ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ — VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат. 2008. Вип. 68. С. 86-96 — Ser.Mech-Math. 2008. Vol. 68. P. 86-96

УДК 517.956

УЗАГАЛЬНЕНІ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ І НЕЙМАНА ДЛЯ РІВНЯННЯ ЛАПЛАСА В ОБЛАСТІ ЗІ ЩІЛИНОЮ

Богдан ЖОВНЕР, Мар'яна КОЛЕСНІЧЕНКО, Галина ЛОПУШАНСЬКА

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1*

Визначено однозначну розв'язність задач Діріхле і Неймана для рівняння Лапласа в області з "розрізом", коли на межі задано узагальнені функції.

Ключові слова: рівняння Лапласа, узагальнена функція, узагальнені крайові значення, система інтегральних рівнянь.

1. Лінійні еліптичні крайові задачі в обмеженій області або в області ззовні обмеженої замкненої гладкої поверхні при заданих на її (компактній) межі узагальнених функціях досить детально вивчені (див. [1-3] та бібліогр.). Доведено теореми існування та єдиності розв'язку, визначено його зображення за допомогою вектор-функції Гріна чи узагальнених потенціалів.

Водночас навіть при гладких даних крайові задачі в областях з некомпактною межею мало вивчені.

Мета нашої праці – поширювати результати [4-7] на випадок області зі щілиною, а саме – доведенню розв'язності крайової задачі при заданих узагальнених функціях на розімкненій поверхні в одному з формулювань та визначенню характеру росту розв'язку біля цієї поверхні. Дослідження поведінки регулярних всередині області розв'язків лінійних однорідних еліптичних рівнянь біля замкненої гладкої межі області, на якій задано узагальнені функції, виконували у працях [6], [8] та інших (див. бібліогр. у [3]). Тут одержано подібний результат для області зі щілиною.

2. Основні позначення та формулювання задач. Нехай $S \subset \mathbb{R}^3$ – обмежена гладка поверхня, S_0 – її гладка межа, S_+ – верхня частина поверхні S, а S_- – її нижня частина, $\Omega = \mathbb{R}^3 \backslash \overline{S}$ – область ззовні S (іншими словами, простір з розрізом вздовж S).

Використовуємо функційні простори $D(S_+) = C^\infty(S_+)$, $D(S_-) = C^\infty(S_-)$.

Через $D'(S_\pm)$ позначимо простір лінійних неперервних функціоналів на просторі $D(S_\pm)$ гладких функцій (простір узагальнених функцій [9],[10]), через (φ, F) – значення узагальненої функції $F \in D'(S_\pm)$ на основній функції $\varphi \in D(S_\pm)$. Зауважимо, що узагальнені функції із $D'(S_\pm)$ мають компактні носії на $S_\pm$ (теорема 1.1 із [11]) та скінчені порядки сингулярностей.

Введемо позначення $S_{\pm\varepsilon} = \{x_{\pm\varepsilon} \in \mathbb{R}^3 : x_{\pm\varepsilon} = x \pm \varepsilon\nu(x),\ x \in S_\pm\}$, де $\nu(x)$ – орт нормалі до S_+, направленої в Ω, $S_{0,\varepsilon}$ – трубчата поверхня, що з'єднує $S_{+\varepsilon}$ та $S_{-\varepsilon}$, $S_\varepsilon = S_{+\varepsilon} \bigcup S_{-\varepsilon} \bigcup S_{0,\varepsilon}$, тобто S_ε – "ε-оболонка" множини S.

Для довільних $\varphi \in D(S_\pm)$ визначимо функції $\varphi(x_{\pm\varepsilon}) = \varphi(x)$ при $x_{\pm\varepsilon} = x \pm \varepsilon\nu(x)$, $x \in S_\pm$, через $\varphi(x_\varepsilon)$ при $x_\varepsilon \in S_{0,\varepsilon}$ позначаємо довільне гладке продовження функцій $\varphi(x_\varepsilon)$ та $\varphi(x_{-\varepsilon})$ на $S_{0,\varepsilon}$. Так для довільних $\varphi \in D(S_\pm)$ визначено функції $\varphi \in D(S_\varepsilon)$.

Формулювання задачі D (узагальненої задачі Діріхле).

Нехай $F_+ \in D'(S_+)$, $F_- \in D'(S_-)$. Знайти гармонічну функцію $u(x)$ в області Ω, яка задовольняє умови:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{S_{+\varepsilon}} \varphi(x_{+\varepsilon})u(x_{+\varepsilon})dS = (\varphi, F_+) \quad \forall\varphi \in D(S_+), \tag{1}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{S_{-\varepsilon}} \varphi(x_{-\varepsilon})u(x_{-\varepsilon})dS = (\varphi, F_-), \quad \forall\varphi \in D(S_-), \tag{2}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{S_{0\varepsilon}} \varphi(x)u(x)dS = 0 \quad \forall\varphi \in D(S_+) \cup D(S_-), \tag{3}$$

тобто

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{S_\varepsilon} \varphi(x)u(x)dS = (\varphi, F) \quad \forall\varphi \in D(S_+) \cup D(S_-),$$

де $F = F_+$ на S_+, $F = F_-$ на S_-, $F = 0$ на S_0.

Формулювання задачі N (узагальненої задачі Неймана).

