{L})T, \tag{72}$$

де $N_{23}=N_1\Lambda_0^{-1}(\check{\Gamma}_1+P_0^{(2)}m\check{\Gamma}_1+\Gamma^1 mN_6+\check{F}_1)+A^1\Lambda_0^{-1}N_1\check{\Lambda}_1$. Зауважимо, що при $(x,t)\in\Pi_i^0(w)$ нерівність (70) також правильна, тому з (71) отримуємо, що в $\Pi(T)$ виконується співвідношення

$$|\mathfrak{A}_i^1[\breve{w}](x,t)-\alpha_i'(x)|\le N_{24}(1+\check{L})T, \tag{73}$$

де $N_{24}=N_{22}'+N_{23}+A_1^1\Lambda^2\Lambda_0^{-1}N_1+A^1\Lambda_0^{-1}\Lambda^1\Lambda N_1(1+mP_0^1+Qn)$.

Розглянемо оператор $\mathfrak{B}^1[\breve{w}](x,t)$.

Нехай $(x,t)\in D_j^c$, тоді

$$|\mathfrak{B}_j^1[\breve{w}](x,t)|\le B^1+|\int\limits_{s_j(t;w)}^{x}[(q_j)_t'(\xi,t,w(\xi,t))+$$

$$+\sum_{i:c_i=c_j}(q_j)_{u_i}'(\xi,t,w(\xi,t))u_i^{(2)}(\xi,t)+\sum_{k;c_k=c_j}(q_j)_{v_k}'(\xi,t,w(\xi,t))v_k^{(2)}(\xi,t)]d\xi|+$$

$$+RQ\le B^1+\int\limits_{c_j-RT}^{c_j+RT}(Q^1+mQ^1(F+\Lambda P_0^1)+nQ^1P_0^1e^{H\ell})d\xi+RQ\le$$

$$\le B^1+RQ+2Q^1RT(1+m(F+\Lambda P_0^1)+nP_0^1e^{H\ell}).$$

Нехай $(x,t)\in D_j^\ell$ (випадок $(x,t)\in D_j^0$ розглядають аналогічно). Тоді згідно з умовою A21 матимемо

$$|\mathfrak{B}_j^1[\breve{w}](x,t)|\le B^1+|\int\limits_{s_j(t;w)}^{x}[(q_j)_t'(\xi,t,w(\xi,t))+$$

$$+\sum_{i:c_i=c_j}(q_j)_{u_i}'(\xi,t,w(\xi,t))u_i^{(2)}(\xi,t)+\sum_{k;c_k=c_j}(q_j)_{v_k}'(\xi,t,w(\xi,t))v_k^{(2)}(\xi,t)]d\xi|+$$

$$+RQ \le B^1 + RQ + \int\limits_{s_j(t;w)}^{c_j+RT} |[(q_j)'_t(\xi,t,w(\xi,t)) + \sum_{i:c_i=c_j}(q_j)'_{u_i}(\xi,t,w(\xi,t))u_i^{(2)}(\xi,t) +$$

$$+ \sum_{k;c_k=c_j}(q_j)'_{v_k}(\xi,t,w(\xi,t))v_k^{(2)}(\xi,t)]|d\xi + \int\limits_{c_j+RT}^{x} |[(q_j)'_t(\xi,t,w(\xi,t)) +$$

$$+ \sum_{i:c_i=c_j}(q_j)'_{u_i}(\xi,t,w(\xi,t))u_i^{(2)}(\xi,t) + \sum_{k;c_k=c_j}(q_j)'_{v_k}(\xi,t,w(\xi,t))v_k^{(2)}(\xi,t)]|d\xi \le$$

$$\le B^1 + RQ + 2Q^1RT(1 + m(F+\Lambda P_0^1) + nP_0^1e^{H\ell}) + \int\limits_{c_j+RT}^{x} [(1 + m(F+\Lambda P_0^1))\times$$

$$\times M^1(\xi)\max_{k;c_k=c_j}|v_k(\xi,t)| + Q^1 n\max_{k;c_k=c_j}|v_k^{(2)}(\xi,t)|\,]d\xi \le B^1 + RQ + 2Q^1RT(1+m\times$$

$$\times(F+\Lambda P_0^1) + nP_0^1e^{H\ell}) + \int\limits_{c_j+RT}^{x} [(1+m(F+\Lambda P_0^1))M^1(\xi)\{\max_{k;c_k=c_j}|v_k(\xi,t)|\times$$

$$\times e^{-H(\xi-c_j-RT)}\} + Q^1 n\{\max_{k;c_k=c_j}|v_k^{(2)}(\xi,t)|e^{-H(\xi-c_j-RT)}\}]e^{H(\xi-c_j-RT)}d\xi \le B^1 +$$

$$+RQ + 2Q^1RT(1+m(F+\Lambda P_0^1) + nP_0^1e^{H\ell}) + [(1+m(F+\Lambda P_0^1))\max_x M^1(x)\|v\| +$$

$$+Q^1 n\|v^{(2)}\|\,]\int\limits_{c_j+RT}^{x} e^{H(\xi-c_j-RT)}d\xi \le B^1 + RQ + 2Q^1RT(1+m(F+\Lambda P_0^1) +$$

$$+nP_0^1e^{H\ell}) + [(1+m(F+\Lambda P_0^1))\max_x M^1(x)P_0 + Q^1nP_0^1]H^{-1}(e^{H(x-c_j-RT)} - 1).$$

Помноживши отриману нерівність на $e^{-H(x-c_j-RT)}$ і перейшовши до максимуму по D_j^ℓ, одержимо

$$\max_{D_j^\ell}\{|\mathfrak{B}_j^1[\breve{w}](x,t)|e^{-H(x-c_j-RT)}\} \le B^1 + RQ + 2Q^1RT(1+m(F+\Lambda P_0^1) + nP_0^1e^{H\ell}) +$$

$$+[(1+m(F+\Lambda P_0^1))\max_x M^1(x)P_0 + Q^1nP_0^1]H^{-1}(1-e^{-H\ell}) \le B^1 + RQ + 2Q^1RT(1+$$

$$+m(F+\Lambda P_0^1) + nP_0^1e^{H\ell}) + [(1+m(F+\Lambda P_0^1))\max_x M^1(x)P_0 + Q^1nP_0^1]H^{-1}. \qquad (74)$$

Отож, для $(x,t) \in \Pi(T)$ правильна оцінка

$$\|\mathfrak{B}^1[\breve{w}](x,t)\| \le B^1 + RQ + 2Q^1RT(1+m(F+\Lambda P_0^1) + nP_0^1e^{H\ell}) +$$

$$+[(1+m(F+\Lambda P_0^1))\max_x M^1(x)P_0 + Q^1nP_0^1]H^{-1}. \qquad (75)$$

Об'єднуючи результати (73) і (75), отримуємо, що при виконанні нерівностей

$$B^1 + RQ + 2Q^1RT(1 + m(F + \Lambda P_0^1) + nP_0^1 e^{H\ell})+$$
$$+[(1 + m(F + \Lambda P_0^1)) \max_x M^1(x)P_0 + Q^1 nP_0^1]H^{-1} < P^1, \tag{76}$$

$$N_{24}(1 + \breve{L})T < P^1, \tag{77}$$

оператор $\breve{\mathfrak{S}}$ відображає кулю $\breve{\mathbb{E}}_2(T, \breve{L}, P, P^1)$ в кулю $\breve{\mathbb{E}}_2(T, \breve{L}^{\mathfrak{S}}, P, P^1)$, що й завершує доведення леми.

Зауваження 3. Взагалі кажучи, $\breve{L}^{\mathfrak{S}} \geq L$ і $\breve{L}^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}} \geq \breve{L}^{\mathfrak{S}}$ ($\breve{L}^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}}$- константа Ліпшиця функції $\breve{\mathfrak{S}}[\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}](x,t)$). Тому: $\breve{\mathbb{E}}_2(T, \breve{L}, P, P^1) \xrightarrow{\breve{\mathfrak{S}}} \breve{\mathbb{E}}_2(T, \breve{L}^{\mathfrak{S}}, P, P^1) \xrightarrow{\breve{\mathfrak{S}}} \breve{\mathbb{E}}_2(T, \breve{L}^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}}, P, P^1)$.

Далі будемо вивчати властивості оператора $\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}} = \breve{\mathfrak{S}}^3$.

Лема 14. *Оператор $\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}$ при досить малому $T > 0$ і досить великому $\breve{L}$ відображає кулю $\breve{\mathbb{E}}_2(T, \breve{L}, P, P^1)$ в себе.*

Доведення. Функції $\mathfrak{A}[\mathfrak{S}w](x,t)$ за x, t і $\mathfrak{B}[\mathfrak{S}w](x,t)$ за x є ліпшицевими з константою

$$L^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}} = N^4(1 + L^{\mathfrak{S}}T) = N^4(1 + M_{10}(1 + L)T) \leq N^5(1 + LT), \tag{78}$$

де $N^4 = F + \max\{1, \Lambda\}[Q + FM_2 + M_1\breve{F}_1(1 + T_0) + \Gamma_1 M_2 + \max\{1; \Gamma_2 M_2\}(F+ + \max\{1, \Lambda\}(A_1M_1 + \breve{F}_1M_1(1 + T_0)))]$, $N^5 = N^4 + N^4M_{10}(T_0 + 1)$.

Крім того, з леми 12 випливає, що функція $\mathfrak{B}[w](x,t)$ є ліпшицевою за t з константою $B_1 + RQ + \ell(Q_3 + Q_2L_t)$. Якщо спочатку взяти $L_t \geq \frac{B_1+RQ+\ell Q_3}{1-Q_2\ell}$, то з урахуванням A13 константа Ліпшиця за t для функції $\mathfrak{B}[w](x,t)$, а отже, і для функції $\mathfrak{B}[\mathfrak{S}w](x,t)$, буде меншою за L_t.

З лем 11, 12 отримуємо, що функція $\breve{\mathfrak{S}}[\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}](x,t)$ в $\Pi(T)$ є ліпшицевою за двома змінними (функція $\mathfrak{B}^1[\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}](x,t)$ ліпшицева тільки за x, це зауваження стосується всіх подальших викладок) з константою

$$\breve{L}^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}} = N_{25}(1 + \breve{L}^{\mathfrak{S}}) = N_{25}(1 + N_{25}(1 + \breve{L})) \leq N_{26}(1 + \breve{L}), \tag{79}$$

де $N_{25} = \max\{N_{20}, N_{22}, \frac{B_1+RQ+\ell Q_3}{1-Q_2\ell}\}$, $N_{26} = N_{25}(1 + N_{25})$.

З наслідку 2 і леми 12 будемо мати, що функція $\breve{\mathfrak{S}}_i[\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}](x,t)$ в $\Pi_i^\alpha(w)$ є ліпшицевою з константою

$$\breve{L}_\alpha^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}} = N_{26}(1 + \breve{L}^{\mathfrak{S}}T) \leq N_{26}(1 + N_{25}(1 + \breve{L})T) \leq N_{27}(1 + \breve{L}T), \tag{80}$$

де $N_{26} = \max\{N_{22}, N_{14}, \frac{B_1+RQ+\ell Q_3}{1-Q_2\ell}\}$, $N_{27} = N_{26}(1 + N_{25}(T_0 + 1))$.

Згідно з лемами 8-12, функція $\breve{\mathfrak{S}}[\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}](x,t)$ задовольняє умову Ліпшиця за двома змінними з деякою константою $\breve{L}^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}\mathfrak{S}}$. З огляду на те, що аргументами оператора $\breve{\mathfrak{S}}$ у випадку, який розглядають, є функції вигляду $\breve{\mathfrak{S}}[\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}](x,t)$, то величину константи Ліпшиця для функції $\breve{\mathfrak{S}}[\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}](x,t)$ можна уточнити.

