СВІТЛІЙ ПАМ'ЯТІ ПРОФЕСОРА С. П. ЛАВРЕНЮКА

(1946-2008)



4 червня 2008 року помер відомий український математик, професор, доктор фізико-математичних наук, заслужений професор Львівського національного університету імені Івана Франка — Сергій Павлович Лавренюк.

С. П. Лавренюк народився 4 листопада 1946 р. у селі Посива Острозького району Рівненської області в сім'ї селян. Після закінчення з золотою медаллю Кутянської середньої школи в 1964 р. він вступив на механіко-математичний факультет Львівського державного університету імені Івана Франка, який закінчив у 1969 р. за спеціальністю "Математика". З 1969 р. навчався в аспірантурі при кафедрі диференціальних рівнянь під керівництвом доц. Є. М. Парасюка. З 1972 р., після закінчення аспірантури, працював асистентом кафедри диференціальних рівнянь. У 1973 р. захистив кандидатську дисертацію "Про деякі обернені задачі теорії потенціалу", в якій досліджено умови єдиності та стійкості обернених задач теорії потенціалу. З 1974 р. С. П. Лавренюк працював на посаді старшого викладача, а з 1976 р. — на

посаді доцента кафедри диференціальних рівнянь. У 1983-1999 рр. С. П. Лавренюк — завідувач кафедри диференціальних рівнянь. У 1995 р. Сергій Павлович захистив докторську дисертацію "Задачі для еволюційних систем з виродженням, які містять другу похідну за часом", у якій побудовано класи коректності мішаних задач та задачі Фур'є для еволюційних систем з другою похідною за часом, частина рівнянь яких (або всі рівняння) вироджуються на деякій гіперплощині $\{t=const\}$.

1999-2006 рр. Сергій Павлович — професор кафедри диференціальних рівнянь. У 2004 році за особливі заслуги в розвитку науки і освіти, підготовку наукових кадрів вищої кваліфікації, багаторічну науково-педагогічну та громадську діяльність в університеті йому присвоїли почесне звання "Заслужений професор Львівського національного університету імені Івана Франка".

З 1999-2005 рр. Сергій Павлович одночасно з викладанням у Львівському національному університеті імені Івана Франка працював професором Краківської політехніки (Республіка Польща). Упродовж 2006-2008 рр. Сергій Павлович — завідувач кафедри математичної економіки та економетрії Львівського національного університету імені Івана Франка.

викладання на механіко-математичному факульте-Протягом усього часу ті Львівського національного університету імені Івана Франка професор Лавренюк С. П. читав лекції для студентів спеціальностей "Математика", "Економіка", "Механіка", "Прикладна математика та інформатика" з математичного аналізу, диференціальних рівнянь, методів оптимізації та варіаційного числення, рівнянь із частинними похідними, вищої математики, математичної економіки та економетрії. Його лекції вирізнялися чіткістю, логічно завершеною структурою, вмінням донести до слухача головні ідеї та принципи. С. П. Лавренюк прочитав у Львівському університеті також багато спеціальних курсів із диференціальних рівнянь, рівнянь математичної фізики та математичної економіки. Тематика цих спецкурсів розкривала широту його наукових інтересів: всі типи рівнянь із частинними похідними, варіаційні нерівності, економетрія, оптимальне керування в моделях макроекономіки. Студенти та співробітники механіко-математичного факультету на цих спецкурсах ознайомлювались з формулюванням та методикою дослідження багатьох задач і проблем. Часто їхні перші наукові спроби розпочинались із сформульованих Сергієм Павловчем задач.

Професор Лавренюк С. П. – автор близько 110 праць, серед яких є дев'ять навчальних посібників і підручників. Під його керівництвом захистили 13 кандидатських дисертацій.

Ми глибоко сумуємо з приводу смерті професора Лавренюка С. П., видатного вченого і педагога, надійного товариша і наставника. Віримо, що започатковані ним традиції, його ставлення до професійної математичної праці будуть продовжені у Львівському університеті та в багатьох наукових центрах України і Польщі теперішніми й майбутніми математиками.

НАУКОВА СПАДЩИНА С. П. ЛАВРЕНЮКА

Науковий шлях Сергія Павловича Лавренюка почався з дослідження обернених задач теорії потенціалу. Ці задачі коротко можна описати так. Нехай E(x), $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ $(n \geq 2)$, — фундаментальний розв'язок деякого еліптичного оператора,

наприклад, оператора Лапласа, а $\mu(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, — задана функція (густина). Для довільної області $D \subset \mathbb{R}^n$ з гладкою межею S розглядається об'ємний (плоский при n=2) потенціал

$$w(x; \mu, D) = \int_{D} \mu(y) E(x - y) dy$$

та потенціал простого шару

$$v(x; \mu, S) = \int_{S} \mu(y)E(x - y) dS_{y}.$$

Нехай G_0 , G_1 – деякі підмножини простору \mathbb{R}^n , $G_0 \cap G_1 = \emptyset$, причому G_0 – область в \mathbb{R}^n . При заданій функції μ розглядають відображення

$$G_0 \supset D \to w(x; \mu, D), x \in G_1, \quad \text{TA} \quad G_0 \supset S \to v(x; \mu, S), x \in G_1.$$

Виникають питання про існування та неперервність обернених до цих відображень. У цих питаннях— суть обернених задач теорії потенціалу. Якщо одне з цих відображень є ін'єктивним, то говорять про єдиність розв'язку відповідної задачі; якщо котресь з обернених відображень— неперервне, то кажуть, що відповідна задача є стійкою.

Сергій Павлович досліджував питання єдиності та стійкості обернених задач теорії потенціалу. Отримані ним резутьтати [1]-[7] покладено в основу кандидатської дисертації "Про деякі обернені задачі теорії потенціалу", яку він виконав під науковим керівництвом доц. Є. М. Парасюка та успішно захистив у 1973 р.