Нехай $B_\pm \in \mathrm{D}'(\mathrm{S}_\pm)$ – задані узагальнені функції на $D(S_\pm)$. Знайти гармонічну функцію $u(x)$ в області Ω, нормальна похідна якої на S_+ та S_- набуває узагальнених крайових значень відповідно B_+ та B_-, а саме

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{S_{+\varepsilon}} \frac{\partial u(x_{+\varepsilon})}{\partial\nu}\, \varphi_+(x_{+\varepsilon})dS_{+\varepsilon} = (\varphi, B_+) \qquad \forall\,\varphi \in \mathrm{D}(\mathrm{S}_+), \tag{4}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{S_{-\varepsilon}} \frac{\partial u(x_{-\varepsilon})}{\partial\nu}\, \varphi_-(x_{-\varepsilon})dS_{-\varepsilon} = (\varphi, B_-) \qquad \forall\,\varphi \in \mathrm{D}(\mathrm{S}_-) \tag{5}$$

та

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{S_{0\varepsilon}} \varphi(x)\frac{\partial u(x)}{\partial\nu}dS = 0 \quad \forall\varphi \in D(S_+) \cup D(S_-), \tag{6}$$

тобто

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{S_\varepsilon} \varphi(x)\frac{\partial u(x)}{\partial\nu}dS = (\varphi, B) \quad \forall\varphi \in D(S_+) \cup D(S_-),$$

де $B = B_+$ на S_+, $B = B_-$ на S_-, $B = 0$ на S_0.

3. Розв'язок узагальненої задачі Діріхле. Нехай $\omega(x,y) = -\dfrac{1}{4\pi|x-y|}$ фундаментальна функція оператора Лапласа.

Розв'язок задачі D шукатимемо у вигляді

$$u(x) = \left(\frac{\partial\omega(x,y_+)}{\partial\nu_y}, R_+(y_+)\right) + \left(\frac{\partial\omega(x,y_-)}{\partial\nu_y}, R_-(y_-)\right), \qquad x \in \Omega, \tag{7}$$

де R_+, R_- – невідомі узагальнені функції відповідно з $D'(S_+)$, $D'(S_-)$.

Покажемо, що функція (7) при певних узагальнених функціях $R_\pm \in D'(S_\pm)$ є розв'язком узагальненої задачі Діріхле для рівняння Лапласа.

Оскільки R_+ та R_- – лінійні і неперервні функціонали відповідно на $D(S_+)$ і $D(S_-)$, то, використовуючи властивості узагальнених функцій, залежних від параметрів, для $x \in \Omega$ матимемо

$$\triangle u(x) = (\triangle_x \frac{\partial\omega(x,y_+)}{\partial\nu_y}, R_+(y_+)) + (\triangle_x \frac{\partial\omega(x,y_-)}{\partial\nu_y}, R_-(y_-)) = 0, \;\; x \in \Omega.$$

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = (\lim_{|x|\to\infty} \frac{\partial\omega(x,y_+)}{\partial\nu_y}, R_+(y_+)) + (\lim_{|x|\to\infty} \frac{\partial\omega(x,y_-)}{\partial\nu_y}, R_-(y_-)) = 0.$$

Отже, u – гармонічна в Ω.

Враховуючи інтегровність функції $\varphi(y_\varepsilon)\frac{\partial}{\partial\nu_y}\omega(x,y_\varepsilon)$ на $S_{0,\varepsilon}$ і те, що елемент трубчатої поверхні буде величиною порядку ε при $\varepsilon \to 0$, отримаємо

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{S_{0,\varepsilon}} \varphi(y_\varepsilon)\frac{\partial}{\partial\nu_y}\omega(x,y_\varepsilon) dS_{y_\varepsilon} = 0, \quad x \in \Omega, \tag{8}$$

звідки

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{S_{0\varepsilon}} \varphi(x)u(x)dS = (\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{S_{0,\varepsilon}} \varphi(y_\varepsilon)\frac{\partial}{\partial\nu_y}\omega(x,y_\varepsilon) dS_{y_\varepsilon}, R_+(y_+)) +$$

$$+(\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{S_{0,\varepsilon}} \varphi(y_\varepsilon)\frac{\partial}{\partial\nu_y}\omega(x,y_\varepsilon) dS_{y_\varepsilon}, R_-(y_-)) = 0 \quad \forall\varphi \in D(S_+) \cup D(S_-),$$

а отже, функція (7) задовольняє умову (3).

За допомогою формул крайових значень на двосторонній поверхні S для нормальної похідної потенціалу простого шару (див. [12]) та леми 1.5 із [3] одержуємо

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{S_{+\varepsilon}} \varphi_+(x_{+\varepsilon})u(x_{+\varepsilon})dS = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{S_{+\varepsilon}} \varphi_+(x_{+\varepsilon}) \left(\frac{\partial\omega(x_{+\varepsilon},y_+)}{\partial\nu_y}, R_+(y_+)\right) +$$

$$+\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{S_{+\varepsilon}} \varphi_+(x_{+\varepsilon}) \left(\frac{\partial\omega(x_{+\varepsilon},y_-)}{\partial\nu_y}, R_-(y_-)\right) dS =$$

$$= (\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{S_{+\varepsilon}} \varphi_+(x_{+\varepsilon})\frac{\partial\omega(x_{+\varepsilon},y_+)}{\partial\nu_y} dS, R_+(y_+)) + (\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{S_{+\varepsilon}} \varphi_+(x_{+\varepsilon})\frac{\partial\omega(x_{+\varepsilon},y_-)}{\partial\nu_y} dS, R_-(y_-)) =$$

$$= (-\frac{1}{2}\varphi_+(y_+) + \int\limits_{S_+} \varphi_+(x)\frac{\partial\omega(x,y_+)}{\partial\nu_y} dS, R_+(y_+)) + (\int\limits_{S_+} \varphi_-(x)\frac{\partial\omega(x,y_-)}{\partial\nu_y} dS, R_-(y_-)) =$$

$$= (\varphi_+(y_+), F_+(y_+)), \quad \varphi_+ \in D(S_+).$$

Аналогічно

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S_{-\varepsilon}} \varphi_-(x_{-\varepsilon})u(x_{-\varepsilon})dS = (\int\limits_{S_-} \varphi_-(x)\frac{\partial\omega(x,y_+)}{\partial\nu_y}dS, R_+(y_+))+$$

$$+(\frac{1}{2}\varphi_-(y_-) + \int\limits_{S_-} \varphi_-(x)\frac{\partial\omega(x,y_-)}{\partial\nu_y}dS, R_-(y_-)) = (\varphi_-(y_-), F_-(y_-)), \quad \varphi_- \in D(S_-).$$

