*ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ* *VISNYK LVIV UNIV.*
*Серія мех.-мат. 2008. Вип. 68. С. 22-30* *Ser.Mech-Math. 2008. Vol. 68. P. 22-30*

УДК 517.524

# ПРО ДЕЯКІ ОЗНАКИ ЗБІЖНОСТІ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ З НЕРІВНОЗНАЧНИМИ ЗМІННИМИ

**Дмитро БОДНАР**[1], **Роман ДМИТРИШИН**[2]

[1] *Тернопільський державний економічний університет,*
*46000, Тернопіль, вул. Львівська, 11,*
*e-mail: dmytro_bodnar@hotmail.com*
[2] *Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,*
*76000, Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57*
*e-mail: dmytryshynr@hotmail.com*

З'ясовано ознаки збіжності гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними, частинні ланки яких мають вигляд $\frac{g_{i(k)}(1-g_{i(k-1)})z_{i(k)}}{1}$.

*Ключові слова:* гіллястий ланцюговий дріб з нерівнозначними змінними, збіжність, мажоранта.

**1.** Одним з найважливіших питань в аналітичній теорії неперервних дробів та їхніх багатовимірних узагальнень є виявлення ефективних ознак збіжності таких дробів. Різні ознаки збіжності неперервних дробів з частинними ланками вигляду $\frac{g_k(1-g_{k-1})z_k}{1}$ наведено в монографії [8]. У працях [4, 5, 7] знайдено ознаки збіжності двовимірних неперервних дробів подібного типу, а в [2, 3, 6] – відповідних гіллястих ланцюгових дробів.

Ми знайшли ознаки збіжності гіллястого ланцюгового дробу з нерівнозначними змінними (ГЛДзНЗ) вигляду

$$1+\sum_{i_1=1}^{N}\frac{g_{i(1)}(1-g_0)z_{i(1)}}{1+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=2}^{\infty}\sum\limits_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{g_{i(k)}(1-g_{i(k-1)})z_{i(k)}}{1}}, \tag{1}$$

і оберненого до нього ГЛДзНЗ

$$\frac{1}{1+\sum\limits_{i_1=1}^{N}\dfrac{g_{i(1)}(1-g_0)z_{i(1)}}{1+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=2}^{\infty}\sum\limits_{i_k=1}^{i_{k-1}}\dfrac{g_{i(k)}(1-g_{i(k-1)})z_{i(k)}}{1}}}, \tag{2}$$

де $g_0$, $g_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{J}$, – дійсні сталі такі, що $0 \le g_0 \le 1$ і $0 \le g_{i(k)} \le 1$ для всіх $i(k) \in \mathcal{J}$, $z_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{J}$, – комплексні змінні,

$$\mathcal{J} = \{i(k) = i_1 i_2 \dots i_k : \ k \ge 1, \ 1 \le i_n \le i_{n-1}, 1 \le n \le k, \ i_0 = N\} \tag{3}$$

– множина мультиіндексів.

**2. Головна частина.** Для залишків дробу (1) введемо позначення

$$Q_{i(s)}^{(s)} = 1, \quad Q_{i(p)}^{(s)} = 1 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{r=p+1}^{s}\sum_{i_r=1}^{i_{r-1}}\frac{g_{i(r)}(1-g_{i(r-1)})z_{i(r)}}{1},$$

де $s \ge 1$, $1 \le p \le s-1$, $1 \le i_k \le i_{k-1}$, $1 \le k \le p$, $i_0 = N$. Отримаємо рекурентні співвідношення

$$Q_{i(p)}^{(s)} = 1 + \sum_{i_{p+1}=1}^{i_p}\frac{g_{i(p+1)}(1-g_{i(p)})z_{i(p+1)}}{Q_{i(p+1)}^{(s)}}, \tag{4}$$

де $s \ge 1$, $1 \le p \le s-1$, $1 \le i_k \le i_{k-1}$, $1 \le k \le p$, $i_0 = N$.