Після захисту кандидатської дисертації Сергій Павлович шукав нові напрями наукових досліджень. "Пробним каменем" були праці [8], [9], де розглядали питання стійкості за Ляпуновим деяких систем звичайних диференціальних рівнянь. Потім з'явились праці [10], [12], в яких таку саму проблему досліджували для рівняння коливання пластинки та його узагальнень. Сергій Павлович ще не раз повертався до цієї проблеми стосовно інших класів рівнянь і нерівностей [32], [33], [43], [45].

Питання стійкості за Ляпуновим розв'язків задач для еволюційних диференціальних рівнянь із частинними похідними тісно пов'язане з питанням про однозначну розв'язність таких задач. Тому Сергій Павлович почав розглядати і це питання. Першими у цьому напрямі є праці [11], [13], [14], [18], в яких досліджено однозначну розв'язність мішаних задач для рівняння коливання пластинки та подібні до нього. Далі С. П. Лавренюк дуже часто розглядав рівняння типу коливання пластинки. Він не раз говорив, що вони найулюбленіші для нього. Варто зауважити, що такі рівняння є важчими для дослідження порівняно з іншими еволюційними рівняння-

Сергій Павлович продовжив наукові пошуки і в теорії параболічних рівнянь, які є представниками великого класу еволюційних рівнянь з похідною першого порядку за часом. Оскільки теорія розв'язності класичних задач у просторах гладких функцій для таких рівнянь вже тоді була досить добре розроблена, то Сергій Павлович звернувся до некласичних задач [15]-[17].

Починаючи з [19], усі наступні наукові праці Сергія Павловича— це значна ділянка на ниві теорії диференціальних рівнянь із частинними похідними, на якій він

успішно та плідно працював. Цю ділянку можна коротко описати так: еволюційні рівняння та асоційовані з ними варіаційні нерівності, які характеризуються хоча б однією з таких властивостей: виродженість, необмежена область задання, степенева нелінійність. Під виродженістю еволюційного рівняння розуміють перетворення його в стаціонарне на гіперплощинах $\{t=\mathrm{const}\}$ для скінченної кількості значень часової змінної t. Необмеженість областей може бути або за просторовими змінними, або за часовою змінною (в напрямі $+\infty$ чи $-\infty$), або за всіма незалежними змінними. Для таких рівнянь і нерівностей С. П. Лавренюк розглядав питання існування та єдиності узагальнених розв'язків (із просторів Соболєва) відповідних задач і досліджував деякі властивості цих розв'язків, зокрема, поведінка при $t \to +\infty$.

Рівняння та варіаційні нерівності, з якими працював Сергій Павлович, можна розбити на дві великі групи: 1) еволюційні рівняння та варіаційні нерівності з другою похідною за часом; 2) еволюційні рівняння та варіаційні нерівності з першою похідною за часом.

Перша група, якщо говорити точніше, складається з рівнянь та асоційованих з ними варіаційних нерівностей, модельними прикладами яких ϵ частинні випадки рівняння

$$\varphi(t) u_{tt} + a(-\Delta)^m u + b(t)(-\Delta)^l u_t - c(t)\Delta_p u_t - d(t)\Delta_q u + g(t)|u_t|^{r-2} u_t + h(t)|u|^{s-2}u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q,$$
(1)

де $Q=\Omega\times I,\ \Omega$ — область (обмежена чи необмежена) в просторі \mathbb{R}^n $(n\geq 1);\ I$ — числовий проміжок одного з типів $(0,T),\ (0,+\infty)$ або $(-\infty,T);\ m,l$ — натуральні числа; $a=\mathrm{const}>0;\ \varphi,b,c,d,g,h$ — неперервні та невід'ємні на I функції, причому $\varphi(t)>0$ на множині $\overline{I}\setminus I_0,\$ де I_0 скінченна або порожня множина; p,q,r,s — числа, більші за 1, або функції від просторових змінних $x\in\Omega$ зі значеннями, більшими за 1; $\Delta_p\,v=\sum_{i=1}^n\left(|\nabla v|^{p-2}v_{x_i}\right)_{x_i}$ — p-лапласіан, f — задана функція. Зокрема, частинними випадками рівняння (1) є хвильове рівняння $u_{tt}-\Delta u=f,$ рівняння коливання пластинки $u_{tt}+\Delta^2 u+g\,u_t=f,$ параболічне за Петровським рівняння з другою похідною за часом $u_{tt}+(-\Delta)^m u-\Delta u_t=f.$

Частинні випадки рівняння (1), в які входять обов'язково перші два члени його лівої частини, генерують певні підгрупи рівнянь і варіаційних нерівностей з першої групи. Методики досліджень об'єктів кожної з цих підгруп принципово не відрізняються, а між підгрупами існує принципова різниця в підходах до вивчення та й, зрештою, в результатах. Опишемо ці підгрупи та результати стосовно них.

До першої підгрупи належать еволюційні рівняння та системи з другою похідною за часом "гіперболічного типу" вигляду

$$\Phi(x,t) u_{tt} + A(t) u + G(x,t) u_t = F(x,t),$$
(2)

де Φ , G — матричні функції; u, F — векторні функції; A(t) — сім'я лінійних еліптичних операторів [19]-[23], [25]-[28], [30], [31], [34], [35], [37]-[39], [66]. Типовим прикладом таких рівнянь є

$$t^{\alpha}u_{tt} + a(-\Delta)^{m}u + g(t)u_{t} = f(x,t), \qquad \alpha \ge 0,$$
(3)

зокрема, рівняння коливання пластинки (m=2).

Ці рівняння та системи розглядають у циліндрі $Q=\Omega\times I$, де Ω – обмежена область, а I може бути або інтервалом (0,T), або променем $(-\infty,T)$. На бічній поверхні циліндра $S=\partial\Omega\times I$ задають однорідні крайові умови типу Діріхле. Коли I=(0,T), то допускається, що рівняння вироджуються на деяких гіперплощинах $\{t=\mathrm{const}\}$ в стаціонарні рівняння і ставляться початкові умови, причому, коли виродження відбувається при t=0, то початкові умови мають спеціальний вигляд. Зокрема, у випадку рівняння (3) припускається, що $\alpha>0$, і вимагається виконання початкових умов вигляду

$$u(x,0) = 0,$$
 $\lim_{t \to +0} t^{\alpha/2} u_t(x,t) = 0.$

Якщо ж $I = (-\infty, 0)$, то розглядаються невироджені рівняння і задається поведінка розв'язку при $t \to -\infty$.