Додавши ці рівності, отримаємо

$$\left(-\frac{1}{2}\varphi_+(y_+) + \int\limits_{S_+} \varphi_+(x)\frac{\partial\omega(x,y_+)}{\partial\nu_y}dS + \int\limits_{S_-} \varphi_-(x)\frac{\partial\omega(x,y_+)}{\partial\nu_y}dS, R_+(y_+)\right) +$$

$$+\left(\frac{1}{2}\varphi_-(y_-) + \int\limits_{S_-} \varphi_-(x)\frac{\partial\omega(x,y_-)}{\partial\nu_y}dS + \int\limits_{S_+} \varphi_+(x)\frac{\partial\omega(x,y_-)}{\partial\nu_y}dS, R_-(y_-)\right) =$$

$$= (\varphi_+(y_+), F_+(y_+)) + (\varphi_-(y_-), F_-(y_-)).$$

Це рівносильно умові

$$(g_+(y_+), R_+(y_+)) + (g_-(y_-), R_-(y_-)) = (\varphi_{g+}(y_+), F_+(y_+)) + (\varphi_{g-}(y_-), F_-(y_-)), \tag{9}$$

де $g_+ \in D(S_+)$, $g_- \in D(S_-)$, а $(\varphi_{g+}, \varphi_{g-})$ – розв'язок системи інтегральних рівнянь

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\varphi_+(y_+) + \int\limits_{S_+} \varphi_+(x)\frac{\partial\omega(x,y_+)}{\partial\nu_y}dS + \int\limits_{S_-} \varphi_-(x)\frac{\partial\omega(x,y_+)}{\partial\nu_y}dS = g_+(y_+), \\ \frac{1}{2}\varphi_-(y_-) + \int\limits_{S_-} \varphi_-(x)\frac{\partial\omega(x,y_-)}{\partial\nu_y}dS + \int\limits_{S_+} \varphi_+(x)\frac{\partial\omega(x,y_-)}{\partial\nu_y}dS = g_-(y_-). \end{cases} \tag{10}$$

Отже, ми отримали систему інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду таку саму, до якої зводиться задача Неймана при неперервних даних $g_\pm$ на $S_\pm$, якщо її розв'язок шукати у вигляді $\int\limits_{S_+} g_+(y)\omega(x,y)dS + \int\limits_{S_-} g_-(y)\omega(x,y)dS$, $x \in \Omega$, і яка досліджена в [12]. Згідно з [12] при довільних $g_\pm \in C(S_\pm)$ система (10) має єдиний розв'язок $\varphi_{g\pm} \in C(S_\pm)$.

Для доведення розв'язності задачі D при $F_\pm \in D'(S_\pm)$ треба ще довести, що при $g_\pm \in D(S_\pm)$ розв'язок $(\varphi_{g+}, \varphi_{g-})$ системи інтегральних рівнянь (10) є нескінчено диференційовним, а саме $\varphi_{g\pm} \in D(S_\pm)$. Це випливає з леми.

Лема 1. *Оператори* $(K_0^\pm\varphi)(x) = \int\limits_{S_\pm} \varphi(y_\pm)\omega(x,y_\pm)dS_\pm$, $(K_1^\pm\varphi)(x) = \int\limits_{S_\pm} \varphi(y_\pm)\frac{\partial}{\partial\nu_x}\omega(x,y_\pm)dS_\pm$, $(K_2^\pm\varphi)(x) = \int\limits_{S_\pm} \varphi(y_\pm)\frac{\partial}{\partial\nu_y}\omega(x,y_\pm)dS$ *діють у* $D(S_\pm)$.

Доведення. Покриємо поверхню S системою околів $\cup_{j=1}^{M} U_j$ та розглянемо в кожному такому крайовому координатному околі U_j області Ω функції

$$v_{0_\pm}(x) = (K_0^\pm \varphi)(x) = \int\limits_{S_\pm} \varphi(y)\omega(x,y)dS, \ \ \varphi \in D(S_\pm), \ x \in U_j$$

у розпрямляючих координатах $x = \xi$, де $\xi' = (\xi_1, \xi_2)$ лежать у дотичній площині довільно взятої точки $x_0 \in S_\pm$, ξ_3 на нормалі $\nu(x_0)$ (або її продовженні), σ^j – проекція $S_\pm \cap U_j$ на дотичну площину $\xi_1 O \xi_2$, $S_\pm \cap U_j$ задана рівнянням $\xi_3 = G^j(\xi_1, \xi_2)$, $(\xi_1, \xi_2) \in \sigma^j$, $G^j \in C^\infty(\sigma^j)$.

