ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат. 2008. Вип. 68. С. 59-67 Ser.Mech-Math. 2008. Vol. 68. P. 59-67

УДК 517.53

ПРО РАДІУСИ ОДНОЛИСТОСТІ ПОХІДНИХ ГЕЛЬФОНДА-ЛЕОНТЬЄВА ЛАКУНАРНИХ СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ

Олександр ВОЛОХ, Мирослав ШЕРЕМЕТА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1

Для лакунарного степеневого ряду досліджено поводження послідовності радіусів однолистості послідовних похідних Гельфонда-Леонтьєва.

Ключові слова: степеневий ряд, похідні Гельфонда-Леонтьєва, радіус однолистості.

1. Для $0 < R \leq +\infty$ нехай $A(R)$ – клас аналітичних в крузі $\mathbb{D}_R = \{z : |z| < R\}$ функцій

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k, \tag{1}$$

а $A(0)$ – клас формальних степеневих рядів. Будемо говорити, що $f \in A^+(0)$, якщо $f \in A(0)$ і $f_k > 0$ для всіх $k \geq 0$. Для $f \in A(0)$ і $l(z) = \sum_{k=0}^{\infty} l_k z^k \in A^+(0)$ формальний степеневий ряд

$$D_l^n f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{l_k}{l_{k+n}} f_{k+n} z^k = \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{l_{k-n+1}}{l_{k+1}} f_{k+1} z^{k-n+1}$$

називається [1] n-ю похідною Гельфонда-Леонтьєва. Якщо $l(z) = e^z$, тобто $l_k = 1/k!$, то $D_l^n f(z) = f^{(n)}(z)$ – звичайна n-на похідна функції f. Вважатимемо надалі $l_0 = 1$.

При означенні радіуса однолистості $\rho = \rho[f]$ функції $f \in A(R)$ маємо на увазі таке: якщо $f'(0) = 0$, то вважаємо $\rho = 0$, якщо $f'(0) \neq 0$, то ρ – радіус найбільшого круга з центром у точці $z = 0$, у якому функція f однолиста.

Дослідженню асимптотичного поводження послідовності $\rho_n = \rho[f^{(n)}]$ радіусів однолистості звичайних похідних функції $f \in A(R)$, $R > 0$, присвячені статті [2 - 4], а похідних Гельфонда-Леонтьєва – статті [5 - 8].

© Волох О., Шеремета М., 2008

Степеневий ряд (1) називається [3] лакунарним з лакунами довжиною не менше $k \in \mathbb{N}$, якщо з того, що $f_n \neq 0$, випливає, що $f_{n+j} = 0$ для $1 \leq j \leq k$ (f_{n+k+1} може також дорівнювати нулеві). В [3] доведено таку теорему.

Теорема А. *Існує зростаюча послідовність (x_k) додатних чисел, визначена рівностями $\sum\limits_{p=1}^{\infty} x_k^{pk}/(kp)! = 1$, з такими властивостями:*

1) $x_1 = \ln 2$, $x_2 = \ln(2+\sqrt{3})$, $(k!\ln 2)^{1/k} \leq x_k \leq (k!)^{1/k}$ для всіх $k \geq 1$ і $\lim\limits_{k\to\infty}((k!)^{1/k} - x_k) = 0$;

2) якщо ряд (1) має радіус збіжності $R > 0$ та лакуни довжиною не менше $k \in \mathbb{N}$ і не зводиться до полінома, то $\varlimsup\limits_{n\to\infty} n\rho[f^{(n)}] \geq Rx_k$.

Для похідних Гельфонда-Леонтьєва аналог теореми А отримано в [7], де доведено таку теорему.

Теорема Б. *Нехай ряд (1) має радіус збіжності $R > 0$ та лакуни довжиною не менше $k \in \mathbb{N}$ і не зводиться до полінома. Нехай $l \in A^+(0)$, $l_{n-1}/l_n \to \infty$ і $l_{n-1}l_{n+1}/l_n^2 \uparrow 1$ при $n \to \infty$. Тоді існує зростаюча послідовність (x_k) додатних чисел, визначена рівностями $\sum\limits_{p=1}^{\infty} l_1 x_k^{pk}/l_{kp+1} = 1$, така, що $\varlimsup\limits_{n\to\infty} l_{n-1}\rho[D_l^n f]/l_n \geq Rx_k$.*

Мета нашої праці – результати про поводження радіусів однолистості похідних Гельфонда-Леонтьєва лакунарних степеневих рядів без умови на довжину лакун. Припустимо, що

$$f(z) = f_0 + \sum_{p=0}^{\infty} f_{n_p+1} z^{n_p+1}, \quad f_{n_p+1} \neq 0 \quad (p \geq 0). \tag{2}$$

Головним результатом статті є така теорема.