С. П. Лавренюк вперше дослідив розв'язність мішаних задач для рівнянь вигляду (2), які мають високий порядок за просторовими змінними і вироджуються [19]-[23], [25]-[27], [30], [31], [34], [35], [38], [66]. Під керівництвом Сергія Павловича цією тематикою займався також його учень Я. Сідельник.

У працях [28], [37], [39] вперше досліджено задачу Фур'є (задачу без початкових умов) для еволюційних рівнянь вигляду (2) та за певних умов на вихідні дані доведено її однозначну розв'язність.

Зауважимо, що праці [21]-[23], [25]-[28], [30], [31], [34], [35], [37]-[39] становили зміст докторської дисертації С. П. Лавренюка.

Другу підгрупу становлять еволюційні рівняння з другою похідною за часом "параболічного типу" вигляду

$$\Phi(x, t) u_{tt} + A(t) u + B(t) u_t + G(x, t) u_t = F(x, t),$$

де Φ, G — матричні функції; u, F — векторні функції; A(t), B(t) — сім'ї еліптичних операторів, перша з яких складається з лінійних операторів [36], [42], [50], [51], [63], [101]. Типовими прикладами цієї підгрупи є

$$t^{\alpha}u_{tt} + a(-\Delta)^{m}u + b(t)(-\Delta)^{l}u_{t} + g(t)u_{t} = f(x,t), \qquad \alpha \ge 0,$$
(4)

$$u_{tt} - a\Delta u - b(t)\Delta u_t - c(t)\Delta_{p(x)}u_t + g(t)|u_t|^{r(x)-2}u_t = f(x,t).$$
 (5)

За тих самих припущень щодо областей задання, типу виродження, крайових і початкових умов, як і у випадку першої підгрупи, для рівнянь другої підгрупи, типовим прикладом яких є рівняння (4), С. П. Лавренюк вперше отримав класи однозначної розв'язності мішаних задач за наявності виродження (у вагових просторах Соболєва) та задачі Фур'є для рівнянь без виродження.

У кінці XX ст. математики почали розглядати задачі для нелінійних рівнянь, в яких порядок нелінійності залежить від незалежних змінних. Під час їхнього дослідження виникають так звані узагальнені простори Лебега $L^{p(x)}$ та Соболєва $W^{k,p(x)}$. Такі задачі зацікавили і С. П. Лавренюка. Він і О. М. Бугрій довели деякі нові властивості узагальнених просторів Лебега та Соболєва. Використовуючи ці результати, С. П. Лавренюк для рівнянь, представником яких є рівняння (5), вперше дослідив

крайові задачі й одержав умови існування та єдиності їхніх розв'язків [89], [108], [109].

До третьої підгрупи входять гіперболічні рівняння та нерівності другого порядку [25], [77], [90], [97], [102], [103], [104], типові приклади яких отримують як частинні випадки рівняння

$$u_{tt} - \Delta u + g(t)|u_t|^{r-2}u_t + h(t)|u|^{s-2}u = f(x,t).$$
(6)

С. П. Лавренюк з учнями М. О. Колінько і П. Я. Пукачем вперше дослідили задачу Φ ур'є для класу нелінійних гіперболічних рівнянь другого порядку, модельним прикладом яких є рівняння (6) при r>2, h=0. У випадку обмежених за просторовими змінними областей задання рівнянь знайдено достатні умови існування та єдиності розв'язку цієї задачі в класі функцій, обмежених за часовою змінною.

Відомо, що при дослідженні лінійних рівнянь гіперболічного типу важливу роль відіграють поняття характеристичного конуса та поверхні. Проф. Лавренюк запропонував використати ці поняття для вивчення мішаної задачі в необмеженій області для класу нелінійних гіперболічних рівнянь другого порядку, модельним прикладом яких є рівняння (6) при r>2, h=0. У результаті отримано умови існування та єдиності розв'язку цієї задачі в класах функцій з довільною поведінкою на нескінченності, і при цьому показник нелінійності не зв'язаний з розмірністю області.

С. П. Лавренюк з учнем П. Я. Пукачем дослідили слабко нелінійні гіперболічні варіаційні нерівності другого порядку в обмеженій за часовою змінною та необмеженій за просторовими змінними області. Ці нерівності асоційовані з рівняннями, типовим прикладом яких ϵ (6) при r>2, h=0. Такі нерівності у необмеженій області розглядали вперше, що зумовило певні труднощі з формулюванням задачі і з поняттям розв'язку. Сергій Павлович запропонував поняття слабкого розв'язку варіаційної нерівності в необмеженій області як певну границю сильних розв'язків відповідних нерівностей в обмежених областях. При певних припущеннях на вихідні дані, зокрема, деякому співвідношенню між показником нелінійності та розмірністю простору, було доведено існування та єдиність слабких розв'язків досліджуваних нерівностей.

С. П. Лавренюк доволі часто повертався до своїх попередніх досліджень, уточнював та узагальнював отримані раніше результати. Він разом з ученицею О. Т. Панат розглянув мішану задачу для нелінійних зі змінними показниками нелінійності гіперболічних рівнянь, типовим прикладом яких є рівняння (6) при r=r(x)>2, s=s(x)>2, $x\in\Omega$, в області $Q=\Omega\times(0,T)$, де Ω — необмежена область в \mathbb{R}^n . За певних умов на коефіцієнти рівняння і початкові дані доводиться, що досліджувана задача має єдиний локально інтегровний узагальнений розв'язок.

Розглянемо тепер результати, які стосуються другої групи рівнянь, а саме, еволюційних рівнянь з першою похідною за часом. Тут можна виділити чотири підгрупи.