Використовуємо позначення

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^k = D^k = \frac{\partial^{k_1+k_3+k_3}}{\partial \xi_1^{k_1} \xi_2^{k_2} \xi_3^{k_3}}, \ \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^{k'} = D^{k'} = \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial \xi_1^{k_1} \xi_2^{k_2}}, \ |k'| = k_1 + k_2, \ |k| = |k'| + k_3.$$

Тепер при $i = 1, 2$ знайдемо $\frac{\partial}{\partial \xi_i} \int\limits_{S_\pm \cap U_j} \varphi(y)\omega(\xi, y)dS_y =$

$$-\int\limits_{\sigma^j} \varphi(y', G^j(y')) \frac{\partial}{\partial y_i} \omega(\xi, y', G^j(y')) \sqrt{1 + (G^j_{y_1}(y'))^2 + (G^j_{y_2}(y'))^2} dy' =$$

$$= -\int\limits_{\sigma^j} \frac{\partial}{\partial y_i} [\varphi(y', G^j(y')) \sqrt{1 + (G^j_{y_1}(y'))^2 + (G^j_{y_2}(y'))^2} \omega(\xi, y', G^j(y'))] \, dy' +$$

$$+ \int\limits_{\sigma^j} \frac{\partial}{\partial y_i} [\varphi(y', G^j(y')) \sqrt{1 + (G^j_{y_1}(y'))^2 + (G^j_{y_2}(y'))^2}] \omega(\xi, y', G^j(y')) \, dy'.$$

Використовуючи формулу Гріна та метод математичної індукції, доводимо, що для довільного мультиіндексу β'

$$D_\xi^{\beta'} \int\limits_{S_\pm} \varphi(y)\omega(\xi, y)dS_y = \tag{11}$$

$$= \int\limits_{S_\pm} H_{\beta'} \left(y, \frac{\partial}{\partial y'}\right) \varphi(y)\omega(\xi, y)dS_y + \int\limits_{S_0} H_{0\beta'} \left(y, \frac{\partial}{\partial y'}\right) \varphi(y)\omega(\xi, y)dS_0,$$

де $H_{\beta'}(y, \frac{\partial}{\partial y'})$, $H_{0\beta'}(y, \frac{\partial}{\partial y'})$ – лінійні диференціальні вирази відповідно порядків $|\beta'|$, $|\beta'| - 1$, "дотичний"диференціальний вираз $H_{\beta'}(y, \frac{\partial}{\partial y'}) = ((-1)^{|\beta'|} D^{\beta'})^*$ називається спряженим до $(-1)^{|\beta'|} D^{\beta'}$ на $S_\pm \cap U_j$. З наведеного бачимо, що

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)^* \varphi(y) = \frac{\partial}{\partial y_i} [\varphi(y', G^j(y')) \sqrt{1 + (G^j_{y_1}(y'))^2 + (G^j_{y_2}(y'))^2} \quad].$$

Якщо $x \in \Omega \setminus S$ і лежить на нормалі до S у точці $x_0 \in S$, то для довільного мультиіндексу k

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k v_{0_\pm}(x) = \int\limits_{S_\pm} \varphi(y)(-\frac{\partial}{\partial y})^k \omega(x, y)dS.$$

Оскільки $\left(-\frac{\partial}{\partial y}\right)^k = \sum\limits_{q=0}^{|k|} \widetilde{h}_{kq}\left(y, \frac{\partial}{\partial y'}\right)\left(\frac{\partial}{\partial \nu_y}\right)^q$, де $\widetilde{h}_{kq}$ – "дотичні" диференціальні вирази порядків $|k|-q$,

$$(\frac{\partial}{\partial \nu_y})^q \omega(x,y) = \widetilde{M}_{1q}\left(y, \frac{\partial}{\partial y'}\right)\frac{\partial}{\partial \nu_x}\omega(x,y) + \widetilde{M}_{2q}\left(y, \frac{\partial}{\partial y'}\right)\omega(x,y),$$

де $\widetilde{M}_{1q}\left(y, \frac{\partial}{\partial y'}\right)$, $\widetilde{M}_{2q}\left(y, \frac{\partial}{\partial y'}\right)$ – "дотичні" диференціальні вирази порядків $q-1$ та q відповідно, то в результаті одержимо

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k v_{0\pm}(x) = \int\limits_{S_\pm} \varphi(y)[M_{1k}(y, \tfrac{\partial}{\partial y'})\tfrac{\partial}{\partial \nu_y}\omega(x,y) + M_{2k}(y, \tfrac{\partial}{\partial y'})\omega(x,y)]dS.$$

Тут $M_{1k}\left(y, \frac{\partial}{\partial y'}\right)$, $M_{2k}\left(y, \frac{\partial}{\partial y'}\right)$ – "дотичні" диференціальні вирази порядків $|k|-1$ та $|k|$ відповідно. За формулою (11)

$$(\frac{\partial}{\partial x})^k v_{0\pm}(x) = \int\limits_{S_\pm} M^*_{1k}(y, \frac{\partial}{\partial y'})\varphi(y)\cdot\frac{\partial}{\partial \nu_x}\omega(x,y)dS_y +$$

$$+\int\limits_{S_\pm} M^*_{2k}(y, \frac{\partial}{\partial y'})\varphi(y)\cdot\omega(x,y)dS_y + \int\limits_{S_0} H_{0k}\left(y, \frac{\partial}{\partial y'}\right)\varphi(y)\omega(x,y)dS.$$

За властивостями поверхневих потенціалів подвійного і простого шарів

$$\lim_{x\to x_0\in S_\pm}\int\limits_{S_\pm}(M^*_{1k}\varphi)(y)\tfrac{\partial}{\partial \nu_x}\omega(x,y)dS_y = \int\limits_{S_\pm}(M^*_{1k}\varphi)(y)\cdot\tfrac{\partial}{\partial \nu_x}\omega(x_0,y)dS_y \pm \tfrac{1}{2}(M^*_{1k}\varphi)(x_0),$$

$$\lim_{x\to x_0\in S_\pm}\int\limits_{S_\pm}(M^*_{2k}\varphi)(y)\omega(x,y)dS_y = \int\limits_{S_\pm}(M^*_{2k}\varphi)(y)\omega(x_0,y)dS_y,$$

звідки $\lim\limits_{x\to x_0\in S_\pm}(\frac{\partial}{\partial x})^k v_{0\pm}(x)$ – неперервна функція на $S_\pm$ для довільного мультиіндексу k. Отже, $v_{0\pm} \in D(S_\pm)$.