Нехай $(x_1, t), (x_2, t) \in \Pi_i^\alpha(\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w])$, тоді на підставі леми 8 одержимо

$$|\mathfrak{A}_i^1[\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}](x_1,t) - \mathfrak{A}_i^1[\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}](x_2,t)| \leq N_{22}(1 + \breve{L}^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}}T)|x_1 - x_2| \leq$$
$$\leq N_{22}(1 + N_{26}(1 + \breve{L})T)|x_1 - x_2|. \tag{81}$$

Нехай тепер $(x_1,t),(x_2,t) \in \Pi_i^0(\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w])$ (аналогічно розглядають випадок (x_1,t), $(x_2,t) \in \Pi_i^\ell(\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w])$). Тоді зауважимо, що

$$|\chi_i^1(x_1,t,\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}) - \chi_i^1(x_2,t,\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}\breve{w})| \leq \Lambda_0^{-1}|\varphi_i^1(\chi_i^1(x_1,t,\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}\breve{w});x_1,t,\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}\breve{w})-$$
$$-\varphi_i^1(\chi_i^1(x_2,t,\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}\breve{w});x_2,t,\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}\breve{w})| + N_1\Lambda_0^{-2}|\lambda_i(0,\chi_i(x_1,t,\mathfrak{S}\mathfrak{S}w),$$
$$\mathfrak{S}\mathfrak{S}w(0,\chi_i(x_1,t,\mathfrak{S}\mathfrak{S}w))) - \lambda_i(0,\chi_i(x_2,t,\mathfrak{S}\mathfrak{S}w),\mathfrak{S}\mathfrak{S}w(0,\chi_i(x_2,t,\mathfrak{S}\mathfrak{S}w)))| \leq$$
$$\leq \Lambda_0^{-1}N_5(1+\breve{L}^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}}T)|x_1-x_2| + N_1\Lambda_0^{-2}(\Lambda_3+\Lambda_2L^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}})|\chi_i(x_1,t,\mathfrak{S}\mathfrak{S}w)-$$
$$-\chi_i(x_2,t,\mathfrak{S}\mathfrak{S}w)| \leq (\Lambda_0^{-1}N_5(1+\breve{L}^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}}T) + N_1\Lambda_0^{-2}(\Lambda_3+\Lambda_2L^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}})M_2)|x_1-x_2| \leq$$
$$\leq N'_{27}(1+\breve{L}^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}}T + L^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}})|x_1-x_2|, \tag{82}$$

де $N'_{27} = \Lambda_0^{-1}N_5 + N_1\Lambda_0^{-2}\breve{\Lambda}_1M_2$.

Оскільки $(x_1,t),(x_2,t) \in \Pi_i^0(\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w])$, то $i \in I_+^0$, а отже, точки з координатами $(0,t)$ для $j\bar{\in}I_+^0$ належать множині $\Pi_j^\alpha(\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w])$. Тому з леми 9 отримуємо, що для $j\bar{\in}I_+^0$ виконується оцінка

$$|\breve{\mathfrak{A}}_j[\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}](0,t_1) - \breve{\mathfrak{A}}_j[\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}](0,t_2)| \leq \breve{L}_\alpha^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}}|t_1-t_2|. \tag{83}$$

Введемо позначення

$$\mathfrak{A}_i^{(2)}[\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}](x,t) = f_i(x,t,\mathfrak{S}\mathfrak{S}w(x,t)) - \Lambda_i(x,t,\mathfrak{S}\mathfrak{S}w(x,t))\mathfrak{A}_i^1[\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}](x,t),$$

$i = 1,\ldots,m$.
Тоді для $j\bar{\in}I_+^0$ на підставі (83) будемо мати

$$|\mathfrak{A}_j^{(2)}[\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}](0,t_1) - \mathfrak{A}_j^{(2)}[\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}](0,t_2)| \leq (F_3+F_2L^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}})|t_1-t_2| + P_0^1(\Lambda_3+\Lambda_2L^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}})\times$$
$$\times|t_1-t_2| + \Lambda\breve{L}_\alpha^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}}|t_1-t_2| \leq N_{28}(1+L^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}}+\breve{L}_\alpha^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}})|t_1-t_2| \leq [\breve{F}_1(1+N^5(1+LT))+$$
$$+P_0^1\breve{\Lambda}_1(1+N^5(1+LT)) + \Lambda N_{27}(1+\breve{L}T)]|t_1-t_2| \leq N_{29}(1+\breve{L}T)|t_1-t_2|, \tag{84}$$

де $N_{28} = \max\{\breve{F}_1;P_0^1\breve{\Lambda}_1;\Lambda\}$, $N_{29} = N_{28}(1+N^5+N_{27})$.

Оскільки при $i \in I_+^0$ функції $\gamma_i^0(t,\mathfrak{A}[\mathfrak{S}w])$ не залежать від $\mathfrak{A}_j[\mathfrak{S}w]$, коли $j \in I_+^0$, то при $(x_1,t),(x_2,t) \in \Pi_i^0(\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w])$, з урахуванням (82) і (84) матимемо

$$|\mathfrak{R}_i^1[\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}](x_1,t) - \mathfrak{R}_i^1[\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}](x_2,t)| \leq N_1\Lambda_0^{-1}[(\Gamma_1^1+\Gamma_2^1L^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}})(1+mP_0^{(2)})\times$$
$$\times|\chi_i(x_1,t,\mathfrak{S}\mathfrak{S}w) - \chi_i(x_2,t,\mathfrak{S}\mathfrak{S}w)| + \Gamma^1\sum_{j\bar{\in}I_+^0}|\mathfrak{A}_j^{(2)}[\mathfrak{S}w](0,\chi_i(x_1,t,\mathfrak{S}\mathfrak{S}w))-$$
$$-\mathfrak{A}_j^{(2)}[\mathfrak{S}w](0,\chi_i(x_2,t,\mathfrak{S}\mathfrak{S}w))|\,] + (\Gamma^1+\Gamma^1mP_0^{(2)})|\chi_i^1(x_1,t,\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}\breve{w})-$$
$$-\chi_i^1(x_2,t,\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}\breve{w})| \leq [N_1\Lambda_0^{-1}M_2(\Gamma_1^1+\Gamma_2^1L^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}})(1+mP_0^{(2)}) + mN_{29}M_2\Gamma^1(1+\breve{L}T)\times$$
$$\times N_1\Lambda_0^{-1} + \Gamma^1(1+mP_0^{(2)})N'_{27}(1+\breve{L}^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}}T+L^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}})]|x_1-x_2| \leq [N_1\Lambda_0^{-1}M_2(1+$$
$$+mP_0^{(2)})\breve{\Gamma}_1(1+N^5(1+LT)) + mN_{29}M_2N_1\Lambda_0^{-1}(1+\breve{L}T) + \Gamma^1(1+mP_0^{(2)})N'_{27}(1+$$

$$+N_{26}(1+\breve{L})T+N^5(1+LT))]|x_1-x_2|\leq N_{30}(1+\breve{L}T)|x_1-x_2|, \qquad (85)$$

де $N_{30}=N_1\Lambda_0^{-1}M_2(1+mP_0^{(2)})\breve{\Gamma}_1(1+N^5)+mN_{29}M_2N_1\Lambda_0^{-1}+$ $+\Gamma^1(1+mP_0^{(2)})N'_{27}(1+N_{26}(T_0+1)+N^5)$.

Далі, враховуючи (82), одержуємо

$$|\mathfrak{Y}_i^1[\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}](x_1,t)-\mathfrak{Y}_i^1[\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}](x_2,t)|\leq N_1\Lambda_0^{-1}(F_3+F_2L^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}})|\chi_i(x_1,t,\mathfrak{S}\mathfrak{S}w)-$$

$$-\chi_i(x_2,t,\mathfrak{S}\mathfrak{S}w)|+F|\chi_i^1(x_1,t,\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}\breve{w})-\chi_i^1(x_2,t,\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}\breve{w})|\leq[N_1M_2\Lambda_0^{-1}\breve{F}_1(1+$$

$$+L^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}})+FN'_{27}(1+\breve{L}^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}}T+L^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}})]|x_1-x_2|\leq[N_1M_2\Lambda_0^{-1}\breve{F}_1(1+N^5(1+LT))+$$

$$+FN'_{27}(1+N_{26}(1+\breve{L})T+N^5(1+LT))]|x_1-x_2|\leq N_{31}(1+\breve{L}T)|x_1-x_2|, \qquad (86)$$

де $N_{31}=N_1M_2\Lambda_0^{-1}\breve{F}_1(1+N^5)+FN'_{27}(1+N_{26}(T_0+1)+N^5)$.

Нехай для визначеності $x_1\leq x_2$. Тоді $\chi_i(x_1,t,\mathfrak{S}\mathfrak{S}w)\geq\chi_i(x_2,t,\mathfrak{S}\mathfrak{S}w)$ і маємо оцінку

$$|\mathfrak{I}_i^1[\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}](x_1,t)-\mathfrak{I}_i^1[\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}](x_2,t)|\leq\int\limits_{\chi_i(x_1,t,\mathfrak{S}\mathfrak{S}w)}^{t}[N_1((F_1+F_2L^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}})\times$$

$$\times|\varphi_i(\tau;x_1,t,\mathfrak{S}\mathfrak{S}w)-\varphi_i(\tau;x_2,t,\mathfrak{S}\mathfrak{S}w)|+(P_0^1m+Qn)(F_1+F_2L^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}})\times$$

$$\times|\varphi_i(\tau;x_1,t,\mathfrak{S}\mathfrak{S}w)-\varphi_i(\tau;x_2,t,\mathfrak{S}\mathfrak{S}w)|+(F^1m\breve{L}^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}}+F^1n(Q_1+Q_2\breve{L}^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}}))\times$$

$$\times|\varphi_i(\tau;x_1,t,\mathfrak{S}\mathfrak{S}w)-\varphi_i(\tau;x_2,t,\mathfrak{S}\mathfrak{S}w)|)+(F^1+F^1(P_0^1m+Qn))\times$$

$$\times|\varphi_i^1(\tau;x_1,t,\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}\breve{w})-\varphi_i^1(\tau;x_2,t,\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}\breve{w})|]d\tau+\int\limits_{\chi_i(x_2,t,\mathfrak{S}\mathfrak{S}w)}^{\chi_i(x_1,t,\mathfrak{S}\mathfrak{S}w)}F^1N_1(1+P_0^1m+$$

$$+Qn)d\tau\leq[N_1\breve{F}_1(1+L^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}})TM_1+N_1(P_0^1m+Qn)M_1\breve{F}_1(1+L^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}})T+$$

$$+F^1m\breve{L}^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}}M_1TN_1+F^1n(Q_1+Q_2L^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}})M_1TN_1+F^1(1+P_0^1m+Qn)TN_2(1+$$

$$+\breve{L}^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}})T]|x_1-x_2|+F^1N_1(1+P_0^1m+Qn)M_2|x_1-x_2|\leq[N_1\breve{F}_1(1+N^5(1+LT))\times$$

$$\times TM_1+N_1(P_0^1+Qn)M_1\breve{F}_1(1+N^5(1+LT))T+F^1mN_{26}(1+\breve{L})TM_1N_1+$$

$$+F^1n\breve{Q}_1(1+N^5(1+LT))M_1TN_1+F^1(1+P_0^1m+Qn)TN_2(1+$$

$$+N_{26}(1+\breve{L}))T+F^1N_1(1+P_0^1m+Qn)M_2]|x_1-x_2|\leq N_{32}(1+N_{33}(1+\breve{L})T)|x_1-x_2|, \quad (87)$$

де $N_{32}=(N_1\breve{F}_1M_1+N_1(P_0^1m+Qn)M_1\breve{F}_1+F^1mM_1N_1+F^1n\breve{Q}_1M_1N_1+F^1(1+P_0^1m+$ $+Qn)N_2+F^1N_1(1+P_0^1m+Qn)M_2)(T_0+1)$, $N_{33}=N^5+N_{26}$.

Об'єднуючи результати (85), (86) і (87), отримуємо, що при (x_1,t), $(x_2,t)\in$ $\in\Pi_i^0(\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w])$ виконується нерівність

$$|\mathfrak{A}_i^1[\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}](x_1,t)-\mathfrak{A}_i^1[\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}](x_2,t)|\leq N_{34}(1+\breve{L}T)|x_1-x_2|, \qquad (88)$$

де $N_{34}=N_{30}+N_{31}+N_{32}+N_{32}N_{33}(T_0+1)$. Якщо тепер точки (x_1,t) і (x_2,t) належать різним множинам $\Pi_i^\alpha(\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w])$ і $\Pi_i^0(\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w])$ або ж $\Pi_i^\alpha(\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w])$ та $\Pi_i^\ell(\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w])$, то, ввівши проміжну точку і позначивши $N_{35} = \max\{N_{22} + N_{22}N_{26}(T_0+1), N_{34}\}$, отримуємо, що функція $\mathfrak{A}^1[\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}](x,t)$ задовольняє в цих областях умову Ліпшиця за x з константою $N_{35}(1+\breve{L}T)$. Якщо ж точки $(x_1,t),(x_2,t)$ належать множинам $\Pi_i^0(\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w])$ і $\Pi_i^\ell(\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w])$, то, ввівши проміжну точку $(x_3,t) \in \Pi_i^\alpha(\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w])$, аналогічно отримуємо ліпшицевість функції $\mathfrak{A}^1[\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}](x,t)$ за x з тією самою константою. Отож, функція $\mathfrak{A}^1[\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}](x,t)$ в $\Pi(T)$ задовольняє за x умову Ліпшиця з константою $N_{35}(1+\breve{L}T)$. Із (78) випливає, що функція $\mathfrak{A}[\mathfrak{S}\mathfrak{S}w](x,t)$ в $\Pi(T)$ задовольняє умову Ліпшиця за x,t з константою $L^{\mathfrak{A}\mathfrak{S}\mathfrak{S}} = N^6(1+LT)$, де $N^6 = N^4(1+N^5T_0)$. Отже, в $\Pi(T)$ функція $\breve{\mathfrak{A}}[\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}](x,t)$ задовольняє умову Ліпшиця за x з константою $\breve{L}_x^{\mathfrak{A}\mathfrak{S}\mathfrak{S}} = N_{36}(1+\breve{L}T)$, де $N_{36} = \max\{N^6; N_{35}\}$. З леми 11 отримуємо ліпшицевість в $\Pi(T)$ функції $\breve{\mathfrak{A}}[\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}](x,t)$ за t з константою $\max\{L^{\mathfrak{A}\mathfrak{S}\mathfrak{S}}; N_{13} + \breve{L}_x^{\mathfrak{A}\mathfrak{S}\mathfrak{S}}\Lambda\} \le N_{37}(1+\breve{L}T)$, де $N_{37} = \max\{N^6, N_{13} + \Lambda N_{36}\}$.