До першої з таких підгруп належать нелінійні параболічні рівняння та варіаційні нерівності [41], [48], [52], [55], [61], [70], [83], [91], [93], [100]. Типовим їхнім прикладом ϵ рівняння

$$u_t - \Delta_{p(x)}u + b|u|^{q(x)-2}u = f(x,t),$$

де p, q — вимірні функції зі значеннями, більшими за 1, b — стала, f — деяка функція.

Було розглянуто системи параболічних варіаційних нерівностей без початкових умов в обмежених за просторовими змінними областях і отримано умови існування та єдиності розв'язку в класах функцій, які мають певну поведінку при $t \to -\infty$.

С. П. Лавренюк разом з учнями О. М. Бугрієм, І. М. Медведем і Г. П. Доманською вперше дослідив нелінійні параболічні варіаційні нерівності в необмежених за просторовими й обмежених за часовою змінними областях. Отримані ними результати стосовно однозначної розв'язності цих нерівностей є в певному сенсі неполіпшуваними.

Другу підгрупу становлять псевдопараболічні рівняння та нерівності [40], [44], [47], [49], [54], [56], [57], [58], [62], [67], [69], [74], [92]. Псевдопараболічними називають рівняння, які можна подати у вигляді

$$M(t) u_t + A(t) u = F,$$

де M(t), A(t) – сім'ї еліптичних операторів, причому оператори сім'ї M(t) є ін'єктивними

С. П. Давренюк і його учні М. О. Колінько, Г. П. Доманська та М. Б. Пташник вперше вивчили задачу без початкових умов у необмежених за часовою змінною (в напрямі $-\infty$) та мішану задачу в необмежених за просторовими змінними областях для нелінійних псевдопараболічних рівнянь і систем, а також для варіаційних псевдопараболічних нерівностей. Знайдено класи існування та єдиності узагальнених розв'язків таких задач.

До третьої підгрупи належать гіперболічні системи рівнянь і нерівностей першого порядку [59], [60], [68], [72], [75], [80], [81], [88].

С. П. Лавренюк та його учні І. Я. Кміть, М. О. Оліскевич, Н. І. Гузіль і Л. Заремба (L. Zaręba) досліджували в необмежених областях мішані задачі та задачу Фур'є для півлінійних гіперболічних систем першого порядку з багатьма незалежними змінними

$$u_t + \sum_{i=1}^{l} A_i(x, t) u_{x_i} + C(x, t) u + g(t, u) = f(x, t),$$
(7)

де u, g, f – вектор-стовпці, A_i, C – квадратні матриці. Для цих задач отримано умови існування та єдиності розв'язку без припущень щодо поведінки даних задачі і розв'язку на нескінченності. Це принципово нові результати для згаданих рівнянь. Також знайдено умови існування та єдиності розв'язку систем варіаційних гіперболічних нерівностей першого порядку в обмеженій області.

Четверту підгрупу становлять ультрапараболічні рівняння типу Колмогорова, до яких приводять імовірнісні моделі броунівського руху. До початку XXI століття для рівнянь такого типу здебільшого вивчали задачу Коші. Праці [71], [73], [76], [82], [84], [85], [87], [94], [96], [99], [105], [106] С. П. Лавренюка та його учнів Н. П. Процах, Н. І. Гузіль, Г. М. Барабаш, М. О. Оліскевич присвячено розв'язності мішаних задач та задачі Фур'є в необмежених областях для нелінійних ультрапараболічних рівнянь і систем, які є певним узагальненням рівняння Колмогорова дифузії з інерцією:

 $u_t - x \, u_y - a^2 \, u_{xx} = f(x,y,t)$, зокрема для системи рівнянь

$$u_{t} + \sum_{i=1}^{l} A_{i}(x, y, t) u_{y_{i}} - \sum_{i,j=1}^{n} (B_{ij}(x, y, t) u_{x_{i}})_{x_{j}} + \sum_{i=1}^{n} B_{i}(x, y, t) u_{x_{i}} + C(x, y, t) u + g(x, t, u) = f(x, y, t),$$

$$(5)$$

де u, g, f – вектор-стовиці, A_i, B_{sj}, B_j, C – квадратні матриці.

С. П. Лавренюк запропонував поняття сильного та слабкого розв'язку мішаних задач в необмежених областях для ультрапараболічних рівнянь, які подібні до тих, що є в теорії Р. Лакса стосовно гіперболічних операторів. Їх використано при вивченні розв'язності задачі без початкових умов, мішаних задач і варіаційних нерівностей для нелінійних ультрапараболічних рівнянь, які містять нелінійності степеневого вигляду, в необмежених областях за часовою чи просторовими змінними. Вперше у випадку мішаних задач і варіаційних нерівностей для ультрапараболічних рівнянь доведено розв'язність у необмежених областях без припущень на зростання вихідних даних. Також доведено розв'язність мішаних задач та варіаційних нерівностей для ультрапараболічних рівнянь в узагальнених просторах Лебега у випадку обмежених областей. Знайдено певні оцінки розв'язків мішаних задач для ультрапараболічних рівнянь.

Варто зазначити, що Сергій Павлович мав великі плани щодо розширення тематики наукових досліджень. Про це можна стверджувати на підставі праць [100], [101], [108], [109], в яких він разом з учнями О. Є. Коркуною, О. Т. Панат і Г. Р. Торган досліджував нові класи рівнянь, а також проблему необмеженості розв'язків нелінійних рівнянь у скінченний момент часу. Сергій Павлович також цікавився питанням економетричного моделювання [98].