Теорема 1. *Якщо ряд (2) має радіус збіжності $R > 0$ і послідовність $(l_{p-1}l_{p+1}/l_p^2)$ неспадна, то*

$$\varlimsup_{j\to\infty} \left(\frac{l_{n_{j+1}-n_j+1}}{l_1} \frac{l_{n_j+1}}{l_{n_{j+1}+1}}\right)^{\frac{1}{n_{j+1}-n_j}} \rho[D_l^{n_j} f] \geq \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} R. \tag{3}$$

Якщо ж до того $|f_{n_p+1}/f_{n_{p+1}+1}|^{1/(n_{p+1}-n_p)} \nearrow R$ при $p \to \infty$, то

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} R \leq \varliminf_{j\to\infty} \left(\frac{l_{n_{j+1}-n_j+1}}{l_1} \frac{l_{n_j+1}}{l_{n_{j+1}+1}}\right)^{\frac{1}{n_{j+1}-n_j}} \rho[D_l^{n_j} f] \leq$$
$$\leq \varlimsup_{j\to\infty} \left(\frac{l_{n_{j+1}-n_j+1}}{l_1} \frac{l_{n_j+1}}{l_{n_{j+1}+1}}\right)^{\frac{1}{n_{j+1}-n_j}} \rho[D_l^{n_j} f] \leq 2R. \tag{4}$$

2. Попередні результати. Наші дослідження ґрунтуються на таких двох лемах з [8].

Лема 1. *Якщо функція $\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k$ однолиста в крузі $\mathbb{D}_\rho$, то $|\alpha_k|\rho^{k-1} \leq$ $\leq k|\alpha_1|$ для всіх $k \geq 1$.*

Лема 2. *Якщо $\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k$ і $\sum_{k=2}^{\infty} k|\alpha_k|\rho^{k-1} \leq |a_1|$, то функція α однолиста в крузі $\mathbb{D}_\rho$.*

За означенням $D_l^n f$ маємо

$$D_l^n f(z) = \sum_{n_p \geq n-1} \frac{l_{n_p-n+1}}{l_{n_p+1}} f_{n_p+1} z^{n_p-n+1}. \tag{5}$$

Якщо $n_{j-1} < n < n_j$, то з (5) отримуємо $D_l^n f(z) = \sum\limits_{p=j}^{\infty} \frac{l_{n_p-n+1}}{l_{n_p+1}} f_{n_p+1} z^{n_p-n+1}$ і

$$(D_l^n f(z))' = \sum_{p=j}^{\infty} \frac{l_{n_p-n+1}}{l_{n_p+1}} f_{n_p+1}(n_p - n + 1) z^{n_p-n} =$$

$$= z^{n_j-n} \sum_{p=j}^{\infty} \frac{l_{n_p-n+1}}{l_{n_p+1}} f_{n_p+1}(n_p - n + 1) z^{n_p-n_j},$$

тобто $(D_l^n f(z))'\big|_{z=0} = 0$ і $\rho[D_l^n f] = 0$. Звідси випливає, що $\rho[D_l^n f] = 0$ для всіх $n \neq n_j$, $j \geq 0$, так що нам треба досліджувати поводження послідовності $(\rho[D_l^{n_j} f])$, а у цьому випадку з (5) отримуємо

$$D_l^{n_j} f(z) = \sum_{n_p \geq n_j-1} \frac{l_{n_p-n_j+1}}{l_{n_p+1}} f_{n_p+1} z^{n_p-n_j+1} =$$

$$= A_j + \frac{l_1}{l_{n_j+1}} f_{n_j+1} + \sum_{p=j+1}^{\infty} \frac{l_{n_p-n_j+1}}{l_{n_p+1}} f_{n_p+1} z^{n_p-n_j+1}, \tag{6}$$

де $A_j = 0$, якщо $n_j > n_{j-1} + 1$, і $A_j = l_0 f_{n_j}/l_{n_j}$, якщо $n_j = n_{j-1} + 1$. Тому з леми 1 випливає таке твердження.