Отже, в $\Pi(T)$ функція $\breve{\mathfrak{A}}[\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}](x,t)$ є ліпшицевою за x,t з константою $\breve{L}^{\mathfrak{A}\mathfrak{S}\mathfrak{S}} = N_{38}(1+\breve{L}T)$, де $N_{38} = \max\{N^6; N_{13} + \max\{1,\Lambda\}N_{36}\}$. З леми 12 випливає, що функція $\breve{\mathfrak{B}}[\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}](x,t)$ в $\Pi(T)$ є ліпшицевою за x з константою N_{22}. Тоді з одержаних вище результатів та на підставі леми 14 робимо висновок про те, що в $\Pi(T)$ функція $\breve{\mathfrak{S}}[\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}](x,t)$ задовольняє за x,t (функція $\mathfrak{B}^1[\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}](x,t)$ тільки за x) умову Ліпшиця з константою $\breve{L}^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}\mathfrak{S}} = \max\{N_{22}; N_{38}(1+\breve{L}T); \frac{B_1+RQ+\ell Q_3}{1-Q_2\ell}\}$.

Вибираючи тепер з самого початку досить велике значення $\breve{L} > \max\{N_{22}; N_{38}; \frac{B_1+RQ+\ell Q_3}{1-Q_2\ell}\}$, отримуємо, що при досить малому $T>0$ виконується $\breve{L} \ge \breve{L}^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}\mathfrak{S}}$ тому

$$\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}} : \breve{\mathbb{E}}_2(T,\breve{L},P,P^1) \to \breve{\mathbb{E}}_2(T,\breve{L},P,P^1). \tag{89}$$

Надалі вважатимемо, що величини $\breve{L}$ і T вибрано так, що справджується (89). Перейдемо до вивчення стискуючих властивостей оператора $\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}$.

Введемо позначення $r^1 = \rho^1(\mathfrak{S}^1\breve{w}_1, \mathfrak{S}^1\breve{w}_2)$; $\breve{r} = \breve{\rho}(\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}_1, \breve{\mathfrak{S}}\breve{w}_2)$;
$r = \rho(\mathfrak{S}w_1, \mathfrak{S}w_2)$; $\varrho = \rho(\mathfrak{S}\mathfrak{S}w_1, \mathfrak{S}\mathfrak{S}w_2)$; $\breve{\varrho} = \breve{\rho}(\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}_1, \breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}_2)$.

Лема 15. *Нехай* $\breve{w}_1, \breve{w}_2 \in \breve{\mathbb{E}}_2(T,\breve{L},P,P^1)$ *і* $(x,t) \in \Pi_i^\alpha(w_1) \cap \Pi_i^\alpha(w_2)$. *Тоді справджується нерівність*

$$\|\breve{\mathfrak{A}}[\breve{w}_1](x,t) - \breve{\mathfrak{A}}[\breve{w}_2](x,t)\| \le N_{42}(1+\breve{L})T\breve{\rho}. \tag{90}$$

Доведення. Враховуючи, що

$$\|\mathfrak{A}[w_1](x,t) - \mathfrak{A}[w_2](x,t)\| \le N^7(1+L)T\|w_1 - w_2\|, \tag{91}$$

де $N^7 = A_1\breve{M}_1 + \breve{F}_1\breve{M}_1T_0 + e^{H\ell}F_2$, $\breve{M}_1 = M_1e^{H\ell}\Lambda_2$, на підставі леми 3 маємо

$$\begin{aligned}|\mathfrak{R}_i^1[\breve{w}_1](x,t) - \mathfrak{R}_i^1[\breve{w}_2](x,t)| \le |\alpha_i'(\varphi_i(0;x,t,w_1))\varphi_i^1(0;x,t,\breve{w}_1) - \\ -\alpha_i'(\varphi_i(0;x,t,w_2))\varphi_i^1(0;x,t,\breve{w}_2)| \le A^1|\varphi_i^1(0;x,t,\breve{w}_1) - \varphi_i^1(0;x,t,\breve{w}_2)| + \\ +N_1A_1^1|\varphi_i(0;x,t,w_1) - \varphi_i(0;x,t,w_2)| \le A^1N_3(1+\breve{L})T\breve{\rho} + \\ +N_1A_1^1\breve{M}_1T\|w_1 - w_2\| \le N_{39}(1+\breve{L})T\breve{\rho},\end{aligned} \tag{92}$$

де $N_{39} = A^1N_3 + N_1A_1^1\breve{M}_1$.

Оскільки $(x,t) \in \Pi_i^\alpha(w_1) \cap \Pi_i^\alpha(w_2)$, то $\mathfrak{Y}_i^1[\breve{w}_1](x,t) = \mathfrak{Y}_i^1[\breve{w}_2](x,t) = 0$ і, крім того, $\chi_i(x,t,w_1) = \chi_i(x,t,w_2) = 0$. Тому виконується нерівність

$$
\begin{gathered}
|\mathfrak{I}_i^1[\breve{w}_1](x,t) - \mathfrak{I}_i^1[\breve{w}_2](x,t)| \le \int\limits_0^t (N_1[F_1^1|\varphi_i(\tau;x,t,w_1) - \varphi_i(\tau;x,t,w_2)| + F_2^1 \times \\
\times |w_1(\varphi_i(\tau;x,t,w_1),\tau) - w_2(\varphi_i(\tau;x,t,w_2),\tau)| + P_0^1 \sum_{j=1}^m (F_1^1|\varphi_i(\tau;x,t,w_1) - \\
-\varphi_i(\tau;x,t,w_2)| + F_2^1|w_1(\varphi_i(\tau;x,t,w_1),\tau) - w_2(\varphi_i(\tau;x,t,w_2),\tau)|) + \\
+Q\sum_{k=1}^n (F_1^1|\varphi_i(\tau;x,t,w_1) - \varphi_i(\tau;x,t,w_2)| + F_2^1|w_1(\varphi_i(\tau;x,t,w_1),\tau) - \\
-w_2(\varphi_i(\tau;x,t,w_2),\tau)|) + F^1\sum_{j=1}^m |u_{1j}^1(\varphi_i(\tau;x,t,w_1),\tau) - \\
-u_{2j}^1(\varphi_i(\tau;x,t,w_2),\tau)| + F^1\sum_{k=1}^n |v_{1k}^1(\varphi_i(\tau;x,t,w_1),\tau) - \\
-v_{2k}^1(\varphi_i(\tau;x,t,w_2),\tau)|\,] + (F^1 + F^1(P_0^1 m + Qn))|\varphi_i^1(\tau;x,t,\breve{w}_1) - \\
-\varphi_i^1(\tau;x,t,\breve{w}_2)|\,)d\tau \le \int\limits_0^t [N_1(F_1^1\breve{M}_1T\rho + F_2^1L\breve{M}_1T\rho + F_2^1\rho e^{H\ell} + (P_0^1m + Qn)\times \\
\times(F_1^1\breve{M}_1T\rho + F_2^1L\breve{M}_1T\rho + F_2^1\rho e^{H\ell}) + F^1m(L^1\breve{M}_1T\rho + \rho^1) + F^1n((Q_1 + Q_2L)\times \\
\times\breve{M}_1T\rho + Q_2\rho e^{H\ell})) + F^1(1 + P_0^1m + Qn)N_3(1 + \breve{L})T\breve{\rho}]d\tau \le \int\limits_0^t (N_1[(F_1^1 + F_2^1L)\times \\
\times\breve{M}_1T\rho + F_2^1\rho e^{H\ell} + (P_0^1m + Qn)((F_1^1 + F_2^1L)\breve{M}_1T\rho + F_2^1\rho e^{H\ell}) + F^1m(L^1\breve{M}_1T\rho + \\
+\rho^1e^{H\ell})] + F^1(1 + P_0^1m + Qn)N_3(1 + \breve{L})T\breve{\rho} + F^1n(\breve{Q}_1(1 + L)\breve{M}_1T\rho + \\
+Q_2\rho e^{H\ell})N_1)d\tau \le N_{40}(1 + \breve{L})T\breve{\rho}, \qquad (93)
\end{gathered}
$$

де $N_{40} = T_0N_1\breve{F}_1\breve{M}_1 + F_2^1e^{H\ell}N_1 + N_1(P_0^1m + Qn)(\breve{F}_1\breve{M}_1T_0 + F_2^1e^{H\ell}) +$
$+N_1F^1m(\breve{M}_1T_0 + e^{H\ell}) + F^1(1 + P_0^1m + Qn)N_3T_0 + N_1F^1(\breve{Q}_1\breve{M}_1 + Q_2e^{H\ell})$.

Об'єднуючи результати (92) і (93), отримуємо, що при $(x,t) \in \Pi_i^\alpha(w_1) \cap \Pi_i^\alpha(w_2)$ правильне співвідношення

$$
|\mathfrak{A}_i^1[\breve{w}_1](x,t) - \mathfrak{A}_i^1[\breve{w}_2](x,t)| \le N_{41}(1 + \breve{L})T\breve{\rho}, \qquad (94)
$$

де $N_{41} = N_{39} + N_{40}$. Об'єднуючи цей результат з (91), приходимо до потрібного результату з константою $N_{42} = \max\{N^7, N_{41}\}$.

Лема 16. *Для $i = 1, \dots, m$ виконується*

$$|u_{1i}^{(2)}(0,t_1) - u_{2i}^{(2)}(0,t_2)| \le N_{43}(\breve{\rho} + (1+\breve{L})|t_1 - t_2|). \tag{95}$$

Доведення. З леми 5 отримуємо

$$|u_{1i}^{(2)}(0,t_1) - u_{2i}^{(2)}(0,t_2)| \le |u_{1i}^{(2)}(0,t_1) - u_{1i}^{(2)}(0,t_2)| + |u_{1i}^{(2)}(0,t_2) - u_{2i}^{(2)}(0,t_2)| \le$$
$$\le N_6(1+\breve{L})|t_1-t_2| + |f_i(0,t_2,u_1(0,t_2),v_1(0,t_2)) - f_i(0,t_2,u_2(0,t_2),v_2(0,t_2))| +$$
$$+|\lambda_i(0,t_2,u_1(0,t_2),v_1(0,t_2))u_{1i}^1(0,t_2) - \lambda_i(0,t_2,u_2(0,t_2),v_2(0,t_2))u_{2i}^1(0,t_2)| \le$$
$$\le N_6(1+\breve{L})|t_1-t_2| + F_2|w_1(0,t_2) - w_2(0,t_2)| + \Lambda|u_{1i}^1(0,t_2) - u_{2i}^1(0,t_2)| +$$
$$+P_0^1\Lambda_2|w_1(0,t_2) - w_2(0,t_2)| \le N_6(1+\breve{L})|t_1-t_2| + F_2e^{H\ell}\rho + \Lambda\rho^1 + P_0^1\Lambda_2 e^{H\ell}\rho \le$$
$$\le N_{43}(|t_1-t_2|(1+\breve{L}) + \breve{\rho}), \tag{96}$$

де $N_{43} = \max\{N_6, F_2e^{H\ell} + \Lambda + P_0^1\Lambda_2 e^{H\ell}\}$.