**Теорема 1.** *Нехай елементи ГЛДзНЗ* (1) *задовольняють умови*

$$g_0 = 0, \quad 0 \le g_{i(k)} < 1 \quad \textit{для всіх} \quad i(k) \in \mathcal{J}, \tag{5}$$

*або*

$$g_0 = 0, \quad 0 < g_{i(k)} \le 1 \quad \textit{для всіх} \quad i(k) \in \mathcal{J}. \tag{6}$$

*Тоді:*

1) *ГЛДзНЗ* (1) *абсолютно і рівномірно збіжний, якщо*

$$|z_{i(k)}| \le i_{k-1}^{-1} \quad \textit{для всіх} \quad i(k) \in \mathcal{J}; \tag{7}$$

2) *значення ГЛДзНЗ* (1) *і всіх його підхідних дробів належать кругу* $|z-1| \le 1$.

Доведення проводять за схемою доведення теореми 1 [1]. □

**Теорема 2.** *Нехай елементи ГЛДзНЗ* (2) *задовольняють умови* (5) *і* (7). *Тоді ГЛДзНЗ* (2) *збіжний, якщо існують натуральне число* $n$ *і мультиіндекс* $i(n)$, $i(n) \in \mathcal{J}$ *такі, що* $g_{i(n)} = 0$ *або*

$$z_{i(n)} \ne -i_{n-1}^{-1}. \tag{8}$$

Д о в е д е н н я. Використовуючи рекурентні співвідношення (4), покажемо правильність нерівностей

$$|Q^{(s)}_{i(k)}| > g_{i(k)}, \quad s \geq 1, \quad 1 \leq k \leq s, \quad 1 \leq i_n \leq i_{n-1}, \quad 1 \leq n \leq k, \quad i_0 = N. \tag{9}$$

При $k = s$ нерівності (9) очевидні. Припускаючи правильність (9) при $k = p + 1$, де $p + 1 \leq s$, при $k = p$ маємо

$$|Q^{(s)}_{i(p)}| \geq 1 - \sum_{i_{p+1}=1}^{i_p} \frac{g_{i(p+1)}(1 - g_{i(p)})|z_{i(p+1)}|}{|Q^{(s)}_{i(p+1)}|} \geq 1 - \sum_{i_{p+1}=1}^{i_p} \frac{g_{i(p+1)}(1 - g_{i(p)})}{i_p|Q^{(s)}_{i(p+1)}|}.$$

Оскільки на підставі оцінок (9) $Q^{(s)}_{i(p+1)} \neq 0$, то, замінюючи $g_{i(p+1)}$ на $|Q^{(s)}_{i(p+1)}|$, отримаємо (9) при $k = p$. Згідно з теоремою 1 усі залишки ГЛДзНЗ (2)

$$Q_0 = 1 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{g_{i(1)}z_{i(1)}}{1 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=2}^{\infty} \sum\limits_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{g_{i(k)}(1 - g_{i(k-1)})z_{i(k)}}{1}},$$

$$Q_{i(k)} = 1 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{n=k+1}^{\infty} \sum_{i_n=1}^{i_{n-1}} \frac{g_{i(n)}(1 - g_{i(n-1)})z_{i(n)}}{1},$$

де $i(k) \in \mathcal{J}$ збігаються і $|Q_0 - 1| \leq 1$. Доведемо правильність таких нерівностей:

$$|Q_{i(k)} - 1| \leq 1 - g_{i(k)} \quad \text{для всіх} \quad i(k) \in \mathcal{J}. \tag{10}$$

Використовуючи співвідношення (4) і (9), для фіксованого числа $s$, $s \geq 1$, і довільного мультиіндексу $i(k)$, $1 \leq k \leq s$, $1 \leq i_n \leq i_{n-1}$, $1 \leq n \leq k$, $i_0 = N$, маємо

$$|Q^{(s)}_{i(k)} - 1| \leq \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} \frac{g_{i(k+1)}(1 - g_{i(k)})|z_{i(k+1)}|}{|Q^{(s)}_{i(k+1)}|} < 1 - g_{i(k)},$$

звідки, переходячи до границі при $s \to \infty$, отримаємо нерівності (10).