Твердження 1. *Для радіуса однолистості функції $D_l^{n_j} f$ правильна оцінка*

$$\rho[D_l^{n_j} f] \leq 2 \left(\frac{l_1 l_{n_{j+1}+1}}{l_{n_{j+1}-n_j+1} l_{n_j+1}} \left| \frac{f_{n_j+1}}{f_{n_{j+1}+1}} \right| \right)^{1/(n_{j+1}-n_j)}. \tag{7}$$

Доведення. Справді, застосовуючи лему 1 до ряду (6), отримуємо

$$\frac{l_{n_p-n_j+1}}{l_{n_p+1}} |f_{n_p+1}| (\rho[D_l^{n_j} f])^{n_p-n_j} \leq (n_p - n_j + 1) \frac{l_1}{l_{n_j+1}} |f_{n_j+1}|$$

для всіх $p \geq j$, звідки для $p = j + 1$ маємо

$$\rho[D_l^{n_j} f] \leq (n_{j+1} - n_j + 1)^{1/(n_{j+1}-n_j)} \left(\frac{l_1 l_{n_{j+1}+1}}{l_{n_{j+1}-n_j+1} l_{n_j+1}} \right)^{1/(n_{j+1}-n_j)} \left| \frac{f_{n_j+1}}{f_{n_{j+1}+1}} \right|^{1/(n_{j+1}-n_j)}.$$

Оскільки $(k + 1)^{1/k} \leq 2$ для всіх $k \geq 1$, то звідси отримуємо оцінку (7).

З леми 2 і рівності (6) легко випливає таке твердження.

Твердження 2. *Якщо*

$$\sum_{p=j+1}^{\infty} (n_p - n_j + 1) \frac{l_{n_p-n_j+1} l_{n_j+1}}{l_1 l_{n_p+1}} \frac{|f_{n_p+1}|}{|f_{n_j+1}|} \rho^{n_p-n_j} \leq 1, \tag{8}$$

то $\rho[D_l^{n_j} f] \geq \rho$.

Використовуючи твердження 1 і 2, доведемо ще одне твердження.

Твердження 3. *Якщо для всіх* $p > j$

$$\left(\frac{l_{n_{p+1}-n_j+1}}{l_{n_p-n_j+1}}\frac{l_{n_p+1}}{l_{n_{p+1}+1}}\frac{|f_{n_{p+1}+1}|}{|f_{n_p+1}|}\right)^{\frac{1}{n_{p+1}-n_p}} \le \left(\frac{l_{n_{j+1}-n_j+1}}{l_1}\frac{l_{n_j+1}}{l_{n_{j+1}+1}}\frac{|f_{n_{j+1}+1}|}{|f_{n_j+1}|}\right)^{\frac{1}{n_{j+1}-n_j}}, \quad (9)$$

то

$$\rho[D_l^{n_j}f] \asymp \left(\frac{l_1 l_{n_{j+1}+1}}{l_{n_{j+1}-n_j+1}l_{n_j+1}}\left|\frac{f_{n_j+1}}{f_{n_{j+1}+1}}\right|\right)^{1/(n_{j+1}-n_j)}, \quad j\to\infty. \quad (10)$$

Доведення. З умови (9) випливає, що для $p \ge j+2$

$$\frac{l_{n_p-n_j+1}l_{n_j+1}}{l_1 l_{n_p+1}}\frac{|f_{n_p+1}|}{|f_{n_j+1}|} \le$$

$$\le \frac{l_{n_{p-1}-n_j+1}l_{n_j+1}}{l_1 l_{n_{p-1}+1}}\frac{|f_{n_{p-1}+1}|}{|f_{n_j+1}|}\left(\frac{l_{n_{j+1}-n_j+1}}{l_1}\frac{l_{n_j+1}}{l_{n_{j+1}+1}}\frac{|f_{n_{j+1}+1}|}{|f_{n_j+1}|}\right)^{\frac{n_p-n_{p-1}}{n_{j+1}-n_j}} \le$$