Р. В. Андрусяк, Г. М. Барабаш, О. І. Бобик, М. М. Бокало, О. М. Бугрій, Ю. Д. Головатий, Г. Є. Грабчак, Н. М. Гринців, Г. П. Доманська, М. І. Іванчов, С. Д. Івасишен, П. І. Каленюк, В. М. Кирилич, І. Я. Кміть, В. А. Козицький, Г. П. Лопушанська, М. О. Оліскевич, Н. П. Процах, П. Я. Пукач, Б. Й. Пташник, В. М. Флюд

СПИСОК КАНДИДАТСЬКИХ ДИСЕРТАЦІЙ, ЗАХИЩЕНИХ ПІД КЕРІВНИЦТВОМ С. П. ЛАВРЕНЮКА

- 1. *Сідельник Ярослав Іванович*. Змішані задачі для вироджених рівнянь типу коливання пластинки. 24.10.1990. Чернівці.
- 2. *Кміть Ірина Ярославівна*. Нелокальні задачі для гіперболічних систем першого порядку. 17.12.1992. Львів.
- 3. *Пукач Петро Ярославович*. Змішані задачі для параболічних рівнянь та систем з виродженням. 18.11.1993. Львів.
- 4. *Колінько Марія Омелянівна*. Задачі Фур'є для параболічних та псевдопараболічних рівнянь та систем. 15.02.1996. Львів.

- 5. *Барабаш Галина Михайлівна*. Стійкість за Ляпуновим деяких еволюційних рівнянь і систем з другою похідною за часом. 18.06.1998. Львів.
- 6. *Оліскевич Маріанна Олександрівна*. Стійкість розв'язків мішаних задач для гіперболічних рівнянь і систем. 19.11.1998. Львів.
- Lech Zaręba. Zagadnienia dla układów hiperbolicznych rzędu pierwszego. 5.05.2001.
 Kraków.
- 8. *Бугрій Олег Миколайович*. Параболічні варіаційні нерівності без початкових умов. 18.04.2002. Львів.
- 9. Доманська Галина Петрівна. Задачі для псевдопараболічних систем та варіаційних нерівностей в необмежених областях. 18.04.2002. Львів.
- 10. *Процах Наталія Петрівна*. Задачі для еволюційних рівнянь та систем високого порядку з виродженням. 20.02.2003. Львів.
- 11. Katarzyna Urbanska. Zagadnienia dla równań parabolicznych rzędu drugiego w obszarach nieograniczonych. 05.05.2004. Kraków.
- 12. Гузіль Наталія Іванівна. Задачі для гіперболічних систем першого порядку та ультрапараболічних систем у необмежених областях. 10.11.2005. Львів.
- 13. *Медвідь Іван Миколайович*. Задачі для параболічних та еліптичних рівнянь в необмежених областях. 08.05.2008. Львів.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ С. П. ЛАВРЕНЮКА

- 1. *Лавренюк С. П.* Єдиність розв'язку оберненої задачі потенціалу простого шару / *Лавренюк С. П.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. 1972. Вип. 7. С. 98-99.
- 2. *Лавренюк С. П.* Про метод редукції для нелінійних систем / *Лавренюк С. П.*, *Парасюк Є. М.* // Укр. мат. журн. 1973. Т. 25, № 4. С. 546-549.

- 5. *Лавренюк С. П.* Єдиність і стійкість деяких обернених задач теорії потенціалу / *Лавренюк С. П.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. 1975. Вип. 10. С. 20-23.

- 8. *Лавренюк С. П.* Стійкість в цілому однієї неавтономної системи другого порядку / *Лавренюк С. П.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. 1978. Вип. 13. С. 16-19.
- 9. Лавренюк С. П. Про стійкість в цілому однієї системи рівнянь / Лавренюк С. П. // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. 1979. Вип. 14. С. 66-69.

- Лавренюк С. П. Стійкість за Ляпуновим нульового розв'язку рівняння коливання пластинки / Лавренюк С. П. // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. – 1981. – Вип. 18. – С. 3-6.
- 11. *Лавренюк С. П.* Існування і єдиність розв'язку рівняння коливання пластинки / *Лавренюк С. П.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. 1981. Вип. 18. С. 6-11.
- 12. $\it Лавренюк C. П.$ Стійкість за Ляпуновим однієї змішаної задачі для рівняння четвертого порядку / $\it Лавренюк C. П.$ // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. 1982. Вип. 20. С. 22-25.
- 13. Івахненко Л. Я. Існування узагальненого розв'язку однієї змішаної задачі для рівняння типу коливання пластинки / Івахненко Л. Я., Лавренюк С. П. // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. 1983. Вип. 21. С. 68-73.
- 14. $\it Лавренюк C. П.$ Існування узагальненого розв'язку однієї змішаної задачі для рівняння четвертого порядку / $\it Лавренюк C. П.$ // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. 1983. Вип. 21. С. 64-68.
- 15. *Лавренюк С. П.* Нелокальна задача для квазілінійного параболічного рівняння / *Лавренюк С. П.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. 1985. Вип. 24. С. 3-6.
- Лавренюк С. П. Нелокальні задачі для еліптичних рівнянь з параметром і параболічних рівнянь / Лавренюк С. П. // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. 1986. Вип. 25. С. 3-5.

- Лавренюк С. П. Існування розв'язку задачі Коші для рівняння типу поперечних коливань стержня з виродженням / Лавренюк С. П. // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. 1988. Вип. 30. С. 3-5.
- Лавренюк С. П. Про слабу збіжність узагальнених розв'язків рівняння типу поперечних коливань стержня / Лавренюк С. П. // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. 1989.

 Вип. 32. С. 3-5.
- 21. Лавренюк С. П. Смешанная задача для вырождающегося уравнения типа колебания пластины / Лавренюк С. П. // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 8. С. 1375-1383.
- 22. Лавренюк С. П. О существовании обобщенных решений задачи Коши для вырождающегося уравнения типа колебания пластины / Лавренюк С. П. // Современный анализ и его приложение. 1989. С. 93-99.
- 23. *Лавренюк С. П.* Задача Коши для сильно вырождающегося уравнения типа колебания пластины / *Лавренюк С. П.* // Нелинейные граничные задачи. − 1989. − № 1. − С. 64-67.