Так само доводимо, що $K_i^\pm\varphi \in D(S_\pm)$ при $\varphi \in D(S_\pm)$, $i=1,2$.

Шукаючи розв'язок системи інтегральних рівнянь методом послідовних наближень та враховуючи, що ітерації ядра цієї системи мають слабшу особливість, ніж саме ядро, на підставі леми 1 одержуємо $\varphi_{n\pm} \in D(S_\pm)$ при $g_\pm \in D(S_\pm)$ для довільного наближення $\varphi_{n\pm}$ розв'язку системи (10), а отже, $\varphi_{g\pm}(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\varphi_{n\pm}(x) \in D(S_\pm)$. З леми 1 та наведеного вище випливає правильність теореми.

Теорема 1. *Нехай $F_\pm \in D'(S_\pm)$, узагальнені функції $R_\pm \in D'(S_\pm)$ визначаються співвідношенням (9), де $(\varphi_{g_+}, \varphi_{g_-})$– розв'язок системи (10). Тоді функція (7) є розв'язком задачі D.*

Зауваження 1. Теорема 1 стверджує існування розв'язку узагальненої задачі Діріхле у такому формулюванні: при заданих $F_+ \in D'(S_+)$, $F_- \in D'(S_-)$ знайти гармонічну функцію $u(x)$ в області Ω, яка задовольняє умови (1) та (2). Умова (3) у формулюванні задачі D забезпечує єдиність її розв'язку.

Теорема 2. *Розв'язок задачі D єдиний.*

Доведення. Якщо u_1, u_2 – розв'язки задачі D, то функція $u = u_1 - u_2$ гармонічна в Ω та

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S_\varepsilon}\varphi(x)u(x)dS = 0 \quad \forall\varphi\in D(S_+)\cup D(S_-). \tag{12}$$

Нехай Ω_ε – підобласть $\widetilde{\Omega}$, розміщена ззовні S_ε. Для гармонічної в області Ω_ε функції $u(x)$ правильне зображення

$$u(z) = \int\limits_{S_\varepsilon}\mu_\varepsilon(y_\varepsilon)\frac{\partial}{\partial\nu_y}\omega(z,y_\varepsilon)dS + \frac{C_\varepsilon}{|z-x_0|}, \quad z\in\Omega, \tag{13}$$

де x_0 – довільна точка на S, μ_ε –розв'язок інтегрального рівняння

$$\frac{1}{2}\mu_\varepsilon(y_\varepsilon) + \int\limits_{S_\varepsilon}\mu_\varepsilon(x_\varepsilon)\frac{\partial}{\partial\nu_{x_\varepsilon}}\omega(x_\varepsilon,y_\varepsilon)dS = u(y_\varepsilon) - \frac{C_\varepsilon}{|y_\varepsilon - x_0|},$$

$C_\varepsilon = \int\limits_{S_\varepsilon} u\mu_\varepsilon^* dS$, μ_ε^* – розв'язок відповідного спряженого однорідного інтегрального рівняння такий, що $\int\limits_{S_\varepsilon}\frac{\mu_\varepsilon^*(y)}{|y-x_0|}dS = 1$.

Запишемо розв'язок μ_ε (визначений однозначно з точністю до довільної адитивної сталої C) за допомогою резольвенти $\Gamma(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ ядра $\frac{\partial}{\partial\nu_{x_\varepsilon}}\omega(x_\varepsilon,y_\varepsilon)$

$\mu_\varepsilon(y_\varepsilon) = u_\varepsilon(y_\varepsilon) + \int\limits_{S_\varepsilon} u_\varepsilon(x_\varepsilon)\Gamma(x_\varepsilon,y_\varepsilon)dS_{x_\varepsilon} + C$, де $u_\varepsilon(y_\varepsilon) = u(y_\varepsilon) - \frac{C_\varepsilon}{|y_\varepsilon - x_0|}$,

і підставимо одержаний вираз у (13). Матимемо

$$u(z) = \int\limits_{S_\varepsilon}[u_\varepsilon(y_\varepsilon) + \int\limits_{S_\varepsilon}u_\varepsilon(x_\varepsilon)\Gamma(x_\varepsilon,y_\varepsilon)dS_{x_\varepsilon}]\frac{\partial}{\partial\nu_{y_\varepsilon}}\omega(z,y_\varepsilon)dS_{y_\varepsilon} +$$

$$+C\int\limits_{S_\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\nu_{y_\varepsilon}}\omega(z,y_\varepsilon)dS_{y_\varepsilon} + \frac{C_\varepsilon}{|z-x_0|} =$$

$$= \int\limits_{S_\varepsilon}u_\varepsilon(x_\varepsilon)\frac{\partial}{\partial\nu_{x_\varepsilon}}\omega(z,x_\varepsilon)dS_{x_\varepsilon} + \int\limits_{S_\varepsilon}u_\varepsilon(x_\varepsilon)(\int\limits_{S_\varepsilon}\Gamma(x_\varepsilon,y_\varepsilon)\frac{\partial}{\partial\nu_{y_\varepsilon}}\omega(z,y_\varepsilon)dS_{y_\varepsilon})dS_{x_\varepsilon} + \frac{C_\varepsilon}{|z-x_0|} =$$

$$= \int\limits_{S_\varepsilon}u_\varepsilon(x_\varepsilon)[\frac{\partial}{\partial\nu_{x_\varepsilon}}\omega(z,x_\varepsilon) + \int\limits_{S_\varepsilon}\Gamma(x_\varepsilon,y_\varepsilon)\frac{\partial}{\partial\nu_{y_\varepsilon}}\omega(z,y_\varepsilon)dS_{y_\varepsilon}]dS_{x_\varepsilon} + \frac{C_\varepsilon}{|z-x_0|} =$$

$$= \int\limits_{S_\varepsilon}u(x_\varepsilon)\Phi_\varepsilon(x_\varepsilon,z)dS - C_\varepsilon\int\limits_{S_\varepsilon}\frac{1}{|x_\varepsilon - x_0|}\Phi_\varepsilon(x_\varepsilon,z)dS + \frac{C_\varepsilon}{|z-x_0|}, \quad z\in\Omega,$$