$$\le \frac{l_{n_{p-2}-n_j+1}l_{n_j+1}}{l_1 l_{n_{p-2}+1}}\frac{|f_{n_{p-2}+1}|}{|f_{n_j+1}|}\left(\frac{l_{n_{j+1}-n_j+1}}{l_1}\frac{l_{n_j+1}}{l_{n_{j+1}+1}}\frac{|f_{n_{j+1}+1}|}{|f_{n_j+1}|}\right)^{\frac{n_p-n_{p-1}}{n_{j+1}-n_j}+\frac{n_{p-1}-n_{p-2}}{n_{j+1}-n_j}} \le$$

$$\le \dots \le \left(\frac{l_{n_{j+1}-n_j+1}}{l_1}\frac{l_{n_j+1}}{l_{n_{j+1}+1}}\frac{|f_{n_{j+1}+1}|}{|f_{n_j+1}|}\right)^{\frac{n_p-n_j}{n_{j+1}-n_j}},$$

тобто умова (8) виконується, якщо

$$\sum_{p=j+1}^{\infty}(n_p-n_j+1)\left\{\left(\frac{l_{n_{j+1}-n_j+1}}{l_1}\frac{l_{n_j+1}}{l_{n_{j+1}+1}}\frac{|f_{n_{j+1}+1}|}{|f_{n_j+1}|}\right)^{\frac{1}{n_{j+1}-n_j}}\rho\right\}^{n_p-n_j} \le 1. \quad (11)$$

Оскільки для $0 < r \le (\sqrt{2}-1)/\sqrt{2}$

$$\sum_{p=j+1}^{\infty}(n_p-n_j+1)r^{n_p-n_j} \le \sum_{k=1}^{\infty}(k+1)r^k \le \sum_{k=1}^{\infty}k\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)^{k-1}-1 = 1,$$

то (11) виконується, якщо

$$\left(\frac{l_{n_{j+1}-n_j+1}}{l_1}\frac{l_{n_j+1}}{l_{n_{j+1}+1}}\frac{|f_{n_{j+1}+1}|}{|f_{n_j+1}|}\right)^{\frac{1}{n_{j+1}-n_j}}\rho \le \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}, \quad (12)$$

звідки за твердженням 2 випливає, що

$$\rho[D_l^{n_j}f] \ge \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\left(\frac{l_1 l_{n_{j+1}+1}}{l_{n_{j+1}-n_j+1}l_{n_j+1}}\left|\frac{f_{n_j+1}}{f_{n_{j+1}+1}}\right|\right)^{1/(n_{j+1}-n_j)}. \quad (13)$$

Співвідношення (10) випливає з (7) і (13). Твердження 3 доведено.

3. Доведення теореми 1. Припустимо спочатку, що

$$|f_{n_p+1}/f_{n_{p+1}+1}|^{1/(n_{p+1}-n_p)} \nearrow R \quad \text{при} \quad p\to\infty.$$

Тоді з (7) легко випливає права частина (4).

Доведемо її ліву частину. Оскільки $|f_{n_p+1}/f_{n_{p+1}+1}|^{1/(n_{p+1}-n_p)} \nearrow R$ при $p\to\infty$, то умова (9) твердження 3 виконується, якщо для всіх $p\geq j+1$

$$\left(\frac{l_{n_{p+1}-n_j+1}}{l_{n_p-n_j+1}}\frac{l_{n_p+1}}{l_{n_{p+1}+1}}\right)^{\frac{1}{n_{p+1}-n_p}} \leq \left(\frac{l_{n_{j+1}-n_j+1}}{l_1}\frac{l_{n_j+1}}{l_{n_{j+1}+1}}\right)^{\frac{1}{n_{j+1}-n_j}}. \tag{14}$$

Позначимо $\eta_p=(l_{p-1}l_{p+1})/l_p^2$. Тоді послідовність (η_p) неспадна,

$$\frac{l_{p+1}}{l_p}=\frac{l_p}{l_{p-1}}\eta_p=\frac{l_{p-1}}{l_{p-2}}\eta_p\eta_{p-1}=\cdots=l_1\prod_{m=1}^{p}\eta_m$$