Лема 17. *Якщо $\breve{w}_1, \breve{w}_2 \in \breve{\mathbb{E}}_2(T,\breve{L},P,P^1)$ і або $(x,t) \in \Pi_i^0(w_1) \cap \Pi_i^0(w_2)$, або $(x,t) \in \in \Pi_i^\ell(w_1) \cap \Pi_i^\ell(w_2)$, то виконується нерівність*

$$|\breve{\mathfrak{A}}_i[\breve{w}_1](x,t) - \breve{\mathfrak{A}}_i[\breve{w}_2](x,t)| \le N_{47}(1+\breve{L}T)\breve{\rho}. \tag{97}$$

Доведення. Нехай для визначеності $(x,t) \in \Pi_i^0(w_1) \cap \Pi_i^0(w_2)$. Тоді на підставі лем 7, 16 та оцінки

$$|\mathfrak{A}_i[w_1](x,t) - \mathfrak{A}_i[w_2](x,t)| \le N^8(1+LT)\rho, \tag{98}$$

де $N^8 = T_0(\Gamma_1\breve{M}_2 + F_1\breve{M}_1T_0 + F_2\breve{M}_1 + F_2e^{H\ell} + F\breve{M}_2) + \Gamma_2\breve{M}_2 + \Gamma_2$, матимемо

$$|\mathfrak{R}_i^1[\breve{w}_1](x,t) - \mathfrak{R}_i^1[\breve{w}_2](x,t)| \le N_1\Lambda_0^{-1}[(\Gamma_1^1 + \Gamma_2^1 L)|\chi_i(x,t,w_1) - \chi_i(x,t,w_2)| +$$
$$+\Gamma_2^1\rho + \Gamma^1\sum_{j\bar{\in}I_+^0}|u_{1j}^{(2)}(0,\chi_i(x,t,w_1)) - u_{2j}^{(2)}(0,\chi_i(x,t,w_2))| + P_0^{(2)}\sum_{j\bar{\in}I_+^0}[(\Gamma_1^1 + \Gamma_2^1 L)\times$$
$$\times|\chi_i(x,t,w_1) - \chi_i(x,t,w_2)| + \Gamma_2^1\rho]] + \Gamma^1(1+mP_0^{(2)})|\chi_i^1(x,t,\breve{w}_1) - \chi_i^1(x,t,\breve{w}_2)| \le$$
$$\le N_1\Lambda_0^{-1}[(\Gamma_1^1 + \Gamma_2^1 L)\breve{M}_2T\rho + \Gamma_2^1\rho + \Gamma^1 m N_{43}(\breve{\rho} + (1+\breve{L})|\chi_i(x,t,w_1) -$$
$$-\chi_i(x,t,w_2)|) + P_0^{(2)}m((\Gamma_1^1 + \Gamma_2^1 L)\breve{M}_2T\rho + \Gamma_2^1\rho)] + \Gamma^1(1+mP_0^{(2)})N_8(1+\breve{L}T)\breve{\rho} \le$$
$$\le N_1\Lambda_0^{-1}[(1+P_0^{(2)}m)(\breve{\Gamma}_1(1+L)\breve{M}_2T\rho + \Gamma_2^1\rho) + \Gamma^1 m N_{43}\breve{\rho}(1 + (1+\breve{L})\breve{M}_2T)] +$$
$$+\Gamma^1(1+mP_0^{(2)})N_8(1+\breve{L}T)\breve{\rho} \le N_{44}(1+\breve{L}T)\breve{\rho}, \tag{99}$$

де $N_{44} = N_1\Lambda_0^{-1}[(\breve{\Gamma}_1\breve{M}_2(T_0+1) + \Gamma_2^1)(1+P_0^{(2)}m) + \Gamma^1 m N_{43}(1+\breve{M}_2(T_0+1))] + \Gamma^1(1+ +mP_0^{(2)})N_8$.

Далі

$$|\mathfrak{Y}_i^1[\breve{w}_1](x,t) - \mathfrak{Y}_i^1[\breve{w}_2](x,t)| \le N_1\Lambda_0^{-1}[(F_3 + F_2L)|\chi_i(x,t,w_1) - \chi_i(x,t,w_2)| +$$

$$+F_2e^{H\ell}\rho]+F|\chi_i^1(x,t,\breve{w}_1)-\chi_i^1(x,t,\breve{w}_2)|\leq N_1\Lambda_0^{-1}[\breve{F}_1(1+L)\breve{M}_2T\rho+F_2e^{H\ell}\rho]+$$

$$+FN_8(1+\breve{L}T)\breve{\rho}\leq N_{45}(1+\breve{L}T)\breve{\rho}, \qquad (100)$$

де $N_{45}=N_1\Lambda_0^{-1}[\breve{F}_1\breve{M}_2(T_0+1)+F_2e^{H\ell}]+FN_8$.

Нехай для визначеності $\chi_i(x,t,w_1)\leq\chi_i(x,t,w_2)$. Тоді

$$|\mathfrak{I}_i^1[\breve{w}_1](x,t)-\mathfrak{I}_i^1[\breve{w}_2](x,t)|\leq\int\limits_{\chi_i(x,t,w_2)}^{t}(N_1[(F_1^1+F_2^1L)|\varphi_i(\tau;x,t,w_1)-$$

$$-\varphi_i(\tau;x,t,w_2)|+F_2^1e^{H\ell}\rho+F^1\sum_{j=1}^{m}|u_{1j}^1(\varphi_i(\tau;x,t,w_1),\tau)-$$

$$-u_{2j}^1(\varphi_i(\tau;x,t,w_2),\tau)|+P_0^1m[(F_1^1+F_2^1L)|\varphi_i(\tau;x,t,w_1)-\varphi_i(\tau;x,t,w_2)|+$$

$$+F_2^1e^{H\ell}\rho]+F^1\sum_{k=1}^{n}|v_{1k}^1(\varphi_i(\tau;x,t,w_1),\tau)-v_{2k}^1(\varphi_i(\tau;x,t,w_2),\tau)|+Qn[(F_1^1+$$

$$+F_2^1L)|\varphi_i(\tau;x,t,w_1)-\varphi_i(\tau;x,t,w_2)|+F_2^1e^{H\ell}\rho]]+(F^1+F^1(P_0^1m+Qn))\times$$

$$\times|\varphi_i^1(\tau;x,t,\breve{w}_1)-\varphi_i^1(\tau;x,t,\breve{w}_2)|)d\tau+\int\limits_{\chi_i(x,t,w_1)}^{\chi_i(x,t,w_2)}N_1F^1(1+P_0^1m+Qn)d\tau\leq$$

$$\leq\int\limits_{\chi_i(x,t,w_2)}^{t}(N_1[\breve{F}_1(1+L)\breve{M}_1T\rho+F_2e^{H\ell}\rho+F^1mL^1\breve{M}_1T\rho+F^1m\rho+(P_0^1m+Qn)\times$$

$$\times(\breve{F}_1(1+L)\breve{M}_1T\rho+F_2^1e^{H\ell}\rho)+F^1n(Q_1+Q_2L)\breve{M}_1T\rho+F^1Q_2ne^{H\ell}\rho]+F^1(1+$$

$$+P_0^1m+Qn)N_3(1+\breve{L})T\breve{\rho})d\tau+N_1F^1(1+P_0^1m+Qn)\breve{M}_2T\rho\leq N_{46}(1+\breve{L})T\breve{\rho}, \quad (101)$$

де $N_{46}=N_1[\breve{F}_1\breve{M}_1T_0+F_2^1e^{H\ell}+F^1m\breve{M}_1T_0+F^1m+(P_0^1m+Qn)(\breve{F}_1\breve{M}_1T_0+F_2^1e^{H\ell})+$ $+F^1n\breve{M}_1\breve{Q}_1T_0+Q_2F^1ne^{H\ell}]+T_0F^1(1+P_0^1m+Qn)N_3+N_1F^1(1+P_0^1m+Qn)\breve{M}_2$.

Об'єднуючи результати (99)-(101), отримуємо таке: оскільки $\Pi_i^0(w_1)\cap\Pi_i^\ell(w_2)=\Pi_i^\ell(w_1)\cap\Pi_i^0(w_2)=\emptyset$, то в $(\bar{\Pi}_i^0(w_1)\cap\bar{\Pi}_i^0(w_2))\cup(\bar{\Pi}_i^\ell(w_1)\cap\bar{\Pi}_i^\ell(w_2))$ виконується

$$|\breve{\mathfrak{A}}_i[\breve{w}_1](x,t)-\breve{\mathfrak{A}}_i[\breve{w}_2](x,t)|\leq N_{47}(1+\breve{L}T)\breve{\rho}, \qquad (102)$$

де $N_{47}=\max\{N^8,N_{44}+N_{45}+N_{46}(T_0+1)\}$.

Лема 18. *Нехай $\breve{w}_1,\breve{w}_2\in\breve{\mathbb{E}}_2(T,\breve{L},P,P^1)$ і або $(x,t)\in\Pi_i^\alpha(w_1)\cap\Pi_i^0(w_2)$, або $(x,t)\in$ $\in\Pi_i^0(w_1)\cap\Pi_i^\alpha(w_2)$, або $(x,t)\in\Pi_i^\alpha(w_1)\cap\Pi_i^\ell(w_2)$, або $(x,t)\in\Pi_i^\ell(w_1)\cap\Pi_i^\alpha(w_2)$. Тоді правильна нерівність*

$$|\breve{\mathfrak{A}}_i[\breve{w}_1](x,t)-\breve{\mathfrak{A}}_i[\breve{w}_2](x,t)|\leq N_{51}(1+\breve{L})T\breve{\rho}. \qquad (103)$$

Доведення. Легко бачити, що

$$|\mathfrak{A}_i[w_1](x,t) - \mathfrak{A}_i[w_2](x,t)| \le N^9(1+L)T\rho, \tag{104}$$

де $N^9 = A_1\breve{M}_1 + \breve{\Gamma}_1\breve{M}_2 + \breve{F}_1T_0\breve{M}_1 + F_2e^{H\ell} + F\breve{M}_2$.

Нехай тепер для визначеності $(x,t) \in \Pi_i^\alpha(w_1) \cap \Pi_i^0(w_2)$ (інші випадки розглядають аналогічно). Оскільки $(x,t) \in \Pi_i^\alpha(w_1)$, то $\chi_i(x,t,w_1) = 0$. З іншого боку, $(x,t) \in \Pi_i^0(w_2)$, тому $x \le \Lambda T$. Отже, отримуємо оцінку

$$|\chi_i(x,t,w_2)| \le \breve{M}_2T\rho. \tag{105}$$

Оскільки $(x,t) \in \Pi_i^0(w_2)$, то $i \in I_+^0$, $\lambda_i(x,t,w_1) \ge \Lambda_0$, тому функція $\varphi_i(\tau;x,t,w_1)$ при $0 \le \tau \le t$ буде зростаючою за τ. Отже,

$$\varphi_i(0;x,t,w_1) \le \varphi_i(\chi_i(x,t,w_2);x,t,w_1). \tag{106}$$

Також зауважимо, що $\varphi_i(\chi_i(x,t,w_2);x,t,w_2) = 0$, тому правильна оцінка

$$|\varphi_i(\chi_i(x,t,w_2);x,t,w_1) - \varphi_i(\chi_i(x,t,w_2);x,t,w_2)| \le \breve{M}_1T\rho. \tag{107}$$

Із (106) і (107) випливає

$$\varphi_i(0;x,t,w_1) \le \breve{M}_1T\rho. \tag{108}$$

Зауважимо таке: оскільки $(x,t) \in \Pi_i^\alpha(w_1)$, то $\mathfrak{Y}_i^1[\breve{w}_1](x,t) = 0$. Помноживши умови узгодження (19) на $\chi_i^1(x,t,\breve{w}_2)$ та використавши отримані співвідношення, матимемо

$$|\mathfrak{R}_i^1[\breve{w}_1](x,t) - \mathfrak{R}_i^1[\breve{w}_2](x,t) + \mathfrak{Y}_i^1[\breve{w}_1](x,t) - \mathfrak{Y}_i^1[\breve{w}_2](x,t)| =$$

$$= |\alpha_i'(\varphi_i(0;x,t,w_1))\varphi_i^1(0;x,t,\breve{w}_1) - [(\gamma_i^0)_t'(\chi_i(x,t,w_2),u_2(0,\chi_i(x,t,w_2)))+$$

$$+\sum_{j\bar{\in} I_+^0}(\gamma_i^0)_{u_{2j}}'(\chi_i(x,t,w_2),u_2(0,\chi_i(x,t,w_2)))u_{2j}^{(2)}(0,\chi_i(x,t,w_2))]\chi_i^1(x,t,\breve{w}_2)+$$

$$+0-(-f_i(0,\chi_i(x,t,w_2),w_2(0,\chi_i(x,t,w_2)))\chi_i^1(x,t,\breve{w}_2)) + \chi_i^1(x,t,\breve{w}_2)\times$$

$$\times[(\gamma_i^0)_t'(0,\alpha(0)) + \sum_{j\bar{\in} I_+^0}(\gamma_i^0)_{u_{2j}}'(0,\alpha(0))[f_j(0,0,\alpha(0),v_2(0,0))-$$

$$-\lambda_j(0,0,\alpha(0),v_2(0,0))\alpha_j'(0)] - f_i(0,0,\alpha(0),v_2(0,0)) + \lambda_i(0,0,\alpha(0),v_2(0,0))\times$$

$$\times\alpha_i'(0)]| \le N_1\Lambda_0^{-1}[|(\gamma_i^0)_t'(0,\alpha(0)) - (\gamma_i^0)_t'(\chi_i(x,t,w_2),u_2(0,\chi_i(x,t,w_2)))|+$$

$$+\sum_{j\bar{\in} I_+^0}|(\gamma_i^0)_{u_{2j}}'(0,\alpha(0))u_{2j}^{(2)}(0,0) - (\gamma_i^0)_{u_{2j}}'(\chi_i(x,t,w_2),u_2(0,\chi_i(x,t,w_2)))\times$$

$$\times u_{2j}^{(2)}(0,\chi_i(x,t,w_2))|] + |\chi_i^1(x,t,\breve{w}_2)||f_i(0,\chi_i(x,t,w_2),w_2(0,\chi_i(x,t,w_2)))-$$