де $\quad \Phi_\varepsilon(x_\varepsilon,z) = \frac{\partial}{\partial\nu_{x_\varepsilon}}\omega(z,x_\varepsilon) + \int\limits_{S_\varepsilon}\Gamma(x_\varepsilon,y_\varepsilon)\frac{\partial}{\partial\nu_{y_\varepsilon}}\omega(z,y_\varepsilon)dS_{y_\varepsilon}, z\in\Omega.$ Маємо

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\Phi_\varepsilon(x_\varepsilon,z) = \frac{\partial}{\partial\nu_x}\omega(z,x_\varepsilon) + \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S_+}\Gamma(x_\varepsilon, y+\varepsilon\nu(y))\frac{\partial}{\partial\nu_y}\omega(z, y+\varepsilon\nu(y))W_{+\varepsilon}(y)dS+$
$+\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S_-}\Gamma(x_\varepsilon, y-\varepsilon\nu(y))\frac{\partial}{\partial\nu_y}\omega(z,y-\varepsilon\nu(y))W_{-\varepsilon}(y)dS$ $(\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S_{0,\varepsilon}}\Gamma(x_\varepsilon,y_\varepsilon)\frac{\partial}{\partial\nu_y}\omega(z,y_\varepsilon)dS_{y_\varepsilon} = 0$ згідно з (8)). Тут $W_{\pm\varepsilon}(y)$ – якобіан перетворення $y_\varepsilon = y\pm\varepsilon\nu(y),\ y\in S$, $W_{\pm\varepsilon}(y)\to 1$ при $\varepsilon\to 0$.

За властивостями функцій Γ та ω для довільного $z\in\Omega$ існує

$$\Phi(x_\pm, z) = \lim_{\varepsilon\to 0}\Phi_\varepsilon(x_\varepsilon,z), z\in\Omega,\ \Phi(\cdot,z)\in D(S_\pm).$$

Згідно з (12) існує
$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S_{\pm\varepsilon}}\Phi(x_\varepsilon,z)u(x_\varepsilon)dS = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S_\pm}\Phi(x,z)u(x\pm\varepsilon\nu(x))W_\varepsilon(x)dS = 0$. Тоді за лемою із [10] на с. 70 також існує

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S_{\pm\varepsilon}}\lim_{\varepsilon\to 0}\Phi(x_\varepsilon,z)u(x_\varepsilon)dS = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S_\pm}\Phi(x,z)u(x\pm\varepsilon\nu(x))W_\varepsilon(x)dS = 0.$$

З тих самих міркувань за умови (3) існує
$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}C_\varepsilon = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S_\varepsilon}u\mu^*_\varepsilon dS = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S_+}u(x+\varepsilon\nu(x))\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mu^*_\varepsilon(x+\varepsilon\nu(x))W_{+\varepsilon}(x)dS+$
$+\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S_-}u(x-\varepsilon\nu(x))\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mu^*_\varepsilon(x-\varepsilon\nu(x))W_{-\varepsilon}(x)dS = 0.$

Отже,
$u(z) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}[\int\limits_{S_+}\Phi(x,z)u(x+\varepsilon\nu(x))W_{+\varepsilon}(x)dS + \int\limits_{S_-}\Phi(x,z)u(x-\varepsilon\nu(x))W_{-\varepsilon}(x)dS] = 0,$
$z\in\Omega$, тобто $u_1(z) = u_2(z),\ \ z\in\Omega$. Єдиність розв'язку доведена.

4. Характер поведінки розв'язку біля межі області. Дослідимо швидкість росту розв'язку при наближенні до поверхні S.

Нехай $\rho(x)$ – додатна нескінченно диференційована та фінітна в Ω функція, яка має порядок функцій $d_\pm(x) = dist(x,S_\pm)$ при $d_\pm(x)\to 0$, $x\in\Omega$, $\rho(x) = 0$ при $x\in\overline{S}$.

Теорема 3. *Якщо $F_+\in D^{'}(S_+)$ та $F_-\in D^{'}(S_-)$ - узагальнені функції, які мають порядки сингулярностей відповідно $s(F_+)\leqslant p_+$, $s(F_-)\leqslant p_-$, $p = \max\{p_+,p_-\}$, $u(x)$ – розв'язок задачі D, то існує таке число $k > -1+p$, що*

$$\int\limits_\Omega \rho^k(x)|u(x)|dx < \infty. \tag{14}$$

Доведення. За теоремою про структуру узагальненої функції [7, c.92] існують такі додатні сталі $C_\pm$, що

$$|(\varphi,F_\pm)| \leqslant C_\pm\sum_{|\alpha|\leqslant p_\pm}\sup_{y\in S}|D^\alpha\varphi(y)|\ \ \forall\,\varphi\in D(S_\pm).$$

Використовуючи зображення розв'язку задачі, матимемо
$\int\limits_\Omega\rho^k(x)u(x)dx = \int\limits_\Omega\rho^k(x)\left(\frac{\partial\omega(x,y_+)}{\partial\nu_y}, R_+(y_+)\right) + \left(\frac{\partial\omega(x,y_-)}{\partial\nu_y}, R_-(y_-)\right)dx =$
$= \left(\int\limits_\Omega\rho^k(x)\frac{\partial\omega(x,y_+)}{\partial\nu_y}dx, R_+(y_+)\right) + \left(\int\limits_\Omega\rho^k(x)\frac{\partial\omega(x,y_+)}{\partial\nu_y}dx, R_-(y_-)\right) = (\varphi_+,F_+)+(\varphi_-,F_-),$

де (φ_+, φ_-) – розв'язок системи інтегральних рівнянь (10) при
$g_\pm(y_\pm) = \int\limits_\Omega \rho^k(x) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \omega(x, y_\pm) dx$. За схемою доведення леми 1 можна показати, що $g_\pm \in D(S_\pm)$.