і

$$\ln\, l_{p+1}=\ln\, l_1+\sum_{m=1}^{p}\ln\,\eta_m+\ln\, l_p=2\ln\, l_1+\sum_{m=1}^{p}\ln\,\eta_m+\sum_{m=1}^{p-1}\ln\,\eta_m+\ln\, l_{p-1}=\cdots=$$

$$=(p+1)\ln\, l_1+\sum_{k=1}^{p}\sum_{m=1}^{k}\ln\,\eta_m.$$

Тому

$$\ln\, l_{n_{p+1}-n_j+1}-\ln\, l_{n_p-n_j+1}+\ln\, l_{n_p+1}-\ln\, l_{n_{p+1}+1}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n_{p+1}-n_j}\sum_{m=1}^{k}\ln\,\eta_m-\sum_{k=1}^{n_p-n_j}\sum_{m=1}^{k}\ln\,\eta_m+\sum_{k=1}^{n_p}\sum_{m=1}^{k}\ln\,\eta_m-\sum_{k=1}^{n_{p+1}}\sum_{m=1}^{k}\ln\,\eta_m=$$

$$=-\sum_{k=n_p+1}^{n_{p+1}}\sum_{m=1}^{k}\ln\,\eta_m+\sum_{k=n_p-n_j+1}^{n_{p+1}-n_j}\sum_{m=1}^{k}\ln\,\eta_m=-\sum_{k=n_p+1}^{n_{p+1}}\sum_{m=1}^{k}\ln\,\eta_m+\sum_{k=n_p+1}^{n_{p+1}}\sum_{m=1}^{k-n_j}\ln\,\eta_m=$$

$$=-\sum_{k=n_p+1}^{n_{p+1}}\left(\sum_{m=1}^{k}\ln\,\eta_m-\sum_{m=1}^{k-n_j}\ln\,\eta_m\right)=-\sum_{k=n_p+1}^{n_{p+1}}\sum_{m=k-n_j+1}^{k}\ln\,\eta_m$$

і подібно

$$\ln\, l_{n_{j+1}-n_j+1}-\ln\, l_1+\ln\, l_{n_j+1}-\ln\, l_{n_{j+1}+1}=-\sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}}\sum_{m=k-n_j+1}^{k}\ln\,\eta_m.$$

Отже, умова (14) виконується тоді і тільки тоді, коли для всіх $p\geq j+1$

$$\frac{1}{n_{p+1}-n_p}\sum_{k=n_p+1}^{n_{p+1}}\sum_{m=k-n_j+1}^{k}\ln\,\eta_m\geq\frac{1}{n_{j+1}-n_j}\sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}}\sum_{m=k-n_j+1}^{k}\ln\,\eta_m. \tag{15}$$

Оскільки послідовність $(\ln\,\eta_m)$ неспадна, то і послідовність $\left(\sum\limits_{m=k-n_j+1}^{k}\ln\,\eta_m\right)_{k=n_j}^{\infty}$ неспадна, а отже,

$$\frac{1}{n_{p+1}-n_p}\sum_{k=n_p+1}^{n_{p+1}}\sum_{m=k-n_j+1}^{k}\ln\eta_m\ge\frac{1}{n_{p+1}-n_p}\sum_{k=n_p+1}^{n_{p+1}}\sum_{m=n_p-n_j+2}^{n_p+1}\ln\eta_m=\sum_{m=n_p-n_j+2}^{n_p+1}\ln\eta_m$$

і

$$\frac{1}{n_{j+1}-n_j}\sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}}\sum_{m=k-n_j+1}^{k}\ln\eta_m\le\frac{1}{n_{j+1}-n_j}\sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}}\sum_{m=n_{j+1}-n_j+1}^{n_{j+1}}\ln\eta_m=$$

$$=\sum_{m=n_{j+1}-n_j+1}^{n_{j+1}}\ln\eta_m,$$

тобто умова (14) виконується, якщо для всіх $p\ge j+1$

$$\sum_{m=n_p-n_j+2}^{n_p+1}\ln\,\eta_m\ge\sum_{m=n_{j+1}-n_j+1}^{n_{j+1}}\ln\,\eta_m.$$

З огляду на неспадання послідовності $(\ln\,\eta_m)$, остання нерівність є правильною. Отже, умова (9) виконується і тому, як у доведенні твердження 3, отримуємо нерівність (12) з $\rho=\rho[D_l^{n_j}f]$, з якої випливає ліва частина (4).