$$-f_i(0,0,\alpha(0),v_2(0,0))| + |\alpha_i'(\varphi_i(0;x,t,w_1))\varphi_i^1(0;x,t,\breve{w}_1) + \chi_i^1(x,t,\breve{w}_2)\times$$

$$\times\lambda_i(0,0,\alpha(0),v_2(0,0))\alpha_i'(0)| \le N_1\Lambda_0^{-1}[(\Gamma_1^1+\Gamma_2^1L)|\chi_i(x,t,w_2)| + P_0^{(2)}\sum_{j\bar{\in} I_+^0}(\Gamma_1^1+$$

$$+\Gamma_2^1 L)|\chi_i(x,t,w_2)| + \Gamma^1 \sum_{j\bar{\in} I_+^0} |u_{2j}^{(2)}(0,0) - u_{2j}^{(2)}(0,\chi_i(x,t,w_2))|\,] + N_1\Lambda_0^{-1}(F_3+$$

$$+F_2 L)|\chi_i(x,t,w_2)| + |\alpha_i'(\varphi_i(0;x,t,w_1))\varphi_i^1(0;x,t,\breve{w}_1)-$$

$$-\frac{\varphi_i^1(\chi_i(x,t,w_2);x,t,\breve{w}_2)}{\lambda_i(0,\chi_i(x,t,w_2),w_2(0,\chi_i(x,t,w_2)))}\lambda_i(0,0,\alpha(0),v_2(0,0))\alpha_i'(0)| \le N_1\Lambda_0^{-1}\times$$

$$\times[\breve{\Gamma}_1(1+L)\breve{M}_2 T\rho + P_0^{(2)} \sum_{j\bar{\in} I_+^0} \breve{\Gamma}_1(1+L)\breve{M}_2 T\rho + \Gamma^1 \sum_{j\bar{\in} I_+^0} N_6(1+\breve{L})\breve{M}_2 T\rho] + N_1\Lambda_0^{-1}\times$$

$$\times\breve{F}_1(1+L)\breve{M}_2 T\rho + N_1|\alpha_i'(\varphi_i(0;x,t,w_1)) - \alpha_i'(0)| + A^1|\varphi_i^1(0;x,t,\breve{w}_1)-$$

$$-\frac{\varphi_i^1(\chi_i(x,t,w_2);x,t,\breve{w}_2)\lambda_i(0,0,w_2(0,0))}{\lambda_i(0,\chi_i(x,t,w_2),w_2(0,\chi_i(x,t,w_2)))}| \le N_1\Lambda_0^{-1}\breve{M}_2(\breve{\Gamma}_1(1+mP_0^{(2)})+$$

$$+\Gamma^1 m N_6)(1+\breve{L})T\rho + N_1\Lambda_0^{-1}\breve{F}_1(1+L)\breve{M}_2 T\rho + N_1 A_1^1|\varphi_i(0;x,t,w_1)| + A^1\Lambda\Lambda_0^{-1}\times$$

$$\times|\varphi_i^1(0;x,t,\breve{w}_1) - \varphi_i^1(\chi_i(x,t,w_2);x,t,\breve{w}_2)| + A^1 N_1|1-$$

$$-\frac{\lambda_i(0,0,w_2(0,0))}{\lambda_i(0,\chi_i(x,t,w_2),w_2(0,\chi_i(x,t,w_2)))}| \le N_1\Lambda_0^{-1}\breve{M}_2(\breve{\Gamma}_1(1+mP_0^{(2)}) + \Gamma^1 m N_6+$$

$$+\breve{F}_1)(1+\breve{L})T\rho + N_1 A_1^1 \breve{M}_1 T\rho + A^1\Lambda\Lambda_0^{-1}N_4|\chi_i(x,t,w_2)| + A^1\Lambda\Lambda_0^{-1}N_3(1+\breve{L})T\breve{\rho}+$$

$$+A^1 N_1\Lambda_0^{-1}|\lambda_i(0,\chi_i(x,t,w_2),w_2(0,\chi_i(x,t,w_2))) - \lambda_i(0,0,w_2(0,0))| \le$$

$$\le N_1\Lambda_0^{-1}\breve{M}_2(\breve{\Gamma}_1(1+mP_0^{(2)}) + \Gamma^1 m N_6 + \breve{F}_1)(1+\breve{L})T\rho + N_1 A_1^1\breve{M}_1 T\rho+$$

$$+A^1\Lambda\Lambda_0^{-1}N_4\breve{M}_2 T\rho + A^1\Lambda\Lambda_0^{-1}N_3(1+\breve{L})T\breve{\rho} + A^1 N_1\Lambda_0^{-1}(\Lambda_3+\Lambda_2 L)\breve{M}_2 T\rho \le$$

$$\le N_{48}(1+\breve{L})T\breve{\rho}, \tag{109}$$

де $N_{48} = N_1\Lambda_0^{-1}\breve{M}_2(\breve{\Gamma}_1(1+mP_0^{(2)}) + \Gamma^1 m N_6 + \breve{F}_1) + N_1 A_1^1\breve{M}_1 + A^1\Lambda\Lambda_0^{-1}(N_4\breve{M}_2 + N_3)+$ $+A^1 N_1\Lambda_0^{-1}\breve{\Lambda}_1\breve{M}_2$.

Згідно з лемою 3, отримаємо

$$|\Im_i^1[\breve{w}_1](x,t) - \Im_i^1[\breve{w}_2](x,t)| \le \int\limits_{\chi_i(x,t,w_2)}^{t} (N_1[(F_1^1 + F_2^1 L)|\varphi_i(\tau;x,t,w_1)-$$

$$-\varphi_i(\tau;x,t,w_2)| + F_2^1 e^{H\ell}\rho + P_0^1 \sum_{j=1}^{m}[(F_1^1 + F_2^1 L)|\varphi_i(\tau;x,t,w_1) - \varphi_i(\tau;x,t,w_2)|+$$

$$+F_2^1 e^{H\ell}\rho] + F^1 \sum_{j=1}^{m} |u_{1j}^1(\varphi_i(\tau;x,t,w_1),\tau) - u_{2j}^1(\varphi_i(\tau;x,t,w_2),\tau)| + Q\sum_{k=1}^{n}[(F_1^1+$$

$$+F_2^1 L)|\varphi_i(\tau;x,t,w_1) - \varphi_i(\tau;x,t,w_2)| + F_2^1 e^{H\ell}\rho]+$$

$$+F^1 \sum_{k=1}^{n} |v_{1k}^1(\varphi_i(\tau;x,t,w_1),\tau) - v_{2k}^1(\varphi_i(\tau;x,t,w_2),\tau)|\,] + F^1(1 + P_0^1 m + Qn)\times$$

$$\times|\varphi_i^1(\tau;x,t,\breve{w}_1)-\varphi_i^1(\tau;x,t,\breve{w}_2)|)d\tau+\int\limits_0^{\chi_i(x,t,w_2)} N_1F^1(1+P_0^1m+Qn)d\tau\le$$

$$\le\int\limits_{\chi_i(x,t,w_2)}^{t}(N_1[(\breve{F}_1(1+L)\breve{M}_1T\rho+F_2^1e^{H\ell})(1+P_0^1m+Qn)+F^1m(L^1\breve{M}_1T\rho+\rho)+$$
$$+F^1n((Q_1+Q_2L)\breve{M}_1T\rho+Q_2e^{H\ell}\rho)]+F^1(1+P_0^1m+Qn)N_3(1+\breve{L})T\breve{\rho})d\tau+$$
$$+N_1F^1(1+P_0^1m+Qn)\breve{M}_2T\rho\le N_{49}(1+\breve{L})T\breve{\rho}, \tag{110}$$

де $N_{49}=N_1[(1+P_0^1m+Qn)(\breve{F}_1\breve{M}_1T_0+F_2^1e^{H\ell})+F^1m(\breve{M}_1T_0+1)+$ $+F^1n(\breve{M}_1\breve{Q}_1T_0+e^{H\ell}Q_2)]+F^1(1+P_0^1m+Qn)N_3T_0+N_1F^1(1+P_0^1m+Qn)\breve{M}_2$.

Об'єднуючи результати (109) і (110), одержуємо, що при $(x,t)\in\Pi_i^\alpha(w_1)\cap\Pi_i^0(w_2)$ виконується

$$|\mathfrak{A}_i^1[\breve{w}_1](x,t)-\mathfrak{A}_i^1[\breve{w}_2](x,t)|\le N_{50}(1+\breve{L})T\breve{\rho}, \tag{111}$$

де $N_{50}=N_{48}+N_{49}$.

Об'єднуючи цей результат із (104), отримуємо (103) з $N_{51}=\max\{N^9,N_{50}\}$.

Наслідок 4. *Оскільки ми припускаємо, що завжди виконується нерівність $2\Lambda T<\ell$, то $\Pi_i^0(w_1)\cap\Pi_i^\ell(w_2)=\emptyset$. Тому в лемах 15, 17, 18 розглянуто всі можливі розташування точки $(x,t)\in\Pi(T)$. Отож, для $(x,t)\in\Pi(T)$ виконуються співвідношення*

$$|\mathfrak{A}_i[w_1](x,t)-\mathfrak{A}_i[w_2](x,t)|\le N^{10}(1+LT)\rho,$$
$$|\mathfrak{A}_i^1[\breve{w}_1](x,t)-\mathfrak{A}_i^1[\breve{w}_2](x,t)|\le N_{52}(1+\breve{L}T)\breve{\rho}, \tag{112}$$

де $N^{10}=N^8+(N^7+N^9)(T_0+1)$, $N_{52}=N_{47}+(N_{50}+N_{47})(T_0+1)$.

Лема 19. *Нехай $\breve{w}_1,\breve{w}_2\in\breve{\mathbb{E}}_2(T,\breve{L},P,P^1)$ і $(x,t)\in\Pi(T)$. Тоді правильна оцінка*

$$\|\breve{\mathfrak{B}}[\breve{w}_1](x,t)-\breve{\mathfrak{B}}[\breve{w}_2](x,t)\|\le N_{57}(1+\breve{L}T)\breve{\rho}+N_{58}H^{-1}\breve{\rho}. \tag{113}$$

Доведення. Враховуючи A16, маємо, що в $\Pi(T)$ виконується оцінка

$$\|\mathfrak{B}[w_1](x,t)-\mathfrak{B}[w_2](x,t)\|\le(Q\breve{M}_3T+2QRT+Q_2H^{-1})\rho=N^{11}T\rho+Q_2H^{-1}\rho, \tag{114}$$

де $N^{11}=Q\breve{M}_3+2QR$, $\breve{M}_3=R_2e^{(R_1+LR_2)T+H\ell}$.

Розглянемо стискуючі властивості оператора $\mathfrak{B}^1$. Нехай для визначеності $s_j(t;w_1)\le s_j(t;w_2)$.

Позначимо

$$|w_1(\xi,t)-w_2(\xi,t)|_{c_j}=\max\{|u_1(\xi,t)-u_2(\xi,t)|;\ \max_{k;c_k=c_j}|v_{1k}(\xi,t)-v_{2k}(\xi,t)|\},$$

$$|w_1^1(\xi,t)-w_2^1(\xi,t)|_{c_j}=\max\{|u_1^1(\xi,t)-u_2^1(\xi,t)|;\ \max_{k;c_k=c_j}|v_{1k}^1(\xi,t)-v_{2k}^1(\xi,t)|\}.$$

Зауважимо, що точки вигляду $(s_j(t;w_1),t)$ та $(s_j(t;w_2),t)$ належать множині D_j^c, тому для всіх k таких, що $c_k=c_j$, справджується нерівність $|v_{1k}(s_j(t;w_1),t)-$ $-v_{2k}(s_j(t;w_1),t)|\le\rho$.

1. Нехай $(x,t) \in D_j^c$, $c_j \neq 0$ і $c_j \neq \ell$ (випадки $c_j = 0$ або $c_j = \ell$ доводять аналогічно).