Записуємо зображення розв'язку $(\varphi_{g_+}, \varphi_{g_-})$ через резольвенту її ядра та оцінюємо похідні інтегралів вигляду
$\int\limits_{S_\pm} (\int\limits_\Omega \rho^k(x) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \omega(x, z_\pm) dx) \Gamma_\pm(z_\pm, y) dS = \int\limits_\Omega \rho^k(x) (\int\limits_{S_\pm} \frac{\partial}{\partial \nu_y} \omega(x, z_\pm) \Gamma_\pm(z_\pm, y) dS) dx$,
де $\Gamma_\pm(x_\pm, y)$ – функції порядку компонент цієї резольвенти при $|x_\pm - y| \to 0$.

Оскільки $|D_y^\alpha \int\limits_{S_\pm} \frac{\partial}{\partial \nu_y} \omega(x, z_\pm) \Gamma_\pm(z_\pm, y) dS| \le C|x - y|^{-2-|\alpha|}$ при $|x - y| \le 1$, то при $k - 2 - |\alpha| > -3$, тобто $k > -1 + |\alpha|$ для всіх $|\alpha| \le p$, виконується (14).

5. Розв'язок узагальненої задачі Неймана. Розв'язок задачі N шукаємо у вигляді

$$u(x) = (\omega(x, y_+), R_+(y_+)) + (\omega(x, y_-), R_-(y_-)), \qquad x \in \Omega, \tag{15}$$

де R_+, R_- – невідомі узагальнені функції відповідно з $D'(S_+)$, $D'(S_-)$.

Функція u – гармонічна в Ω. Застосувавши формули крайових значень на поверхні S "зсередини" і "ззовні" для нормальної похідної потенціалу простого шару, подібно до випадку задачі D після підставляння функції (15) в крайові умови задачі отримуємо

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{S_{+\varepsilon}} \varphi_+(x_{+\varepsilon}) \frac{\partial}{\partial \nu_x} u(x_{+\varepsilon}) dS = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{S_{+\varepsilon}} \varphi_+(x_{+\varepsilon}) \left(\frac{\partial \omega(x_{+\varepsilon}, y_+)}{\partial \nu_x}, R_+(y_+) \right) +$$

$$+ \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{S_{+\varepsilon}} \varphi_+(x_{+\varepsilon}) \left(\frac{\partial \omega(x_{+\varepsilon}, y_-)}{\partial \nu_x}, R_-(y_-) \right) dS =$$

$$= (\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{S_{+\varepsilon}} \varphi_+(x_{+\varepsilon}) \frac{\partial \omega(x_{+\varepsilon}, y_+)}{\partial \nu_x} dS, R_+(y_+)) + (\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{S_{+\varepsilon}} \varphi_+(x_{+\varepsilon}) \frac{\partial \omega(x_{+\varepsilon}, y_-)}{\partial \nu_x} dS, R_-(y_-)) =$$

$$= (\frac{1}{2} \varphi_+(y_+) + \int\limits_{S_+} \varphi_+(x) \frac{\partial \omega(x, y_+)}{\partial \nu_x} dS, R_+(y_+)) + (\int\limits_{S_+} \varphi_-(x) \frac{\partial \omega(x, y_-)}{\partial \nu_x} dS, R_-(y_-)) =$$

$$= (\varphi_+(y_+), F_+(y_+)), \ \ \varphi_+ \in D(S_+).$$

Аналогічно

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{S_{-\varepsilon}} \varphi_-(x_{-\varepsilon}) \frac{\partial}{\partial \nu_x} u(x_{-\varepsilon}) dS = (\int\limits_{S_-} \varphi_-(x) \frac{\partial \omega(x, y_+)}{\partial \nu_x} dS, R_+(y_+)) +$$

$$+ (-\frac{1}{2} \varphi_-(y_-) + \int\limits_{S_-} \varphi_-(x) \frac{\partial \omega(x, y_-)}{\partial \nu_x} dS, R_-(y_-)) = (\varphi_-(y_-), F_-(y_-)), \ \ \varphi_- \in D(S_-).$$

Додавши ці рівності, матимемо

$$\left(\frac{1}{2} \varphi_+(y_+) + \int\limits_{S_+} \varphi_+(x) \frac{\partial \omega(x, y_+)}{\partial \nu_x} dS + \int\limits_{S_-} \varphi_-(x) \frac{\partial \omega(x, y_+)}{\partial \nu_x} dS, R_+(y_+) \right) -$$

$$-\left(-\frac{1}{2}\varphi_-(y_-)+\int\limits_{S_-}\varphi_-(x)\frac{\partial\omega(x,y_-)}{\partial\nu_x}dS+\int\limits_{S_+}\varphi_+(x)\frac{\partial\omega(x,y_-)}{\partial\nu_x}dS, R_-(y_-)\right)=$$
$$=(\varphi_+(y_+),F_+(y_+))+(\varphi_-(y_-),F_-(y_-)),$$

тобто

$$\left(\frac{1}{2}\varphi_+(y_+)+\int\limits_{S_+}\varphi_+(x)\frac{\partial\omega(x,y_+)}{\partial\nu_x}dS+\int\limits_{S_-}\varphi_-(x)\frac{\partial\omega(x,y_+)}{\partial\nu_x}dS, R_+(y_+)\right)+$$
$$+\left(-\frac{1}{2}\varphi_-(y_-)+\int\limits_{S_-}\varphi_-(x)\frac{\partial\omega(x,y_-)}{\partial\nu_x}dS+\int\limits_{S_+}\varphi_+(x)\frac{\partial\omega(x,y_-)}{\partial\nu_x}dS, R_-(y_-)\right)=$$
$$=(\varphi_+(y_+),B_+(y_+))+(\varphi_-(y_-),B_-(y_-)).$$

Далі, як при доведенні теорем 1, 2, одержуємо правильність таких результатів.