Залишилось довести нерівність (3). Нехай $r\in(0,\,R)$ – довільне число. Тоді $|f_{n_j+1}|r^{n_j+1}\to0\,(j\to\infty)$ і тому існує зростаюча послідовність (j_k) натуральних чисел така, що $|f_{n_p+1}|r^{n_p+1}\le|f_{n_j+1}|r^{n_j+1}$ для всіх $j=j_k$ і $p\ge j_k$. Звідси випливає, що для $j=j_k$ умова (8) виконується, якщо

$$\sum_{p=j+1}^{\infty}(n_p-n_j+1)\frac{l_{n_p-n_j+1}l_{n_j+1}}{l_1l_{n_p+1}}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n_p-n_j}\le1,\quad j=j_k.$$

Тому, повторюючи доведення твердження 3 з $f_{n_k+1}=1$ для всіх k і ρ/r замість ρ, отримуємо

$$\left(\frac{l_{n_{j+1}-n_j+1}}{l_1}\frac{l_{n_j+1}}{l_{n_{j+1}+1}}\right)^{\frac{1}{n_{j+1}-n_j}}\frac{\rho}{r}\le\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}},\quad j=j_k,\tag{16}$$

якщо тільки для всіх $p>j_k$ виконується умова

$$\left(\frac{l_{n_{p+1}-n_j+1}}{l_{n_p-n_j+1}}\frac{l_{n_p+1}}{l_{n_{p+1}+1}}\right)^{\frac{1}{n_{p+1}-n_p}}\le\left(\frac{l_{n_{j+1}-n_j+1}}{l_1}\frac{l_{n_j+1}}{l_{n_{j+1}+1}}\right)^{\frac{1}{n_{j+1}-n_j}},\quad j=j_k,\tag{17}$$

тобто умова (14) з $j=j_k$. З доведення правої частини (4) видно, що умова (17) виконується, якщо послідовність $(l_{p-1}l_{p+1}l_p^{-2})$ неспадна. З огляду на нерівність (16) і довільність числа $r\in(0,\,R)$, правильна нерівність (3). Теорему 1 повністю доведено.

4. Зауваження та доповнення. З наведених міркувань видно, що оцінки радіуса однолистості знизу та умови, за яких ці оцінки є правильними, залежать від методики, застосованої для оцінки ряду (8). Про це свідчить твердження, яке доповнює твердження 3.

Твердження 4. *Якщо $l_{p-1}l_{p+1}l_p^{-2} \leq 1$, $p \geq 1$, а коефіцієнти ряду (2) такі, що послідовність $(c_{n_p+1}/c_{n_{p+1}+1})^{1/(n_{p+1}-n_p)}$ неспадна, де $c_n = |f_n|/l_n$, то правильне співвідношення (10).*

Доведення. Справді, оскільки послідовність $(c_{n_p+1}/c_{n_{p+1}+1})^{1/(n_{p+1}-n_p)}$ неспадна, то умова (9) виконується, якщо для всіх $p \geq j+1$

$$\left(\frac{l_{n_{p+1}-n_j+1}}{l_{n_p-n_j+1}}\right)^{\frac{1}{n_{p+1}-n_p}} \leq \left(\frac{l_{n_{j+1}-n_j+1}}{l_1}\right)^{\frac{1}{n_{j+1}-n_j}}. \tag{18}$$

Позначимо $\eta_p = (l_{p-1}l_{p+1})/l_p^2$. Тоді $\ln \eta_p \leq 0$ і, як у доведенні теореми 1, отримуємо

$$\frac{\ln l_{n_{p+1}-n_j+1} - \ln l_{n_p-n_j+1}}{n_{p+1}-n_p} = \ln l_1 + \frac{1}{n_{p+1}-n_p}\sum_{k=n_p-n_j+1}^{n_{p+1}-n_j}\sum_{m=1}^{k} \ln \eta_m$$

і

$$\frac{\ln l_{n_{j+1}-n_j+1} - \ln l_1}{n_{j+1}-n_j} = \ln l_1 + \frac{1}{n_{j+1}-n_j}\sum_{k=1}^{n_{j+1}-n_j}\sum_{m=1}^{k} \ln \eta_m.$$

Тому умова (18) виконується тоді і тільки тоді, коли для всіх $p \geq j+1$

$$\frac{1}{n_{p+1}-n_p}\sum_{k=n_p-n_j+1}^{n_{p+1}-n_j}\sum_{m=1}^{k} \ln \eta_m \leq \frac{1}{n_{j+1}-n_j}\sum_{k=1}^{n_{j+1}-n_j}\sum_{m=1}^{k} \ln \eta_m. \tag{19}$$

З огляду на нерівність $\ln \eta_n \leq 0$ послідовність $\left(\sum\limits_{m=1}^{k} \ln \eta_m\right)$ незростаюча, звідки, як у доведенні теореми 1, отримуємо правильність нерівності (19), а з цим і нерівності (13). З огляду на (7) твердження 4 доведено.