Нехай $s_j(t;w_1) \leq s_j(t;w_2) \leq x$. Згідно з умовою A13 матимемо

$$|\mathfrak{B}_j^1[\breve{w}_1](x,t) - \mathfrak{B}_j^1[\breve{w}_2](x,t)| \leq \int\limits_{s_j(t;w_1)}^{s_j(t;w_2)} Q^1(1 + P_0^1 m + Qn)d\xi + \int\limits_{s_j(t;w_2)}^{x} (Q_2^1 \times$$

$$\times \max\{|u_1(\xi,t) - u_2(\xi,t)|; \max_{k;c_k=c_j} |v_{1k}(\xi,t) - v_{2k}(\xi,t)|\} + P_0^{(2)} \sum_{i;c_i=c_j} Q_2^1 \times$$

$$\times \max\{|u_1(\xi,t) - u_2(\xi,t)|; \max_{k;c_k=c_j} |v_{1k}(\xi,t) - v_{2k}(\xi,t)|\} + Q^1 \sum_{i;c_i=c_j} |u_{1i}^{(2)}(\xi,t) -$$

$$-u_{2i}^{(2)}(\xi,t)| + P_0^1 \sum_{k;c_k=c_j} Q_2^1 \max\{|u_1(\xi,t) - u_2(\xi,t)|; \max_{z;c_z=c_j} |v_{1z}(\xi,t) -$$

$$-v_{2z}(\xi,t)|\} + Q^1 \sum_{k;c_k=c_j} |v_{1k}^{(2)}(\xi,t) - v_{2k}^{(2)}(\xi,t)|)d\xi + R(Q_1|s_j(t;w_1) - s_j(t;w_2)| +$$

$$+Q_2 \max\{|u_1(s_j(t;w_1),t) - u_2(s_j(t;w_2),t)|; \max_{k;c_k=c_j} |v_{1k}(s_j(t;w_1),t) -$$

$$-v_{2k}(s_j(t;w_2),t)|\}) + Q(R_1|s_j(t;w_1) - s_j(t;w_2)| + R_2 \max\{|u_1(s_j(t;w_1),t) -$$
$$-u_2(s_j(t;w_2),t)|; \max_{k;c_k=c_j} |v_{1k}(s_j(t;w_1),t) - v_{2k}(s_j(t;w_2),t)|\}) \leq$$

$$\leq Q^1(1 + P_0^{(2)} m + Qn)\breve{M}_3 T\rho + \int\limits_{c_j - RT}^{c_j + RT} [Q_2^1(1 + P_0^{(2)} m + P_0^1 n)|w_1(\xi,t) - w_2(\xi,t)|_{c_j} +$$

$$+Q^1 n|w_1^1(\xi,t) - w_2^1(\xi,t)|_{c_j} + Q^1 m(F_2|w_1(\xi,t) - w_2(\xi,t)|_{c_j} + P_0^1 \Lambda_2 |w_1(\xi,t) -$$

$$-w_2(\xi,t)|_{c_j} + \Lambda|u_{1i}^1(\xi,t) - u_{2i}^1(\xi,t)|\,)\,]d\xi + Q((R_1 + R_2 L)\breve{M}_3 T\rho + R_2 \times$$

$$\times|w_1(s_j(t;w_1),t) - w_2(s_j(t;w_1),t)|_{c_j}) + R((Q_1 + Q_2 L)\breve{M}_3 T\rho + Q_2 \times$$

$$\times|w_1(s_j(t;w_1),t) - w_2(s_j(t;w_1),t)|_{c_j}) \leq Q^1(1 + P_0^{(2)} m + P_0^1 n)\breve{M}_3 T\rho + 2[Q_2^1(1 +$$

$$+P_0^{(2)} m + P_0^1 n) + Q^1 n + Q^1 m(F_2 + P_0^1 \Lambda_2 + \Lambda)]RT\breve{\rho} + \breve{M}_3(Q\breve{R}_1 + R\breve{Q}_1)(1 + L)T\rho +$$

$$+(R_2 + Q_2)\rho \leq N_{53}(1 + \breve{L}T)\breve{\rho}, \tag{115}$$

де $N_{53} = Q^1(1 + P_0^{(2)} m + P_0^1 n)\breve{M}_3 T_0 + 2[Q_2^1(1 + P_0^{(2)} m + P_0^1 n) + Q^1 n + Q^1 m(F_2 + P_0^1 \Lambda_2 + \Lambda)]RT_0 + \breve{M}_3(Q\breve{R}_1 + R\breve{Q}_1)(T_0 + 1) + R_2 + Q_2$.

Нехай тепер $s_j(t;w_1) \leq x \leq s_j(t;w_2)$. Тоді одержимо

$$|\mathfrak{B}_j^1[\breve{w}_1](x,t) - \mathfrak{B}_j^1[\breve{w}_2](x,t)| \leq \int\limits_{s_j(t;w_1)}^{x} Q^1(1 + P_0^{(2)} m + P_0^1 n)d\xi + \int\limits_{x}^{s_j(t;w_2)} Q^1(1 +$$

$$+P_0^{(2)}m+P_0^1n)d\xi+|\mathfrak{Y}_{1j}^1[\breve{w}_1](x,t)-\mathfrak{Y}_{1j}^1[\breve{w}_2](x,t)|\le Q^1(1+P_0^{(2)}m+P_0^1n)\times$$

$$\times|s_j(t;w_1)-s_j(t;w_2)|+\breve{M}_3(Q\breve{R}_1+R\breve{Q}_1)(1+L)T\rho+(R_2+Q_2)\rho\le N_{54}(1+\breve{L}T)\breve{\rho},\quad(116)$$

де $N_{54}=Q^1\breve{M}_3(1+P_0^{(2)}m+P_0^1n)T_0+\breve{M}_3(Q\breve{R}_1+R\breve{Q}_1)(T_0+1)+R_2+Q_2$.

Нехай, нарешті, $x\le s_j(t;w_1)\le s_j(t;w_2)$. Тоді аналогічними міркуваннями, як і в першому випадку, матимемо

$$|\mathfrak{B}_j^1[\breve{w}_1](x,t)-\mathfrak{B}_j^1[\breve{w}_2](x,t)|\le N_{53}(1+\breve{L}T)\breve{\rho}.\quad(117)$$

Отож, отримали, що при $(x,t)\in D_j^c$ правильна оцінка

$$|\mathfrak{B}_j^1[\breve{w}_1](x,t)-\mathfrak{B}_j^1[\breve{w}_2](x,t)|\le N_{53}(1+\breve{L}T)\breve{\rho}.\quad(118)$$

2. Нехай тепер $(x,t)\in D_j^\ell$, $c_j\ne0$ і $c_j\ne\ell$ (випадки $(x,t)\in D_j^0$, а також $c_j=0$ або $c_j=\ell$ розглядаються аналогічно). На підставі оцінки (118) запишемо

$$|\mathfrak{B}_j^1[\breve{w}_1](x,t)-\mathfrak{B}_j^1[\breve{w}_2](x,t)|\le\int\limits_{s_j(t;w_1)}^{s_j(t;w_2)}Q^1(1+P_0^{(2)}m+P_0^1n)d\xi+\int\limits_{s_j(t;w_2)}^{c_j+RT}[Q_2^1(1+$$

$$+P_0^{(2)}m+P_0^1n)|w_1(\xi,t)-w_2(\xi,t)|_{c_j}+Q^1n|w_1^1(\xi,t)-w_2^1(\xi,t)|_{c_j}+Q^1m(F_2\times$$

$$\times|w_1(\xi,t)-w_2(\xi,t)|_{c_j}+P_0^1\Lambda_2|w_1(\xi,t)-w_2(\xi,t)|_{c_j}+\Lambda|u_{1i}^1(\xi,t)-u_{2i}^1(\xi,t)|\,)\,]d\xi+$$

$$+\breve{M}_3(Q\breve{R}_1+R\breve{Q}_1)(1+L)T\rho+(R_2+Q_2)\rho+\int\limits_{c_j+RT}^{x}([Q_2^1(1+P_0^{(2)}m+P_0^1n)+Q^1n+$$

$$+Q^1m(F_2+P_0^1\Lambda_2)]\max\{|\breve{u}_1(\xi,t)-\breve{u}_2(\xi,t)|;\max_{k;c_k=c_j}|\breve{v}_{1k}(\xi,t)-\breve{v}_{2k}(\xi,t)|\times$$

$$\times e^{-H(\xi-c_j-RT)}\}e^{H(\xi-c_j-RT)})d\xi\le N_{53}(1+\breve{L}T)\breve{\rho}+N_{55}\breve{\rho}\int\limits_{c_j+RT}^{x}e^{H(\xi-c_j-RT)}d\xi\le$$

$$\le N_{53}(1+\breve{L}T)\breve{\rho}+N_{55}\breve{\rho}H^{-1}(e^{H(x-c_j-RT)}-1)\le$$
$$\le(N_{53}(1+\breve{L}T)+N_{55}H^{-1}(e^{H(x-c_j-RT)}-1))\breve{\rho}.$$

Помноживши обидві частини одержаної нерівності на $e^{-H(x-c_j-RT)}$ і перейшовши до максимуму по D_j^ℓ, одержимо

$$\max_{D_j^\ell}\{|\mathfrak{B}_j^1[\breve{w}_1](x,t)-\mathfrak{B}_j^1[\breve{w}_2](x,t)|e^{-H(x-c_j-RT)}\}\le N_{53}(1+\breve{L}T)\breve{\rho}+N_{55}H^{-1}\breve{\rho},\quad(119)$$

де $N_{55}=Q_2^1(1+P_0^{(2)}m+P_0^1n)+Q^1n+Q^1m(F_2+P_0^1\Lambda_2+\Lambda)$.

Отож, в цілому прямокутнику $\Pi(T)$ правильна оцінка

$$\|\mathfrak{B}^1[\breve{w}_1](x,t)-\mathfrak{B}^1[\breve{w}_2](x,t)\|\le N_{56}(1+\breve{L}T)\breve{\rho}+N_{55}H^{-1}\breve{\rho},\quad(120)$$

де $N_{56} = N_{53}$, що і доводить лему з константами

$$N_{57} = \max\{N_{56}; N^{11}T_0\}; \quad N_{58} = \max\{N_{55}; Q_2\}. \tag{121}$$

Об'єднуючи отримані результати, робимо висновок про те, що при $(x,t) \in \Pi(T)$ виконуються нерівності

$$r \leq N^{10}(1+LT)\rho + N^{11}T\rho + Q_2 H^{-1}\rho, \qquad \breve{r} \leq N_{59}(1+\breve{L}T)\breve{\rho} + N_{58}H^{-1}\breve{\rho}, \tag{122}$$

де $N_{59} = \max\{N^{10}; N_{52}; N_{57}\}$.

Зрозуміло, що в загальному випадку оператор $\breve{\mathfrak{S}}$ не є стискуючим на кулі $\breve{\mathbb{E}}_2(T, \breve{L}, P, P^1)$. Розглянемо тепер стискуючі властивості оператора $\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}$.

Лема 20. *Нехай $\breve{w}_1, \breve{w}_2 \in \breve{\mathbb{E}}_2(T, \breve{L}, P, P^1)$. Тоді виконується нерівність*

$$\|\mathfrak{A}^1[\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}_1](x,t) - \mathfrak{A}^1[\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}_2](x,t)\| \leq N_{75}(1+\breve{L})^3 T\breve{\rho} + N_{74}H^{-1}\breve{\rho}. \tag{123}$$

Доведення. Передусім зауважимо, що з локального існування узагальненого неперервного розв'язку задачі (1)-(8) і формул (122), (79) випливає, що в $\Pi(T)$ справджуються нерівності

$$\varrho = \|\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_1](x,t) - \mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_2](x,t)\| \leq N^{12}(1+L)^2 T\rho + (N^{11}T + Q_2H^{-1})\rho,$$

$$\breve{\varrho} = \|\breve{\mathfrak{S}}[\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}_1](x,t) - \breve{\mathfrak{S}}[\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}_2](x,t)\| \leq N_{60}(1+\breve{L}T)^2\breve{\rho} + N_{58}^2 H^{-2}\breve{\rho}, \tag{124}$$

де $N^{12} = N^{13}N^{14} + N^{15}$;

$$N^{13} = (2A_1M_1 + \Gamma_1 M_2)e^{H\ell}\Lambda_2 + \breve{F}_1 M_1 e^{H\ell} T_0(\Lambda_2+1) + 2e^{H\ell}F_2 + FM_2e^{H\ell}\Lambda_2;$$

$$N^{14} = \Gamma_2 + \Gamma_2 M_2 e^{H\ell}\Lambda_2 T_0 + N^{11}T_0 + Q_2H^{-1} + \kappa_3 + \breve{F}_1 T_0^2 M_1 e^{H\ell}\Lambda_2 + e^{H\ell}F_2T_0 + FM_2e^{H\ell}\Lambda_2T_0;$$

$$N^{15} = (\Gamma_1 M_2 e^{H\ell}\Lambda_2 + \Gamma_2 M_5 M_2 e^{H\ell}\Lambda_2 + \breve{F}_1 M_1 e^{H\ell}\Lambda_2 T_0 + e^{H\ell}F_2 +$$

$$+FM_2e^{H\ell}\Lambda_2 + \Gamma_2 M_2 e^{H\ell}\Lambda_2)N^{14} + \Gamma_2(A_1M_1e^{H\ell}\Lambda_2 + \breve{F}_1 M_1 e^{H\ell}T_0 + e^{H\ell}F_2);$$

$$N_{60} = N_{59}[N_{59} + N_{58}H^{-1}] + N_{58}N_{59}H^{-1}.$$

Оцінки (122), (124) при $(x,t) \in \Pi(T)$ дають змогу записати нерівність

$$\|\mathfrak{S}\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_1](x,t) - \mathfrak{S}\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_2](x,t)\| \leq N^{12}(1+L^{\mathfrak{S}})^2 Tr + (N^{11}T + Q_2H^{-1})r \leq$$

$$\leq N^{16}(1+L)^3 T\rho + (N^{10}Q_2H^{-1} + Q_2^2H^{-2})\rho, \tag{125}$$

де $N^{16} = N^{12}(1+\breve{M}_{10})^2[N^{10}(1+T_0) + N^{11}T_0 + Q_2H^{-1}] + N^{10}N^{11} + N^{10}(N^{11}T_0 + Q_2H^{-1}) + T_0(N^{11})^2 + 2N^{11}Q_2H^{-1}$; $\breve{M}_{10} = \max\{M_{10}; \frac{B_1+RQ+\ell Q_3}{1-Q_2\ell}\}$.