Для розбіжності ГЛДзНЗ (2) треба, щоб

$$Q_0 = 1 + \lim_{s \to \infty} \sum_{i_1=1}^{N} \frac{g_{i(1)}z_{i(1)}}{Q^{(s)}_{i(1)}} = 0. \tag{11}$$

Оскільки $|z_{i(1)}| \leq 1/N$ і згідно з нерівністю (9) $|Q_{i(1)}| \geq g_{i(1)}$, то рівність (11) рівносильна тому, що

$$|z_{i(1)}| = 1/N, \quad \frac{g_{i(1)}}{Q_{i(1)}} = 1 \quad \text{і} \quad \frac{g_{i(1)}z_{i(1)}}{Q_{i(1)}} = -1/N \quad \text{для всіх} \quad i(1) \in \mathcal{J}. \tag{12}$$

З умов (10) і (12) випливає, що

$$Q_{i(1)} = g_{i(1)}, \quad z_{i(1)} = -1/N \quad \text{для всіх} \quad i(1) \in \mathcal{J}. \tag{13}$$

Оскільки

$$Q_{i(1)} = 1 + (1 - g_{i(1)}) \lim_{s\to\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{g_{i(2)} z_{i(2)}}{Q_{i(2)}^{(s)}}, \quad 1 \le i_1 \le N,$$

то, враховуючи (13), маємо

$$\lim_{s\to\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{g_{i(2)} z_{i(2)}}{Q_{i(2)}^{(s)}} = -1 \quad \text{для всіх} \quad i(1) \in \mathcal{J},$$

звідки, повторюючи аналогічні міркування, отримаємо $Q_{i(2)} = g_{i(2)}$, $z_{i(2)} = -i_1^{-1}$ для всіх $i(2) \in \mathcal{J}$. Застосовуючи далі метод математичної індукції, доходимо висновку, що для розбіжності ГЛДзНЗ (2) треба виконати умови

$$Q_{i(k)} = g_{i(k)}, \quad z_{i(k)} = -i_{k-1}^{-1} \quad \text{для всіх} \quad i(k) \in \mathcal{J}. \tag{14}$$

Тому виконання умови (8) забезпечує збіжність ГЛДзНЗ (2). Оскільки $Q_0 \neq 0$ і всі $Q_{i(k)} \neq 0$, то умови (14) не будуть виконуватися, якщо існують натуральне число $n$ і мультиіндекс $i(n)$, $i(n) \in \mathcal{J}$, такі, що $g_{i(n)} = 0$. □

**Теорема 3.** *Нехай елементи ГЛДзНЗ* (2) *задовольняють умови*

$$0 < g_0 \le 1, \quad 0 \le g_{i(k)} < 1 \quad \text{для всіх} \quad i(k) \in \mathcal{J}, \tag{15}$$

*або*

$$0 < g_0 \le 1, \quad 0 < g_{i(k)} \le 1 \quad \text{для всіх} \quad i(k) \in \mathcal{J}. \tag{16}$$

*Тоді:*

1) *ГЛДзНЗ* (2) *абсолютно і рівномірно збіжний, якщо виконуються умови* (7)*;*
2) *значення ГЛДзНЗ* (2) *і всіх його підхідних дробів належать кругу*

$$\left| z - \frac{1}{g_0(2-g_0)} \right| \le \frac{1-g_0}{g_0(2-g_0)}. \tag{17}$$

Д о в е д е н н я. Міркуючи так, як і при доведенні теореми 1 [1], можна показати, що мажорантою ГЛДзНЗ (2) є ГЛДзНЗ

$$\cfrac{1}{1 + \sum\limits_{i_1=1}^{N} \cfrac{-N^{-1} g_{i(1)}(1-g_0)}{1 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=2}^{\infty} \sum\limits_{i_k=1}^{i_{k-1}} \cfrac{-i_{k-1}^{-1} g_{i(k)}(1-g_{i(k-1)})}{1}}}. \tag{18}$$

Далі, записуючи ГЛДзНЗ (18) або його довільну апроксиманту у вигляді

$$z = \frac{1}{1-(1-g_0)w}, \quad w = \sum_{i_1=1}^{N} \cfrac{N^{-1} g_{i(1)}}{1 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=2}^{\infty} \sum\limits_{i_k=1}^{i_{k-1}} \cfrac{-i_{k-1}^{-1} g_{i(k)}(1-g_{i(k-1)})}{1}},$$