За умови, що ряд (2) має лакуни довжиною не менше k (тобто $n_{j+1}-n_j = k_j \geq k$), оцінку (3) і ліву нерівність (4) можна продовжити.

Справді, як і у доведенні теореми 1, маємо

$$\frac{\ln l_{k+1} + \ln l_n - \ln l_1 - \ln l_{n+k}}{k} = -\frac{1}{k}\sum_{q=1}^{k}\sum_{m=q+1}^{q+n-1} \ln \eta_m,$$

оскільки з неспадання послідовності $(\ln \eta_m)$ випливає неспадання послідовності $\left(\dfrac{1}{k}\sum\limits_{q=1}^{k}\sum\limits_{m=q+1}^{q+n-1} \ln \eta_m\right)$, то звідси випливає незростання послідовності $\left(\dfrac{l_{k+1}l_n}{l_1 l_{k+n}}\right)$ для будь-якого $n \geq 2$. Отже, за умови $n_{j+1}-n_j = k_j \geq k$ одержуємо

$$\left(\frac{l_{n_{j+1}-n_j+1}}{l_1}\frac{l_{n_j+1}}{l_{n_{j+1}+1}}\right)^{\frac{1}{n_{j+1}-n_j}} = \left(\frac{l_{k_j+1}l_{n_j+1}}{l_1 l_{n_j+k_j+1}}\right)^{\frac{1}{k_j}} \leq \left(\frac{l_{k+1}l_{n_j+1}}{l_1 l_{n_j+k+1}}\right)^{\frac{1}{k}},$$

а з теореми 1 випливає такий наслідок.

Наслідок 1. *Якщо ряд (2) має радіус збіжності $R > 0$ і лакуни довжиною не менше k, а послідовність $(l_{p-1}l_{p+1}/l_p^2)$ неспадна, то*

$$\varlimsup_{j\to\infty}\left(\frac{l_{k+1}l_{n_j+1}}{l_1 l_{n_j+k+1}}\right)^{\frac{1}{k}}\rho[D_l^{n_j}f]\geq\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}R. \tag{20}$$

Якщо ж до того $|f_{n_p+1}/f_{n_{p+1}+1}|^{1/(n_{p+1}-n_p)}\nearrow R$ при $p\to\infty$, то в (20) можна $\varlimsup$ замінити на $\varliminf$.

Припустимо, що $l(z)=e^z$, тобто $l_k=1/k!$. Тоді $l_{p-1}l_{p+1}/l_p^2=p/(p+1)\uparrow 1\,(p\to\infty)$ і з (3) отримуємо

$$\varlimsup_{j\to\infty}\left(\frac{(n_{j+1}+1)!}{(n_{j+1}-n_j+1)!(n_j+1)!}\right)^{\frac{1}{n_{j+1}-n_j}}\rho[f^{(n_j)}]\geq\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}R. \tag{21}$$

Якщо ряд (2) має лакуни довжиною не менше k, то з (20) одержуємо

$$\varlimsup_{j\to\infty}\left(\frac{(n_j+k+1)!}{(k+1)!(n_j+1)!}\right)^{\frac{1}{k}}\rho[f^{(n_j)}]\geq\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}R,$$

тобто

$$\varlimsup_{j\to\infty}n_j\rho[f^{(n_j)}]\geq\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\sqrt[k]{(k+1)!}R. \tag{22}$$

Оцінка (22) доповнює теорему A, а з загальної оцінки (21) у випадку великих лакун випливають результати, значно сильніші, ніж (22). Наприклад, якщо $n_{j+1}=kn_j$ $(j\geq 1)$ з $k\geq 2$, то

$$\varlimsup_{j\to\infty}\rho[f^{(n_j)}]\geq\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\frac{k^{k/(k-1)}}{k-1}R. \tag{23}$$

Якщо $l(z)=1/(1-z)$, тобто $l_k=1$ (оператор D_l^n з такою функцією l використовували в [9]). У цьому випадку з (3) отримуємо нерівність

$$\varlimsup_{j\to\infty}\rho[D_l^{n_j}f]\geq\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}R, \tag{24}$$

для будь-якої зростаючої послідовності (n_j) натуральних чисел.