Нехай тепер $(x,t) \in \Pi_i^\alpha(\mathfrak{S}\mathfrak{S}w_1) \cap \Pi_i^\alpha(\mathfrak{S}\mathfrak{S}w_2)$. Тоді з леми 15 випливає, що

$$\|\breve{\mathfrak{A}}[\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}_1](x,t) - \breve{\mathfrak{A}}[\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}_2](x,t)\| \leq N_{42}(1+\breve{L}^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}})T\breve{\varrho} \leq N_{61}(1+\breve{L})^3 T\breve{\rho}, \tag{126}$$

де $N_{61} = N_{42}(1+N_{26})(N_{60}(1+T_0)^2 + N_{58}^2H^{-2})$.

Нехай тепер $(x,t) \in \Pi_i^{\alpha}(\mathfrak{S}\mathfrak{S}w_1) \cap \Pi_i^0(\mathfrak{S}\mathfrak{S}w_2)$ (випадки $(x,t) \in \Pi_i^0(\mathfrak{S}\mathfrak{S}w_1) \cap \Pi_i^{\alpha}(\mathfrak{S}\mathfrak{S}w_2)$, $(x,t) \in \Pi_i^{\alpha}(\mathfrak{S}\mathfrak{S}w_1) \cap \Pi_i^{\ell}(\mathfrak{S}\mathfrak{S}w_2)$, $(x,t) \in \Pi_i^{\ell}(\mathfrak{S}\mathfrak{S}w_1) \cap \Pi_i^{\alpha}(\mathfrak{S}\mathfrak{S}w_2)$ розглядають аналогічно). На підставі леми 18 отримаємо, що

$$\|\breve{\mathfrak{A}}[\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}_1](x,t) - \breve{\mathfrak{A}}[\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}_2](x,t)\| \le N_{51}(1 + \breve{L}^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}})T\breve{\varrho} \le N_{62}(1+\breve{L})^3 T\breve{\rho}, \tag{127}$$

де $N_{62} = N_{51}(1+N_{26})(N_{60}(1+T_0)^2 + N_{58}^2 H^{-2})$.

Нехай $(x,t) \in \Pi_i^0(\mathfrak{S}\mathfrak{S}w_1) \cap \Pi_i^0(\mathfrak{S}\mathfrak{S}w_2)$ (аналогічно розглядають випадок $(x,t) \in \Pi_i^{\ell}(\mathfrak{S}\mathfrak{S}w_1) \cap \Pi_i^{\ell}(\mathfrak{S}\mathfrak{S}w_2)$). Це означає, що $i \in I_+^0$, а отже, точки вигляду $(0,t)$ для $j \bar{\in} I_+^0$ належать множині $\Pi_j^{\alpha}(\mathfrak{S}w_1) \cap \Pi_j^{\alpha}(\mathfrak{S}w_2)$ (оскільки $\Pi_j^0(\mathfrak{S}w_1) \cap \Pi_j^{\ell}(\mathfrak{S}w_2) = \emptyset$). Тому на підставі леми 15 для $j \bar{\in} I_+^0$ виконується нерівність

$$|\breve{\mathfrak{A}}_j[\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}_1](0,t) - \breve{\mathfrak{A}}_j[\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}_2](0,t)| \le N_{63}(1+\breve{L})^2 T\breve{\rho}, \tag{128}$$

де $N_{63} = N_{42}(1+N_{25})(N_{60}(1+T_0)^2 + N_{58}^2 H^{-2})$.

Звідси випливає, що для $j \bar{\in} I_+^0$, з урахуванням оцінок (84), (124), матимемо

$$\begin{gathered} |\mathfrak{A}_j^{(2)}[\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}_1](0,t_1) - \mathfrak{A}_j^{(2)}[\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}_2](0,t_2)| \le |\mathfrak{A}_j^{(2)}[\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}_1](0,t_1) - \mathfrak{A}_j^{(2)}[\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}_1](0,t_2)| + \\ + |\mathfrak{A}_j^{(2)}[\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}_1](0,t_2) - \mathfrak{A}_j^{(2)}[\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}_2](0,t_2)| \le N_{29}(1+\breve{L}T)|t_1-t_2| + F_2 e^{H\ell} \times \\ \times \|\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_1](0,t_2) - \mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_2](0,t_2)\| + P_0^1 \Lambda_2 e^{H\ell} \|\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_1](0,t_2) - \mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_2](0,t_2)\| + \\ + \Lambda |\mathfrak{A}_j^1[\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}_1](0,t_2) - \mathfrak{A}_j^1[\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}_2](0,t_2)| \le N_{29}(1+\breve{L}T)|t_1-t_2| + e^{H\ell}(F_2 + P_0^1\Lambda_2) \times \\ \times (N^{12}(1+L)^2 T\rho + (N^{11}T + Q_2H^{-1})\rho) + \Lambda N_{63}(1+\breve{L})^2 T\breve{\rho} \le \\ \le N_{29}(1+\breve{L}T)|t_1-t_2| + N_{64}(1+\breve{L})^2 T\breve{\rho} + N_{65}H^{-1}\breve{\rho}, \end{gathered} \tag{129}$$

де $N_{64} = \Lambda N_{63} + e^{H\ell}(F_2 + P_0^1\Lambda_2)(N^{12} + N^{11})$; $N_{65} = e^{H\ell}(F_2 + P_0^1\Lambda_2)Q_2$.

Леми 3, 4 та оцінки (124) гарантують, що

$$\begin{gathered} |\chi_i^1(x,t,\breve{\mathfrak{S}}[\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}_1]) - \chi_i^1(x,t,\breve{\mathfrak{S}}[\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}_2])| \le \Lambda_0^{-1}|\varphi_i^1(\chi_i(x,t,\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_1]);x,t,\breve{\mathfrak{S}}[\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}_1]) - \\ - \varphi_i^1(\chi_i(x,t,\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_2]);x,t,\breve{\mathfrak{S}}[\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}_2])| + N_1\Lambda_0^{-2}(\Lambda_3|\chi_i(x,t,\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_1]) - \\ - \chi_i(x,t,\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_2])| + \Lambda_2|\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_1](0,\chi_i(x,t,\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_1])) - \\ - \mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_2](0,\chi_i(x,t,\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_2]))|\,) \le \Lambda_0^{-1}(N_3(1+\breve{L}^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}})T\breve{\varrho} + N_4|\chi_i(x,t,\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_1]) - \\ - \chi_i(x,t,\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_2])|\,) + N_1\Lambda_0^{-2}(\Lambda_3\breve{M}_2T\varrho + \Lambda_2 L^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}}\breve{M}_2T\varrho + \Lambda_2 e^{H\ell}\,[N^{12}(1+L)^2T\rho + \\ + (N^{11}T + Q_2H^{-1})\rho\,]\,) \le \Lambda_0^{-1}N_3(1+N_{26}(1+\breve{L}))T(N_{60}(1+\breve{L}T)^2\breve{\rho} + N_{58}^2H^{-2}\breve{\rho}) + \\ + \Lambda_0^{-1}N_4\breve{M}_2T(N^{12}(1+L)^2T\rho + (N^{11}T + Q_2H^{-1})\rho) + N_1\Lambda_0^{-2}(\Lambda_3\breve{M}_2 + \breve{M}_2\Lambda_2N^5 \times \\ \times (1+LT))T(N^{12}(1+L)^2T\rho + (N^{11}T + Q_2H^{-1})\rho) + N_1\Lambda_0^{-2}\Lambda_2e^{H\ell}(N^{12} \times \\ \times (1+L)^2T\rho + (N^{11}T + Q_2H^{-1})\rho) \le N_{66}(1+\breve{L})^3T\breve{\rho} + N_{67}H^{-1}\rho, \end{gathered} \tag{130}$$

де $N_{67} = e^{H\ell}N_1\Lambda_0^{-2}\Lambda_2Q_2$;
$N_{66} = \Lambda_0^{-1}N_3(1+N_{26})(N_{60}(1+T_0)^2 + N_{58}^2H^{-2}) + e^{H\ell}N_1\Lambda_0^{-2}\Lambda_2(N^{12}+N^{11}) + ((N^{12} + N^{11})T_0 + Q_2H^{-1})(\Lambda_0^{-1}N_4\breve{M}_2 + N_1\Lambda_0^{-2}(\Lambda_3\breve{M}_2 + \breve{M}_2\Lambda_2N^5(1+T_0)))$.

Звідси матимемо

$$|\mathfrak{R}_i^1[\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}_1](x,t)-\mathfrak{R}_i^1[\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}_2](x,t)|\le N_1\Lambda_0^{-1}[(\Gamma_1^1+\Gamma_2^1L^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}})|\chi_i(x,t,\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_1])-$$
$$-\chi_i(x,t,\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_2])|+\Gamma_2^1e^{H\ell}\varrho+P_0^{(2)}\sum_{j\bar{\in}I_+^0}[(\Gamma_1^1+\Gamma_2^1L^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}})|\chi_i(x,t,\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_1])-$$
$$-\chi_i(x,t,\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_2])|+\Gamma_2^1e^{H\ell}\varrho]+\Gamma^1\sum_{j\bar{\in}I_+^0}|\mathfrak{A}_j^{(2)}[\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}_1](0,\chi_i(x,t,\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_1]))-$$
$$-\mathfrak{A}_j^{(2)}[\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}_2](0,\chi_i(x,t,\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_2]))|\,]+\Gamma^1(1+P_0^{(2)}m)|\chi_i^1(x,t,\breve{\mathfrak{S}}[\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}_1])-$$
$$-\chi_i^1(x,t,\breve{\mathfrak{S}}[\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}_2])|\le N_1\Lambda_0^{-1}[(\Gamma_1^1+\Gamma_2^1L^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}})\breve{M}_2T(N^{12}(1+L)^2T\rho+(N^{11}T+$$
$$+Q_2H^{-1})\rho)(1+P_0^{(2)}m)+(1+P_0^{(2)}m)\Gamma_2^1e^{H\ell}(N^{12}(1+L)^2T\rho+(N^{11}T+$$
$$+Q_2H^{-1})\rho)+\Gamma^1m[N_{29}(1+\breve{L}T)\breve{M}_2T(N^{12}(1+L)^2T\rho+(N^{11}T+Q_2H^{-1})\rho)+$$
$$+N_{64}(1+\breve{L})^2T\breve{\rho}+N_{65}H^{-1}\breve{\rho}]\,]+\Gamma^1(1+P_0^{(2)}m)(N_{66}(1+\breve{L})^3T\rho+N_{67}H^{-1}\rho)\le$$
$$\le N_{68}(1+\breve{L})^3T\breve{\rho}+N_{69}H^{-1}\rho, \qquad (131)$$

де $N_{69}=N_1\Lambda_0^{-1}((1+P_0^{(2)}m)\Gamma_2^1e^{H\ell}Q_2+\Gamma^1mN_{65})+\Gamma^1(1+P_0^{(2)}m)N_{67}$; $N_{68}= =N_1\Lambda_0^{-1}[\breve{\Gamma}_1(1+N^5(1+T_0))\breve{M}_2(T_0(N^{12}+N^{11})+Q_2H^{-1})(1+P_0^{(2)}m)+(1+P_0^{(2)}m)(N^{12}+ +N^{11})+\Gamma^1m(N_{29}(1+T_0)\breve{M}_2(N^{12}T_0+N^{11}T_0+Q_2H^{-1})+N_{64}T_0)]+\Gamma^1(1+P_0^{(2)}m)N_{66}$.