- 26. Лавренюк С. П. Задача Коши для вырождающегося уравнения типа колебания пластины / Лавренюк С. П. // Мат. методы и физ.-мех. поля. 1990. $\mathbb N$ 32. С. 79-81.
- 27. Лавренюк С. П. Про задачу без початкових умов для рівняння типу коливання пластинки / Лавренюк С. П. // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1990. № 6.– С. 26-28.

- 28. *Лавренюк С. П.* Задача для одного эволюционного уравнения в полуограниченном по времени цилиндре / *Лавренюк С. П.* // Укр. мат. журн. 1990. Т. 42, № 11. С. 1481-1486.
- Лавренюк С. П. Про одну змішану задачу для рівняння типу коливання пластинки / Лавренюк С. П. // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1991. – № 7. – С. 23-25.
- Лавренюк С. П. Змішана задача для рівняння типу коливання пластинки, що сильно вироджується / Лавренюк С. П. // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. – 1991. – Вип. 36. – С. 3-5.
- 31. Лавренюк С. П. Смешанная задача для уравнения типа колебания пластинки, вырождающегося в конечный момент времени / Лавренюк С. П. // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 12. С. 2099-2106.
- 32. *Лавренюк С. П.* Про стійкість за Ляпуновим однієї еволюційної системи / *Лавренюк С. П.* // Доп. АН України. Сер. А. 1992. № 2. С. 9-11.
- Лавренюк С. П. Об устойчивости поперечных колебаний стержня с острым краем / Лавренюк С. П. // Нелинейные граничные задачи. – 1992. – № 4. – С. 12-20.
- 34. *Лавренюк С. П.* Змішана задача для однієї слабо виродженої еволюційної системи / *Лавренюк С. П.* // Доп. АН України. Сер. А. 1993. № 5. С. 18-20.
- 35. Лавренюк С. П. Задача з видозміненими початковими умовами для однієї еволюційної системи, яка вироджується у початковий момент часу / Лавренюк С. П. // Доп. АН України. Сер. А. 1993. № 6. С. 12-15.
- Лавренюк С. П. Задача без начальных условий для одной эволюционной системы. Условия единственности / Лавренюк С. П. // Нелинейные граничные задачи. – 1993.
 № 5. – С. 53-58.
- 38. *Лавренюк С. П.* Смешанная задача для сильно вырождающейся эволюционной системы / *Лавренюк С. П.* // Дифференц. уравнения. − 1994. − Т. 30, № 8. − С. 1405-1411.
- Лавренюк С. П. Задача без початкових умов для однієї еволюційної системи з другою похідною за часом / Лавренюк С. П. // Доп. НАН України. Сер. А. 1995. № 7. С. 8-11
- 40. *Бас М. О.* Про єдиність розв'язку задачі Фур'є для однієї системи типу Соболєва-Гальперна / *Бас М. О.*, *Лавренюк С. П.* // Укр. мат. журн. 1996. Т. 48, № 1. С. 124-128.
- 41. Лавренюк С. П. Параболические вариационные неравенства без начальных условий / Лавренюк С. П. // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, № 10. С. 1396-1400.
- Колінько М. О. Задача Фур'є для однієї еволюційної системи з другою похідною за часом / Колінько М. О., Лавренюк С. П. // Математичні студії. – 1996. – № 6. – С. 73-84.
- 44. *Колінько М. О.* Єдиність розв'язку задачі Фур'є для однієї нелінійної псевдопараболічної системи / *Колінько М. О.*, *Лавренюк С. П.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. 1996. Вип. 45. С. 71-77.
- 45. Лавренюк С. П. Стабілізація розв'язків задачі без початкових умов для системи типу Нав'є-Стокса / Лавренюк С. П., Онишкевич Г. М. // Препринт N 7. Львів, Інститут прикладних проблем механіки і математики, 1996. 38 с.

- 47. *Колінько М. О.* Існування розв'язку однієї нелінійної псевдопараболічної системи / *Колінько М. О.*, *Лавренюк С. П.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1997. Вип. 48. С. 44-49.
- 48. *Лавренюк С. П.* Системи параболічних варіаційних нерівностей без початкових умов / *Лавренюк С. П.* // Укр. мат. журн. − 1997. − Т. 49, № 4. − С. 540-547.
- 49. *Лавренюк С. П.* Псевдопараболічні варіаційні нерівності без початкових умов / *Лавренюк С. П.*, *Пташник М. Б.* // Укр. мат. журн. 1998. Т. 50, № 7. С. 919-929.
- 50. Лавренюк С. П. Про єдиність розв'язку деяких еволюційних систем з виродженням / Лавренюк С. П. // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1998. Вип. 51. С. 55-60.
- 51. Lavrenyuk S. P. On the uniqueness of solution of a mixed problem for one degenerated evolutional system / Lavrenyuk S. P. // Математичні студії. 1998. Т. 9, № 1. С.21-28.
- 52. Лавренюк С. П. Системи параболічних варіаційних нерівностей без початкових умов з довільною поведінкою розв'язку на нескінченності / Лавренюк С. П. // Доп. НАН України. 1998. № 2. С. 40-43.
- Lavrenyuk S. P. Fourier problem for linear Sobolev-Halperin system / Lavrenyuk S. P., Kolinko M. O. // Demonstratio mathematica. – 1998. – Vol. 31, № 1. – P. 26-32.
- Lavrenyuk S. P. Parabolic variational inequalities without initial data / Lavrenyuk S. P. // Нелинейные граничные задачи. 1998. № 8. С.173-178.
- 56. Domans'ka H. The Fourier problem for one nonlinear pseudoparabolic equation in unbounded domain / Domans'ka H., Lavrenyuk S. // Математичні студії. 1999. Т. 12, № 2. С. 149-160.
- 57. Лавренюк С. П. Деякі нелінійні псевдопараболічні варіаційні нерівності без початкових умов / Лавренюк С. П., Пташник М. Б. // Укр. мат. журн. 1999. Т. 51, № 3. С.328-337.
- 58. *Лавренюк С. П.* Задача без начальных условий для нелинейной псевдопараболической системы / *Лавренюк С. П.*, *Пташник М. Б.* // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 5. С. 667-673.
- 59. Lavrenyuk S. P. Nonlocal problem for the nonlinear hyperbolic system of the first order without initial conditions / Lavrenyuk S. P., Zaręba L. // Математичні студії. 2000. Т. 14, № 2. С. 150-158.
- 60. Lavrenyuk S. The initial-boundary value problem for the first order degenerated hyperbolic system / Lavrenyuk S., Zaręba L. // Demonstratio Matematica. 2000. Vol. 33, № 1. P. 75-82.
- 61. *Бугрій О. М.* Мішана задача для параболічного рівняння, яке узагальнює рівняння політропної фільтрації / *Бугрій О. М.*, *Лавренюк С. П.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. 2000. Вип. 56. С. 33-43.
- 62. Лавренюк С. П. Задача Фур'є для псевдопараболічного рівняння / Лавренюк С. П., Пташник М. Б. // Нелинейные граничные задачи. 2000. № 10. С. 123-135.
- 63. Лавренюк С. П. Мішана задача для одного нелінійного параболічного рівняння / Лавренюк С. П., Процах Н. П. // Мат. методи і фіз.-мех. поля. 2000. Т. 43, № 3. С. 56-63.
- 64. *Лавренюк С. П.* Внутрішня гладкість розв'язку мішаної задачі для еволюційної системи з виродженням / *Лавренюк С. П.*, *Процах Н. П.* // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". Сер. прикладна матем. 2000. № 411. С. 200-202.