згідно з твердженням 2 теореми 1 маємо $|w| \le 1$, тому $|1-1/z| \le 1-g_0$, звідки за допомогою елементарних перетворень отримуємо (17). Абсолютна збіжність ГЛДзНЗ (2) випливає з того, що апроксиманти ГЛДзНЗ (18) утворюють монотонно зростаючу й обмежену зверху послідовність (див. дов. теор. 1 [1]). □

**Теорема 4.** *Нехай елементи ГЛДзНЗ* (1) *задовольняють умови* (5) *або* (6). *Тоді ГЛДзНЗ* (1) *абсолютно збіжний, якщо виконуються умови*

$$\sum_{i_1=1}^{N} |z_{i(1)}| \le 1 \quad \textit{i} \quad \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} |z_{i(k+1)}| \le 1 \quad \textit{для всіх} \quad i(k) \in \mathcal{J}. \tag{19}$$

*Якщо, крім того, виконується умова*

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1-\nu_k}{\nu_k} = 0, \tag{20}$$

*де*

$$\nu_k = \min\{g_{i(k)} :\ 1 \le i_n \le i_{n-1},\ 1 \le n \le k,\ i_0 = N\}, \tag{21}$$

*то ГЛДзНЗ* (1) *є абсолютно і рівномірно збіжним.*

Д о в е д е н н я. Покажемо, що ГЛДзНЗ

$$1 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{-g_{i(1)}|z_{i(1)}|}{1 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=2}^{\infty} \sum\limits_{i_k=1}^{i_{k-1}} \dfrac{-g_{i(k)}(1-g_{i(k-1)})|z_{i(k)}|}{1}} \tag{22}$$

є мажорантою ГЛДзНЗ (1).

Для ГЛДзНЗ (22) правильні співвідношення, аналогічні до (4),

$$\widetilde{Q}^{(s)}_{i(s)} = 1, \quad \widetilde{Q}^{(s)}_{i(p)} = 1 - \sum_{i_{p+1}=1}^{i_p} \frac{g_{i(p+1)}(1-g_{i(p)})|z_{i(p+1)}|}{\widetilde{Q}^{(s)}_{i(p+1)}},$$

де $s \ge 1$, $1 \le p \le s-1$, $1 \le i_k \le i_{k-1}$, $1 \le k \le p$, $i_0 = N$. Міркуючи так, як і при доведенні нерівностей (9), можна показати правильність нерівностей

$$|Q^{(s)}_{i(k)}| \ge \widetilde{Q}^{(s)}_{i(k)} > g_{i(k)}, \quad s \ge 1, \quad 1 \le k \le s, \quad 1 \le i_n \le i_{n-1}, \quad 1 \le n \le k, \quad i_0 = N, \tag{23}$$

якщо виконуються умови (5), і

$$|Q^{(s)}_{i(k)}| \ge \widetilde{Q}^{(s)}_{i(k)} \ge g_{i(k)}, \quad s \ge 1, \quad 1 \le k \le s, \quad 1 \le i_n \le i_{n-1}, \quad 1 \le n \le k, \quad i_0 = N, \tag{24}$$

якщо виконуються умови (6).

Отже, всі $Q_{i(k)}^{(s)} \neq 0$, $\widetilde{Q}_{i(k)}^{(s)} > 0$ і при $n > m \geq 1$ маємо

$$|g_n - g_m| \leq \sum_{i_1=1}^{N} \sum_{i_2=1}^{i_1} \cdots \sum_{i_{m+1}=1}^{i_m} \frac{g_{i(1)}|z_{i(1)}| \prod_{k=2}^{m+1} g_{i(k)}(1-g_{i(k-1)})|z_{i(k)}|}{\prod_{k=1}^{m+1} |Q_{i(k)}^{(n)}| \prod_{k=1}^{m} |Q_{i(k)}^{(m)}|} \leq$$
$$\leq \sum_{i_1=1}^{N} \sum_{i_2=1}^{i_1} \cdots \sum_{i_{m+1}=1}^{i_m} \frac{g_{i(1)}|z_{i(1)}| \prod_{k=2}^{m+1} g_{i(k)}(1-g_{i(k-1)})|z_{i(k)}|}{\prod_{k=1}^{m+1} \widetilde{Q}_{i(k)}^{(n)} \prod_{k=1}^{m} \widetilde{Q}_{i(k)}^{(m)}} \leq -(\widetilde{g}_n - \widetilde{g}_m),$$