Далі отримаємо

$$|\mathfrak{Y}_i^1[\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}_1](x,t)-\mathfrak{Y}_i^1[\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}_2](x,t)|\le N_1\Lambda_0^{-1}[F_3|\chi_i(x,t,\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_1])-$$
$$-\chi_i(x,t,\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_2])|+F_2L^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}}|\chi_i(x,t,\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_1])-\chi_i(x,t,\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_2])|+F_2e^{H\ell}\varrho]+$$
$$+F|\chi_i^1(x,t,\breve{\mathfrak{S}}[\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}_1])-\chi_i^1(x,t,\breve{\mathfrak{S}}[\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}_2])|\le N_1\Lambda_0^{-1}[(F_3+F_2N^5(1+LT))\breve{M}_2T\times$$
$$\times(N^{12}(1+L)^2T\rho+(N^{11}T+Q_2H^{-1})\rho)+F_2e^{H\ell}(N^{12}(1+L)^2T\rho+(N^{11}T+$$
$$+Q_2H^{-1})\rho)\,]+F(N_{66}(1+\breve{L})^3T\breve{\rho}+N_{67}H^{-1}\rho)\le N_{70}(1+\breve{L})^3T\breve{\rho}+N_{71}H^{-1}\rho, \qquad (132)$$

де $N_{71}=N_1\Lambda_0^{-1}F_2e^{H\ell}Q_2+FN_{67}$; $N_{70}=N_1\Lambda_0^{-1}[\breve{F}_1(1+N^5(1+T_0))\breve{M}_2(T_0(N^{12}+N^{11})+ +Q_2H^{-1})+F_2e^{H\ell}(N^{12}+N^{11})]+FN_{66}$.
Нарешті, нехай для визначеності $\chi_i(x,t,\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_1])\le\chi_i(x,t,\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_2])$. Тоді

$$|\mathfrak{I}_i^1[\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}_1](x,t)-\mathfrak{I}_i^1[\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}_2](x,t)|\le\int\limits_{\chi_i(x,t,\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_2])}^{t}(N_1[(F_1^1+F_2^1L^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}})\times$$
$$\times|\varphi_i(\tau;x,t,\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_1])-\varphi_i(\tau;x,t,\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_2])|+F_2^1e^{H\ell}\varrho+P_0^1\sum_{j=1}^{m}((F_1^1+F_2^1L^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}})\times$$
$$\times|\varphi_i(\tau;x,t,\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_1])-\varphi_i(\tau;x,t,\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_2])|+F_2^1e^{H\ell}\varrho)+$$

$$+F^1\sum_{j=1}^{m}|\mathfrak{A}_j^1[\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}_1](\varphi_i(\tau;x,t,\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_1]),\tau)-\mathfrak{A}_j^1[\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}_2](\varphi_i(\tau;x,t,\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_2]),\tau)|+$$

$$+Q\sum_{k=1}^{n}((F_1^1+F_2^1L^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}})|\varphi_i(\tau;x,t,\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_1])-\varphi_i(\tau;x,t,\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_2])|+F_2^1e^{H\ell}\varrho)+$$

$$+F^1\sum_{k=1}^{n}|q_k(\varphi_i(\tau;x,t,\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_1]),\tau,\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_1](\varphi_i(\tau;x,t,\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_1]),\tau))-$$

$$-q_k(\varphi_i(\tau;x,t,\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_2]),\tau,\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_2](\varphi_i(\tau;x,t,\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_2]),\tau))|\,]+F^1(1+P_0^1m+$$

$$+Qn)|\varphi_i^1(\tau;x,t,\breve{\mathfrak{S}}[\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}_1])-\varphi_i^1(\tau;x,t,\breve{\mathfrak{S}}[\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}_2])|\,)d\tau+\int\limits_{\chi_i(x,t,\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_1])}^{\chi_i(x,t,\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_2])}N_1F^1(1+$$

$$+P_0^1m+Qn)d\tau\le\int\limits_{\chi_i(x,t,\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_2])}^{t}[N_1(1+P_0^1m+Qn)\breve{F}_1(1+L^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}})\breve{M}_1T\varrho+$$

$$+N_1F_2^1e^{H\ell}(1+P_0^1m+Qn)\varrho+N_1F^1m(\breve{L}^{\mathfrak{S}}\breve{M}_1T\varrho+e^{H\ell}\breve{\varrho})+$$

$$+F^1n((Q_1+Q_2L^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}})\breve{M}_1T\varrho+Q_2e^{H\ell}\varrho)N_1+F^1(1+P_0^1m+Qn)N_3(1+\breve{L})T\breve{\varrho}]d\tau+$$

$$+N_1F^1(1+P_0^1m+Qn)\breve{M}_2T\varrho\le N_{72}(1+\breve{L})^3T\breve{\rho},\tag{133}$$

де $N_{72}=T_0N_1(1+P_0^1m+Qn)\breve{F}_1(1+N^5(1+T_0))\breve{M}_1(T_0(N^{12}+N^{11})+Q_2H^{-1})+$ $+N_1F_2^1e^{H\ell}(1+P_0^1m+Qn)(T_0(N^{12}+N^{11})+Q_2H^{-1})+N_1F^1m(N_{25}\breve{M}_1T_0(T_0(N^{12}+N^{11})+$ $+Q_2H^{-1})+e^{H\ell}(N_{60}(1+T_0)^2+N_{58}^2H^{-2}))+N_1F^1n(\breve{Q}_1(1+N^5(1+T_0))\breve{M}_1T_0(T_0(N^{12}+$ $+N^{11})+Q_2H^{-1})+Q_2e^{H\ell}(T_0(N^{12}+N^{11})+Q_2H^{-1}))+T_0F^1(1+P_0^1m+Qn)N_1(N_{60}(1+$ $+T_0)^2+N_{58}^2H^{-2})+N_1F^1(1+P_0^1m+Qn)M_2(T_0(N^{12}+N^{11})+Q_2H^{-1})$.

Об'єднуючи результати (131), (132), (133), одержимо, що при $(x,t)\in\Pi_i^0(\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_1])\cap$ $\cap\Pi_i^0(\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_2])$ (або $(x,t)\in\Pi_i^\ell(\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_1])\cap\Pi_i^\ell(\mathfrak{S}[\mathfrak{S}w_2])$) виконується нерівність

$$\|\mathfrak{A}^1[\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}_1](x,t)-\mathfrak{A}^1[\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}_2](x,t)\|\le N_{73}(1+\breve{L})^3T\breve{\rho}+N_{74}H^{-1}\breve{\rho},\tag{134}$$

де $N_{73}=N_{68}+N_{70}+N_{72}$; $N_{74}=N_{69}+N_{71}$.

Отож, із (126), (127) та (134) отримуємо потрібне твердження (123) з константою $N_{75}=\max\{N_{61};N_{62};N_{73}\}$.

Зауважимо, що на підставі формул (115), (116), (119) оцінку (120) можна переписати у вигляді

$$\|\mathfrak{A}^1[\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}_1](x,t)-\mathfrak{A}^1[\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}_2](x,t)\|\le N_{76}(1+\breve{L})T\breve{\rho}+N_{77}\rho+N_{55}H^{-1}\breve{\rho},\tag{135}$$

де $N_{76}=Q^1(1+P_0^{(2)}m+P_0^1n)\breve{M}_3+2[Q_2^1(1+P_0^{(2)}m+P_0^1n)+Q^1n+Q^1m(F_2+P_0^1\Lambda_2+$ $+\Lambda)]R+\breve{M}_3(Q\breve{R}_1+R\breve{Q}_1)$; $N_{77}=R_2+Q_2$.

Тоді, використовуючи (135) і (124), одержимо

$$\|\mathfrak{B}^1[\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}_1](x,t)-\mathfrak{B}^1[\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}_2](x,t)\|\le N_{76}(1+\breve{L}^{\mathfrak{S}\mathfrak{S}})T\breve{\varrho}+N_{77}\varrho+N_{55}H^{-1}\breve{\varrho}\le$$

$$\leq N_{78}(1+\breve{L})^3(T+H^{-1})\breve{\rho}, \tag{136}$$

де $N_{78} = \max\{N_{76}(1+N_{26}); N_{55}\}(N_{60}(1+T_0)^2+N_{58}^2H^{-2})+N_{77}\max\{Q_2;(N^{12}+N^{11})\}$.

Основна лема. Для досить малого $T>0$ і досить великих $\breve{L}>0$ та $H>0$ оператор $\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}$ на кулі $\breve{\mathbb{E}}_2(T,\breve{L},P,P^1)$ задовольняє умови принципу стискуючих відображень і його нерухома точка $\breve{w}=(\breve{u},\breve{v})$ є неперервним розв'язком задачі (24)-(27), а функція $w(x,t)=(u(x,t),v(x,t))$ є неперервно диференційовною за двома змінними і, крім того, задовольняє систему (1)-(2) в класичному значенні.
Доведення. З формул (123), (125), (136) випливає, що в прямокутнику $\Pi(T)$ виконується нерівність

$$\|\breve{\mathfrak{S}}[\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}_1](x,t)-\breve{\mathfrak{S}}[\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}\breve{w}_2](x,t)\|\leq N_{79}(1+\breve{L})^3(T+H^{-1})\breve{\rho}, \tag{137}$$

де $N_{79}=\max\{(N_{75}+N_{74});(N^{16}+Q_2(N^{10}+Q_2H^{-1}));N_{78}\}$.

Звідси матимемо, що при досить малому $T>0$ і досить великих $\breve{L}>0$ та $H>0$ оператор $\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}\breve{\mathfrak{S}}$ на кулі $\breve{\mathbb{E}}_2(T,\breve{L},P,P^1)$ задовольняє умови принципу стискуючих відображень, тому має єдину нерухому точку, яка є також єдиною нерухомою точкою оператора $\breve{\mathfrak{S}}$, тобто для цієї функції буде виконуватися рівність $\breve{w}=\breve{\mathfrak{S}}[\breve{w}]$. Тому для довільного елемента $\breve{w}_{(0)}\in\breve{\mathbb{E}}_2(T,\breve{L},P,P^1)$ підпослідовності $w_{(3n)}$ і $\breve{w}_{(3n)}$ (де $w_{(n)}=\mathfrak{S}[w_{(n-1)}]$, $\breve{w}^1_{(n)}=\mathfrak{S}^1[w^1_{(n-1)}]$) збігаються рівномірно зі швидкістю геометричної прогресії до функцій w і w^1 відповідно.

Візьмемо замість $\breve{w}_{(0)}\in\breve{\mathbb{E}}_2(T,\breve{L},P,P^1)$ початкові умови для функцій $\breve{u}$ та умови на невідомій лінії s_j для функцій $\breve{v}$. Тоді за побудовою
$(u_{(0)})'_x(x,t)=u^1_{(0)}(x,t)$ і $(v_{(0)})'_t(x,t)=v^{(2)}_{(0)}(x,t)$, а отже, $n=1,2,\dots$ за побудовою виконується $(u_{(3n)})'_x(x,t)=u^1_{(3n)}(x,t)$ і $(v_{(3n)})'_t(x,t)=v^{(2)}_{(3n)}(x,t)$. Аналогічні міркування залишаються правильними, якщо замість $\breve{w}_{(0)}$ взяти $u_{(0)}=\mathfrak{S}[\alpha]$, $u^1_{(0)}=\mathfrak{S}^1[\breve{\alpha}]$, $v_{(0)}=\mathfrak{S}[\beta]$, $v^{(2)}_{(0)}=\mathfrak{S}^1[\breve{\beta}]$ або якщо $u_{(0)}=\mathfrak{S}[\mathfrak{S}\alpha]$, $u^1_{(0)}=\mathfrak{S}^1[\breve{\mathfrak{S}}\breve{\alpha}]$, $v_{(0)}=\mathfrak{S}[\mathfrak{S}\beta]$, $v^{(2)}_{(0)}=\mathfrak{S}^1[\breve{\mathfrak{S}}\breve{\beta}]$.

Отже, послідовність функцій $w_{(n)}$, як і підпослідовність $w^1_{(n)}$, рівномірно збігаються в $\Pi(T)$. Тому гранична функція $u(x,t)$ буде неперервно диференційовною за x, а гранична функція $v(x,t)$ буде неперервно диференційовною за t, причому $u_x(x,t)=u^1(x,t)$, $v_t(x,t)=v^{(2)}(x,t)$. Лема доведена.

Отож, звідси випливає неперервна диференційовність функції $w(x,t)$ за x, t, що й завершує доведення теореми.

---

1. *Кирилич В.М.* Обобщенная непрерывная разрешимость задачи с неизвестными границами для сингулярных гиперболических систем квазилинейных уравнений / *Кирилич В.М., Филимонов А.М.* // Математичні студії – 2008. – Т. 30, №1. – С. 20-39.
2. *Li Ta-tsien.* Global classical solutions for quasilinear hyperbolic systems / *Li Ta-tsien.* – Paris: Masson, 1994. – 278 p.
3. *Turo J.* Mixed problems for quasilinear hyperbolic systems / *Turo J.* // Nonlinear Analysis, Theory, Methods, Applications. – 1997. – Vol. 30, №4. – P. 2329-2340.

4. *Казаков К.Ю.* Об определении неизвестной линии разрыва решения смешанной задачи для квазилинейной гиперболической системы / *Казаков К.Ю., Морозов С.Ф.* // Укр. матем. журн. – 1985. – Т. 37, №4. – С. 443-450.

LOCAL DIFFERENTIABLE SOLVABILITY OF THE FREE BOUNDARY PROBLEM FOR SINGULAR HYPERBOLIC SYSTEMS OF QUASILINEAR EQUATIONS

Volodymyr KYRYLYCH[1], **Andrij FILIMONOV**[2]

[1] *Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka str., 1*
[2] *Moscow State University of Railway Engineering,
27994, Russia, Moscow, Obraztsova str., 15*

Applying method of characteristics and principle of contraction mapping, classical local correct solvability of the free boundary problem for singular quasilinear hyperbolic systems of the first order was proved.

Key words: hyperbolic systems, quasilinear equations, Stefan problem.

Стаття надійшла до редколегії 11.07.2008

Прийнята до друку 22.10.2008