- 65. *Лавренюк С. П.* Математичні основи мікроекономіки: ч.1. Теорія споживання. 80 с.; ч.2. Теорія виробництваю 70 с. ; ч.3. Теорія рівноваги. 102 с. / *Лавренюк С. П.* Львів: Вид. Львів. ун-ту, 2000.
- 66. Лавренює С. П. Решение почти всюду смешанной задачи для одной вырождающейся линейной эволюционной системы / Лавренює С. П. // Сиб. матем. журн. 2001. Т. 42, № 1. С. 76-86.
- 67. Доманська Г. П. Мішана задача для однієї псевдопараболічної задачі в необмеженій області / Доманська Г. П., Лавренюк С. П. // Укр. мат. журн. 2001. Т. 53, № 1. С. 123-129.
- 68. Лавренюк С. П. Мішана задача для слабко нелінійної системи гіперболічних рівнянь з виродженням / Лавренюк С. П., Оліскевич М. О. // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. 2001. Вип. 59. С. 139-147.
- 69. Domanska G. The initial-boundary value problem for some pseudoparabolic system in unbounded domain / Domanska G., Lavrenyuk S. // Acta matematica (Universitatis Iagellonicae). 2001. T. 39. P. 229-238.
- Бугрій О. М. Параболічна варіаційна нерівність, що узагальнює рівняння політропної фільтрації / Бугрій О. М., Лавренюк С. П. // Укр. мат. журн. – 2001. – Т. 53, № 7 – С. 867-868.
- 71. *Лавренюк С. П.* Мішана задача для ультрапараболічного рівняння в необмеженій області / *Лавренюк С. П.*, *Процах Н. П.* // Укр. мат. журн. 2002. Т. 54, № 8. С. 1053-1066.
- 72. Лавренюк С. Задача Фур'є для однієї нелінійної системи гіперболічних рівнянь з трьома незалежними змінними / Лавренюк С., Оліскевич М. // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. 2002. Вип. 60. С. 80-91.
- 73. *Лавренюк С. П.* Задача Фур'є для ультрапараболічного рівняння / *Лавренюк С. П.*, *Процах Н. П.* // Нелинейные граничные задачи. 2002. № 12. С. 128 139.
- 74. Domans'ka G. P. The initial-boundary problem for nonlinear pseudoparabolic system / Domans'ka G. P., Lavrenyuk S. P. // Математичні студії. 2002. Т. 17, № 2. С. 175-188.
- 75. $_{\it Лавренюк}$ С. П. Метод Гальоркіна для гіперболічних систем першого порядку з двома незалежними змінними / $_{\it Лавренюк}$ С. П., Оліскевич М. О. // Укр. мат. журн. 2002. Т. 54, № 10. С. 1356-1370.
- 76. *Барабаш Г. М.* Мішана задача для напівлінійного ультрапараболічного рівняння / *Барабаш Г. М., Лавренюк С. П., Процах Н. П.* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2002. Т. 45, № 4. С. 27-34.
- 77. *Колінько М.* Задача Фур'є для нелінійного гіперболічного рівняння другого порядку / *Колінько М.*, *Лавренюк С.*, *Пукач П.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. 2003. Вип. 62. С. 67-79.
- 79. Козицький В. А. Основи математичної економіки. Теорія споживання / Козицький В. А., Лавренюк С. П., Оліскевич М. О. Львів, 2004. 264 с.
- 80. Лавренюк С. П. Задача без начальных условий для вырождающейся гиперболической системы первого порядка / Лавренюк С. П., Олискевич М. А. // Укр. матем. вісн. 2004. Т. 1, № 2. С. 86-101.
- Гузіль Н. І. Задача без початкових умов для гіперболічної системи першого порядку / Гузіль Н. І., Лавренюк С. П. // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2004. – Т. 47, № 2. – С. 108-115.