де $g_n$, $\widetilde{g}_n$ – $n$-і апроксиманти ГЛДзНЗ (1) і (22) відповідно. Звідси випливає, що послідовність $\{\widetilde{g}_n\}$ монотонно спадає і на підставі нерівностей (23) або (24) обмежена знизу

$$\widetilde{g}_n = 1 - \sum_{i_1=1}^{N} \frac{g_{i(1)}|z_{i(1)}|}{\widetilde{Q}_{i(1)}^{(n)}} \geq 0, \quad n \geq 1.$$

Тому існує скінченна границя $\widetilde{g} = \lim_{n\to\infty} \widetilde{g}_n$, а, отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |g_{n+1} - g_n|$ є збіжним, тобто ГЛДзНЗ (1) – абсолютно збіжний.

Застосовуючи співвідношення (19) і (23) або (24) до формули різниці двох апроксимант ГЛДзНЗ (22) і враховуючи, що $(1-g_{i(k)})/g_{i(k)} \leq (1-\nu_k)/\nu_k$ для всіх $i(k) \in \mathcal{J}$, при $n > m \geq 1$ отримаємо

$$\widetilde{g}_m - \widetilde{g}_n < \prod_{k=1}^{m} \frac{1-\nu_k}{\nu_k}, \tag{25}$$

де $\nu_k$ – означені в (21), звідки випливає, що ГЛДзНЗ (1) абсолютно і рівномірно збіжний. □

**Теорема 5.** *Нехай елементи ГЛДзНЗ* (2) *задовольняють умови* (15) *або* (16)*. Тоді ГЛДзНЗ* (2) *абсолютно збіжний, якщо виконуються умови* (19)*. Якщо, крім того, виконується умова* (20)*, то ГЛДзНЗ* (2) *абсолютно і рівномірно збіжний.*

Д о в е д е н н я. Використовуючи співвідношення (23) або (24), які правильні для ГЛДзНЗ (1), можна показати, що область значень ГЛДзНЗ (1) є круг $|z-1| \leq 1-g_0$. Тому, міркуючи так, як і при доведенні теореми 3, переконуємося у правильності першої частини теореми. Друга частина теореми випливає з нерівності (25). □

Нехай $\mathcal{I} = \{1, 2, \ldots, N\}$ – множина індексів. Побудуємо такі множини мультиіндексів:

$$\mathcal{J}_1 = \{i(1) :\ i_1 \in \mathcal{I},\ g_{i(1)} \neq 0\},$$
$$\mathcal{J}_k = \{i(k) :\ i(k-1) \in \mathcal{J},\ i(k-1) \in \mathcal{J}_{k-1},\ g_{i(k)} \neq 0\}, \quad k \geq 2,$$

де $\mathcal{J}$ – означено в (3), а також підмножини індексів множини $\mathcal{I}$

$$\mathcal{I}_0 = \{i_1 :\ i_1 \in \mathcal{I},\ g_{i(1)} \neq 0\},$$
$$\mathcal{I}_{i(k)} = \{i_{k+1} :\ i_{k+1} \in \mathcal{I},\ g_{i(k+1)} \neq 0,\ i(k) \in \mathcal{J}_k\}, \quad i(k) \in \mathcal{J}.$$

Вважатимемо, що множина $\mathcal{J}_n$ порожня, якщо $g_{i(n)} = 0$, $1 \leq i_n \leq i_{n-1}$, для всіх $i(n-1) \in \mathcal{J}_{n-1}$ при $n \geq 2$; підмножина $\mathcal{I}_{i(n)}$ порожня, якщо $g_{i(n+1)} = 0$, $1 \leq i_{n+1} \leq i_n$, або $i(n) \notin \mathcal{J}_n$ при $n \geq 1$.