Теорема 4. *Нехай* $B_\pm\in D'(S_\pm)$, *узагальнені функції* $R_\pm\in D'(S_\pm)$ *визначаються співвідношенням*

$$(g_+(y_+),R_+(y_+))+(g_-(y_-),R_-(y_-))=(\varphi_{g+}(y_+),F_+(y_+))+(\varphi_{g-}(y_-),F_-(y_-)),\quad(16)$$

де $g_+\in D(S_+)$, $g_-\in D(S_-)$, *а* $(\varphi_{g+},\varphi_{g-})$ *– розв'язок системи інтегральних рівнянь*

$$\begin{cases}\frac{1}{2}\varphi_+(y_+)+\int\limits_{S_+}\varphi_+(x)\frac{\partial\omega(x,y_+)}{\partial\nu_x}dS+\int\limits_{S_-}\varphi_-(x)\frac{\partial\omega(x,y_+)}{\partial\nu_x}dS=g_+(y_+),\\ -\frac{1}{2}\varphi_-(y_-)+\int\limits_{S_-}\varphi_-(x)\frac{\partial\omega(x,y_-)}{\partial\nu_x}dS+\int\limits_{S_+}\varphi_+(x)\frac{\partial\omega(x,y_-)}{\partial\nu_x}dS=g_-(y_-).\end{cases}\quad(17)$$

Тоді функція (15) є єдиним розв'язком задачі N.

Зауважимо, що система інтегральних рівнянь (17) є такою самою, до якої зводиться задача Діріхле при неперервних даних $g_\pm$ на $S_\pm$, якщо її розв'язок шукати у вигляді $\int_{S_+}g_+(y)\omega(x,y)\frac{\partial\omega(x,y_-)}{\partial\nu_y}dS+\int_{S_-}g_-(y)\frac{\partial\omega(x,y_-)}{\partial\nu_y}\omega(x,y)dS$, $x\in\Omega$, і яка досліджена в [12]. Згідно з [12] та лемою 1 при довільних $g_\pm\in D(S_\pm)$ система (17) має єдиний розв'язок $\varphi_{g\pm}\in D(S_\pm)$.

Теорема 5. *Якщо* $B_+\in D'(S_+)$, $B_-\in D'(S_-)$, $s(B_+)\leqslant p_+$, $s(B_-)\leqslant p_-$, $p=\max\{p_+,p_-\}$, $u(x)$ *– розв'язок задачі N, то при* $k>p$ $\int_\Omega\rho^k(x)|u(x)|dx<+\infty$.

---

1. *Лионс Ж.-Л.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. / *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* – М.: Мир, 1971. – 372 с.
2. *Ройтберг Я.А.* Эллиптические граничные задачи в обобщенных функциях. I-IV. / *Ройтберг Я.А.* – Чернигов: Изд-во Чернигов. пед. ин-та, 1990-1991.
3. *Лопушанська Г.П.* Крайові задачі у просторі узагальнених функцій D'. / *Лопушанська Г.П.* – Львів: видавництво ЛНУ ім. Івана Франка, 2002. – 285 с.

4. *Szmydt Z.* Sui problemi di Dirichlet e di Neumann con dati al contorno generalizzatto / *Szmydt Z.* // Atti della Accadem. Naz. dei Lincli. – 1962. – Vol.32, №3. – P. 867-872.
5. *Хуснутдинова Н.В.* Об одной краевой задаче / *Хуснутдинова Н.В.* // Уч. зап. Казанского университета. – 1957. – Т. 177, №2. – С. 45-48.
6. *Гупало Г.С.* Про узагальнену задачу Діріхле / *Гупало Г.С.* // Доп. АН УРСР. – 1966. – №7. – С. 843-846.
7. *Гупало Г.С.* Про узагальнену задачу Неймана / *Гупало Г.С.* // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1967. – №3. – С. 199-201.
8. *Грушин В.В.* О поведении решений дифференциальных уравнений вблизи границы / *Грушин В.В.* // Докл. АН СССР. – 1964. – №158. – С. 264-267.
9. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. / *Владимиров В.С.* – М.: Наука, 1971. – 512 с.
10. *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Второй спецкурс. / *Шилов Г.Е.* – М.:Наука, 1965. – 327 С.
11. *Егоров Ю.В.* Линейные дифференциальные уравнения главного типа / *Егоров Ю.В.* – М.: Наука, 1984. - 360 С.
12. *Мартиненко М.Д.* Про тривимірні гармонічні функції в областях зі "щілинами" / *Мартиненко М.Д., Мартиненко М.Д.* // Вісн. Львів. ун-ту. – 1971. – Вип. 5. – С. 3-6.

GENERALIZED DIRICHLET AND NEUMANN PROBLEMS FOR LAPLACE EQUATION IN DOMAINE WITH A "GAP"

Bohdan JOVNER, Maryana KOLESNICHENKO, Halyna LOPUSHANSKA

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1

The unique solvability of Dirichlet and Neumann problems for Laplace equation in domaine with a "gap" and generalized functions given on the "gap" is established.

Key words: Laplace equation, generalized function, generalized boundary values, integral equations' system.

Стаття надійшла до редколегії 16.11.2007

Прийнята до друку 22.10.2008