- 82. Лавренюк С. П. Варіаційні ультрапараболічні нерівності / Лавренюк С. П., Процах Н. П. // Укр. мат. журн. – 2004. – Т. 56, № 12. – С. 1616-1628.
- 83. Доманська Г. П. Параболічні варіаційні нерівності в необмежених областях зі зростаючими даними / Доманська Г. П., Колінько М. О., Лавренюк С. П. // Доп. НАН України 2005. N 6. С. 28-32.
- 84. Лавренюк С. П. Варіаційні ультрапараболічні нерівності без початкових умов / Лавренюк С. П., Процах Н. П. // Математичні студії. – 2005. – Т. 23, № 1. – С. 57-67.
- Гузіль Н. І. Мішана задача для напівлінійної ультрапараболічної системи в необмеженій області / Гузіль Н. І., Лавренюк С. П. // Доп. НАН України 2005. № 5. С. 11-16.
- 86. Козицький В. А. Основи математичної економіки. Теорія фірми / Козицький В. А., Лавренюк С. П., Оліскевич М. О. Львів, 2005. 324 с.
- 87. Лавренюк С. П. Ультрапараболічні варіаційні нерівності в необмеженій за просторовими змінними області / Лавренюк С. П., Процах Н. П. // Доп. НАН України. 2005. № 10. С. 11-18.
- Гузіль Н. І. Система гіперболічних варіаційних нерівностей першого порядку / Гузіль Н. І., Лавренюк С. П. // Укр. матем. вісник. 2005. Т.2, № 4. С. 445-462.
- Домансъка Г. П. Задача для нелінійного гіперболічного рівняння третього порядку / Домансъка Г. П., Лавренюк С. П., Процах Н. П. // Вісник Чернівецького ун-ту. Математика. – 2005. – Вип. 269. – С. 34-42.
- 90. *Лавренюк С. П.* Варіаційна гіперболічна нерівність у необмежених за просторовими змінними областях / *Лавренюк С. П.*, *Пукач П. Я.* // Доп. НАН України. 2006. № 2. С. 30-35.
- 91. Доманская Г. П. Параболическое вариационное неравенство в неограниченных областях / Доманская Г. П., Колинько М. Е., Лавренюк С. П. // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 1. С. 61-78.
- 92. Домансъка Г. П. Задача без початкових умов для псевдопараболічного рівняння в узагальнених просторах Лебега / Домансъка Г. П., Колінько М. О., Лавренюк С. П. // Математичні студії. 2006. Т. 25, № 1. С. 73-86.
- 93. Лавренюк С. П. Параболічна варіаційна нерівність вищого порядку в необмежених областях / Лавренюк С. П., Медвідь І. М. // Доп. НАН України. 2006. № 7. С. 12-18.
- 94. Лавренюк С. П. Мішана задача для нелінійного ультрапараболічного рівняння, яке узагальнює рівняння дифузії з інерцією / Лавренюк С. П., Процах Н. П. // Укр. мат. журн. 2006. Т. 58, № 9. С. 1192-1210.
- 95. Доманська Г. П. Практикум з економетрії / Доманська Г. П., Лавренюк С. П. Львів: Вид. ЛНУ імені Івана Франка, 2006. 102 с.
- 96. *Лавренюк С. П.* Мішана задача для ультрапараболічного рівняння з нелокальною дією / *Лавренюк С. П.*, *Оліскевич М. О.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. 2006. Вип. 66. С. 99-114.
- 97. Lavrenyuk S. The mixed problem for a semilinear hyperbolic equation in generalized Lebesgue spaces / Lavrenyuk S., Panat O. // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. 2006. Вип. 66. С. 243-256.
- Лавренюк С. П. Оцінювання економетричної моделі зі змінною варіацією / Лавренюк С. П., Оліскевич М. О. // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. економ. – 2006. – Вип. 36. – С. 835-845.
- 99. *Гузіль Н. І.* Мішана задача для напівлінійної ультрапараболічної системи в області, необмеженій за просторовими змінними / *Гузіль Н. І., Лавренюк С. П.* // Математичні студії. 2006. Т. 26, № 2. С. 162-173.

- 100. *Коркуна О. Є.* Про деякі властивості розв'язку мішаної задачі для нелінійного 2b-параболічного рівняння / *Коркуна О. Є., Лавренюк С. П.* // Вісник Чернівецького ун-ту. Математика. 2006. Вип. 314-315. С. 100-104.
- 101. *Лавренюк С. П.* Необмеженість розв'язків у скінченний момент часу одного слабко нелінійного рівняння четвертого порядку / *Лавренюк С. П., Торган Г. Р.* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2007. Т. 50, № 3. С. 88-93.
- 102. Lavrenyuk S. Variational hyperbolic inequality in the domaines unbounded in spatial variables / Lavrenyuk S., Pukach P. // International Journal of Evolution Equations. 2007. Vol. 3, № 1. P.103-122.
- 103. *Лавренюк С. П.* Мішана задача для нелінійного гіперболічного рівняння в необмеженій області / *Лавренюк С. П.*, *Панат О. Т.* // Доп. НАН України. 2007. № 1. С. 12-17.
- 104. *Лавренюк С. П.* Мішана задача для нелінійного гіперболічного рівняння в необмеженій за просторовими змінними області / *Лавренюк С. П.*, *Пукач П. Я.* // Укр. мат. журн. 2007. Т. 59, № 11. С. 1523-1531.
- 105. *Лавренюк С. П.* Мішана задача для напівлінійного ультрапараболічного рівняння у необмеженій області / *Лавренюк С. П., Оліскевич М. О.* // Укр. мат. журн. 2007. Т. 59, № 12. С. 1661-1673.
- 106. Lavrenyuk S. Boundary value problem for nonlinear ultraparabolic equation in unbounded with respect to time variable domain / Lavrenyuk S., Protsakh N. // Tatra Mt. Math. Pull. 2007. Vol. 38. P. 131-146.
- 107. Коркуна О. Про носій розв'язку задачі коші для нелінійного 2b-параболічного рівняння / Лавренюк С., Коркуна О. // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. 2007. Вип. 67. С. 153-165.
- 108. Лавренюк С. П. Необмеженість розв'язків одного гіперболічного рівняння третього порядку / Лавренюк С. П., Панат О. Т. // Мат. методи і фіз.-мех. поля. 2008. Т. 51, N 3. С. 36-45.
- 109. Лавренюк С. П. Задача на спряження для гіперболічних рівнянь другого та третього порядку / Лавренюк С. П., Панат О. Т. // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. 2008. Вип. 69. С. 164-170.
- 110. Лавренюк C. Додаткові розділи економетрії: Текст лекцій / Лавренюк C., Флюд B. Видавничий центр ЛНУ ім. І. Франка, 2008. 182 с.