**Теорема 6.** *Нехай елементи ГЛДзНЗ* (2) *задовольняють умови* (5) *і* (19). *Тоді ГЛДзНЗ* (2) *збігається, якщо виконується одна з умов:*

1) $\sum_{i_1\in\mathcal{I}_0} z_{i(1)} \neq -1$ *або* $\sum_{i_1=1}^{N} g_{i(1)} = 0$;

2) *існують натуральне число* $n$ *і мультиіндекс* $i(n)$, $i(n) \in \mathcal{J}_n$, *такі, що* $\sum_{i_{n+1}\in\mathcal{I}_{i(n)}} z_{i(n+1)} \neq -1$ *або* $\sum_{i_{n+1}=1}^{i_n} g_{i(n+1)} = 0$.

Доведення. Згідно з теоремою 4 усі залишки $Q_0$, $Q_{i(n)}$, $i(n)\in\mathcal{J}$, ГЛДзНЗ (2) збігаються. Використовуючи співвідношення (23), які правильні для ГЛДзНЗ (2), можна показати правильність нерівностей $|Q_0-1|\le 1$ і (10).

Для розбіжності ГЛДзНЗ (2) треба, щоб

$$Q_0 = 1 + \lim_{s\to\infty}\sum_{i_1=1}^{N}\frac{g_{i(1)}z_{i(1)}}{Q_{i(1)}^{(s)}} = 0.$$

Очевидно, що ГЛДзНЗ (2) збігається, якщо $g_{i(1)} = 0,\ 1\le i_1\le N$. Нехай $\mathcal{I}_0\neq\emptyset$. Тоді, враховуючи нерівності (23), останнє співвідношення запишемо як

$$\lim_{s\to\infty}\sum_{i_1\in\mathcal{I}_0}\frac{g_{i(1)}z_{i(1)}}{Q_{i(1)}^{(s)}} = \sum_{i_1\in\mathcal{I}_0}\frac{g_{i(1)}z_{i(1)}}{Q_{i(1)}} = -1. \tag{26}$$

Оскільки $\sum_{i_1=1}^{N}|z_{i(1)}|\le 1$ і $|Q_{i(1)}|\ge g_{i(1)},\ 1\le i_1\le N$, то повинні виконуватися такі умови:

$$\sum_{i_1\in\mathcal{I}_0}|z_{i(1)}| = 1,\quad \frac{g_{i(1)}}{Q_{i(1)}} = 1 \quad \text{для всіх}\quad i_1\in\mathcal{J}_1. \tag{27}$$

Зі співвідношень (10), (26) і (27) випливає, що $Q_{i(1)} = g_{i(1)}$ для всіх $i_1\in\mathcal{J}_1$ і $\sum_{i_1\in\mathcal{I}_0} z_{i(1)} = -1$. Оскільки

$$Q_{i(1)} = 1 + (1-g_{i(1)})\lim_{s\to\infty}\sum_{i_2=1}^{i_1}\frac{g_{i(2)}z_{i(2)}}{Q_{i(2)}^{(s)}},\quad 1\le i_1\le N,$$

то

$$\lim_{s\to\infty}\sum_{i_2=1}^{i_1}\frac{g_{i(2)}z_{i(2)}}{Q_{i(2)}^{(s)}} = -1 \quad \text{для всіх}\quad i_1\in\mathcal{J}_1.$$

Очевидно, що ГЛДзНЗ (2) збігається, якщо існує індекс $i_p\in\mathcal{I}_0$ такий, що множина $\mathcal{I}_{i_p}$ порожня. Нехай $\mathcal{I}_{i(1)}\neq\emptyset$ для всіх $i_1\in\mathcal{J}_1$. Тоді для розбіжності ГЛДзНЗ (2) треба, щоб

$$\sum_{i_2\in\mathcal{I}_{i(1)}}\frac{g_{i(2)}z_{i(2)}}{Q_{i(2)}} = -1 \quad \text{для всіх}\quad i_1\in\mathcal{J}_1,$$

звідки, як і вище, отримаємо, що $Q_{i(2)} = g_{i(2)}$ для всіх $i(2)\in\mathcal{J}_2$ і $\sum_{i_2\in\mathcal{I}_{i(1)}} z_{i(2)} = -1$ для всіх $i_1\in\mathcal{J}_1$. Застосовуючи далі метод математичної індукції при $\mathcal{I}_0\neq\emptyset$ і