Якщо $l_k=e^{qk^2}$ $(q\in\mathbb{R})$, то $l_{p-1}l_{p+1}/l_p^2=e^{2q}$, з (3) одержуємо нерівність

$$\varlimsup_{j\to\infty}e^{-2qn_j}\rho[D_l^{n_j}f]\geq\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}R, \tag{25}$$

звідки, зокрема, випливає, що $\varlimsup\limits_{j\to\infty}\rho[D_l^{n_j}f]=+\infty$ для будь-якої зростаючої послідовності (n_j) натуральних чисел, якщо тільки $q>0$.

Зауважимо таке: якщо $|f_{n_p+1}/f_{n_{p+1}+1}|^{1/(n_{p+1}-n_p)}\nearrow R$ при $p\to\infty$, то в оцінках (20) – (25) замість $\varlimsup$ можна поставити $\varliminf$.

Нарешті, зауважимо, що з теореми 1 у випадку, коли $n_p=p$, випливає результат з [8].

Наслідок 2. *Якщо ряд (1) має радіус збіжності* $R > 0$ *і* $|f_p/f_{p+1}| \nearrow R$ *при* $p \to \infty$, *а послідовність* $(l_{p-1}l_{p+1}l_p^{-2})$ *неспадна, то*

$$\rho[D_l^{n_j} f] \asymp \frac{l_{n+2}}{l_{n+1}} \left|\frac{f_{n+1}}{f_{n+2}}\right|, \quad n \to \infty.$$

1. *Гельфонд А.О.* Об одном обобщении ряда Фурье / *Гельфонд А.О., Леонтьев А.Ф.* // Матем. сб. – 1951. – Т. 29, №3. – С. 477-500.
2. *Shah S.M.* Univalent functions with univalent derivatives II / *Shah S.M., Trimble S.Y.* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1969. – Vol. 144. – P. 313-320.
3. *Shah S.M.* Univalence derivatives of functions defined by gap power series / *Shah S.M., Trimble S.Y.* // J. London. Math. Soc. (2). – 1975. – Vol. 9. – P. 501-512.
4. *Shah S.M.* Univalence derivatives of functions defined by gap power series. II / *Shah S.M., Trimble S.Y.* // J. Math. Anal. and Appl. – 1976. – Vol. 56. – P. 26-40.
5. *Juneja O.P.* Univalent functions with univalent Gelfond-Leont'ev derivatives / *Juneja O.P., Shah S.M.* // Bull. Austr. Math. Soc. – 1984. – Vol. 29. – P. 329-348.
6. *Kapoor G.P.* Univalence of Gelfond-Leont'ev derivatives of analytic functions / *Kapoor G.P., Juneja O.P., Patel J.* // Bull. math. Soc. sci. math. RSR – 1989. – Vol. 33, №1. – P. 25-34.
7. *Kapoor G.P.* Univalence of Gelfond-Leont'ev derivatives of functions defined by gap power series / *Kapoor G.P., Patel J.* // Rend. mat. e appl. – 1986. – Vol. 6, №4. – P. 491-502.
8. *Шеремета М.М.* Про радіуси однолистості похідних Гельфонда-Леонтьєва / *Шеремета М.М.* // Укр. мат. журн. – 1995. – Т. 47, №3. – С. 390-399.
9. *Казъмин Ю.А.* Об интерполяционной проблеме I / *Казъмин Ю.А.* // Сиб. мат. журн. – 1967. – С.293-312.

ON THE UNIVALENCE RADII OF GELFOND-LEONT'EV DERIVATIVES OF GAP POWER SERIES

Oleksandr VOLOKH, Myroslav SHEREMETA

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1

For a gap power series the behaviour of the sequence of succesive Gelfond-Leont'ev derivatives is investigated.

Key words: power series, Gelfond-Leont'ev derivatives, radius of univalence.

Стаття надійшла до редколегії 03.10.2007

Прийнята до друку 22.10.2008