$\mathcal{I}_{i(k)} \neq \emptyset$ для всіх $i(k) \in \mathcal{J}_k,\ k \geq 1$, доходимо висновку, що для розбіжності ГЛДзНЗ (2) необхідно виконати умови

$$\sum_{i_1 \in \mathcal{I}_0} z_{i(1)} = -1, \qquad \sum_{i_k \in \mathcal{I}_{i(k-1)}} z_{i(k)} = -1 \quad \text{для всіх} \quad i(k-1) \in \mathcal{J}_{k-1}, \quad k \geq 2.$$

Тому виконання умови 1 або 2 забезпечує збіжність ГЛДзНЗ (2). □

**3. Висновки.** Отримані у цій праці результати є багатовимірним узагальненням ознак збіжності неперервних дробів

$$1 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{g_k(1-g_{k-1})z_k}{1} \quad \text{і} \quad \left(1 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{g_k(1-g_{k-1})z_k}{1}\right)^{-1},$$

де $g_n,\ n \geq 0$, – дійсні сталі такі, що $0 \leq g_n \leq 1$, $n \geq 0$, $z_k,\ k \geq 1$, – комплексні змінні.


1. *Баран О.Є.* Деякі ознаки збіжності гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними / *Баран О.Є.* // Вісник ДУ "Львівська політехніка". – 1998. – №341. – С. 18-23.
2. *Боднар Д.И.* Ветвящиеся цепные дроби. / *Боднар Д.И.* – К.: Наук. думка, 1986. – 176 с.
3. *Боднар Д.И.* Признаки сходимости ветвящихся цепных дробей с частными звеньями вида $\frac{(1-g_{i_1,i_2,\dots,i_k})g_{i_1,i_2,\dots,i_k}x_{i_1,i_2,\dots,i_k}}{1}$ / *Боднар Д.И.* // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1982. – Вып. 15. – С. 30-35.
4. *Боднар Д.И.* Абсолютная сходимость четной и нечетной части двумерной соответствующей цепной дроби / *Боднар Д.И., Кучминская Х.И.* // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1983. – Вып. 18. – С. 30-34.
5. *Возна С.М.* Ознаки збіжності для двовимірного неперервного дробу спеціального вигляду / *Возна С.М., Кучмінська Х.Й.* // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Зб. наук. праць. Математика. – 2004. – Вип. 191–192. – С. 22-32.
6. *Дмитришин Р.І.* Про збіжність гіллястих ланцюгових дробів із частинними ланками вигляду $\frac{g_{i(k)}(1-g_{i(k-1)})z_{i_k}}{1}$ / *Дмитришин Р.І.* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – Вип. 43., №4. – С. 12-16.
7. *Kuchminskaja Ch.* On the convergence of two-dimensional continued fractions / *Kuchminskaja Ch.* // Constructive theory of functions. – Sofia.: Publishing House of the Bulgarian Acad. Sci., 1984. – P. 501-506.
8. *Wall H.S.* Analytic theory of continued fractions. / *Wall H.S.* – New York: Van Nostrand, 1948. – 433 p.

# ON SOME CONVERGENCE CRITERIA FOR BRANCHED CONTINUED FRACTIONS WITH NONEQUIVALENT VARIABLES

**Dmytro BODNAR**[1], **Roman DMYTRYSHYN**[2]

[1] *Ternopil State Economical University,*
*46000, Ternopil, L'vivs'ka Str., 11,*
*e-mail: dmytro_bodnar@hotmail.com*
[2] *Vasyl Stephanyk Precarpathian National University,*
*76000, Ivano-Frankivsk, Shevchenka Str., 57,*
*e-mail: dmytryshynr@hotmail.com*

We establish the convergence criteria of the branched continued fractions with nonequivalent variables with partial quotients of the form $\frac{g_{i(k)}(1-g_{i(k-1)})z_{i(k)}}{1}$.

*Key words:* branched continued fraction with nonequivalent variables, convergence, majorant.

Стаття надійшла до редколегії 14.04.2006

Прийнята до друку 22.10.2008