ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат. 2010. Вип. 73. С.214-220 Ser. Mech-Mat. 2010. Vol. 73. P.214-220

УДК 517.95

МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ ЗА ПРОСТОРОВИМИ ЗМІННИМИ В НЕОБМЕЖЕНІЙ ЗА ЧАСОМ ОБЛАСТІ

Галина БАЗИЛЯК

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна*

Досліджено поведінку при $t \to \infty$ узагальнених розв'язків мішаної задачі для нелінійного параболічного рівняння четвертого порядку за просторовими змінними.

Ключові слова: мішана задача, параболічне рівняння.

Нехай Ω – обмежена область з межею $\partial\Omega \in C^1$; $Q = \Omega \times (0, +\infty)$, $Q_T = \Omega \times (0, T)$, де $T > 0$, $\Omega_\tau = \Omega \times \{t = \tau\}$, $\tau \in [0, T)$.

В області Q розглянемо мішану задачу для рівняння

$$u_{tt} + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} (a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j})_{x_s x_l} - \sum_{i=1}^{n} (a_i(x) |u_{tx_i}|^{q-2} u_{tx_i})_{x_i} - \sum_{i,j=1}^{n} (b_{ij}(x) u_{tx_i})_{x_j} -$$

$$-\sum_{i=1}^{n} (b_i(x) |u_{x_i}|^{q-2} u_{x_i})_{x_i} + a_0(x) u_t + b_0(x) u + c_0(x) |u|^{p-2} u = f(x,t) \quad (1)$$

з початковими і крайовими умовами

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = u_1(x), \qquad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$u|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3)$$

де ν – зовнішня одинична нормаль до $\partial\Omega$; $p > 2$, $q > 2$.

У цій праці визначено умови існування розв'язку мішаної задачі (1)–(3) і досліджено його поведінку при $t \to \infty$. Деякі задачі для таких нелінійних рівнянь розглянуто в [2–4] як моделі фазового переходу у в'язкопружних середовищах з капілярністю. Зокрема, в [5] вивчено поведінку розв'язків мішаної задачі при $t \to \infty$ для часткового випадку рівняння (1).

Введемо простори

$$L^q(\Omega) = \left\{ u : \left(\int_\Omega |u|^q \, dx \right)^{1/q} < \infty \right\}, \quad q > 1,$$

$$W_0^{1,q}(\Omega) = \left\{ u : u_{x_i} \in L^q(\Omega),\ u|_{\partial\Omega} = 0,\ i \in \{1, \ldots, n\} \right\}$$

з відповідними нормами

© Базиляк Г., 2010

$$\| u \|^q_{L^q(\Omega)} = \int_\Omega | u |^q \, dx, \quad \| u \|^q_{W_0^{1,q}(\Omega)} = \int_\Omega \sum_{i=1}^n | u_{x_i} |^q \, dx;$$

$$L^q_{loc}((0,+\infty);L^q(\Omega)) = \left\{ u : u \in L^q((0,T_1);L^q(\Omega)),\ \forall T_1 \in (0,+\infty] \right\}.$$

Зокрема, $H_0^2(\Omega) = W_0^{2,2}(\Omega)$.

Нехай $f \in L^2(\Omega)$ і коефіцієнти рівняння (1) задовольняють умови

$$\text{(A)} \quad a_{ij}^{sl},\, a_i,\, a_0 \in L^\infty(\Omega), \quad i,j,s,l \in \{1,\dots,n\},$$

$a_0(x) \ge A_0$, $a_i(x) \ge A_1 > 0$ для майже всіх $x \in \Omega$,

$\sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x)\xi_{ij}\xi_{sl} \ge A_2 \sum_{i,j=1}^n |\xi_{ij}|^2$, $A_2 > 0$ для майже всіх $x \in \Omega$ і всіх $\xi_{ij} \in R$,

$a_{ij}^{sl}(x) = a_{sl}^{ij}(x)$ для майже всіх $x \in \Omega$ і всіх $i,j,s,l \in \{1,\dots,n\}$;

$$\text{(B)} \quad b_{ij},\, b_i,\, b_0 \in L^\infty(\Omega), \quad i,j \in \{1,\dots,n\},$$

$b_i(x) \ge B_1 > 0$ для майже всіх $x \in \Omega$,

$\sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge B_2 \sum_{i,j=1}^n |\xi_i|^2$, $B_2 > 0$ для майже всіх $x \in \Omega$ і всіх $\xi_i \in R$,

$b_{ij}(x) = b_{ji}(x)$ для майже всіх $x \in \Omega$ і всіх $i,j \in \{1,\dots,n\}$;

$$\text{(C)} \quad c_0 \in L^\infty(\Omega), \quad c_0(x) \ge C_0 > 0 \text{ для майже всіх } x \in \Omega.$$

Означення. Узагальненим розв'язком задачі (1) –(3) назвемо функцію $u \in C([0,+\infty);H_0^2(\Omega)) \cap L^\infty_{loc}((0,+\infty);W_0^{1,q}(\Omega)) \cap L^\infty_{loc}((0,+\infty);L^p(\Omega))$, $u_t \in C([0,+\infty),L^2(\Omega)) \cap L^q_{loc}((0,+\infty),W_0^{1,q}(\Omega))$, яка задовольняє початкові умови (2) та інтегральну рівність

$$\int_{\Omega_\tau} \Big[u_{tt} v + \sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j} v_{x_s x_l} + \sum_{i=1}^n a_i(x) |u_{tx_i}|^{q-2} u_{tx_i} v_{x_i} +$$
$$+ \sum_{i=1}^n b_i(x) |u_{x_i}|^{q-2} u_{x_i} v_{x_i} + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x) u_{tx_i} v_{x_j} + a_0(x) u_t v + b_0(x) u v +$$
$$+ c_0(x) |u|^{p-2} u v - f(x,t) v \Big] dx = 0 \tag{4}$$

для майже всіх $\tau \in (0,+\infty)$ і для всіх $v \in H_0^2(\Omega) \cap W_0^{1,q}(\Omega) \cap L^p(\Omega)$.

Теорема 1. Нехай коефіцієнти рівняння (1) задовольняють умови (A), (B), (C) і, крім того, $a_{ij}^{sl} \in H^2(\Omega)$, $a_i, b_{ij}, b_i \in H^1(\Omega)$ для всіх $i,j,s,l \in \{1,\dots,n\}$;

$f, f_t \in L^2_{loc}((0,+\infty);L^2(\Omega))$; $u_0 \in H^2_0(\Omega) \cap H^4(\Omega) \cap W^{1,q}_0(\Omega) \cap L^{2(p-1)}(\Omega)$, $u_1 \in H^2_0(\Omega)$, $|u_{1x_i}|^{q-2} u_{1x_i} \in H^1(\Omega)$, $|u_{0x_i}|^{q-2} u_{0x_i} \in$
$H^1(\Omega)$, $i \in \{1,\ldots,n\}$; $q \geq 3$ при $n \leq 2$ і $3 < q \leq \dfrac{n}{n-2}$ при $n > 2$; $p \leq \dfrac{q(n+4)-2n}{2q}$ і $p \leq \dfrac{2n}{n-4}$ при $n > 4$. Тоді існує узагальнений розв'язок задачі (1)–(3).

При доведенні теореми 1 використано метод Гальоркіна і методи монотонності та компактності [6].

Введемо позначення

$$\mathrm{E}(t) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_t}\left[|u_t|^2 + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j} u_{x_s x_l} + b_0(x)|u|^2\right] dx +$$
$$+\frac{1}{p}\int_{\Omega_t} c_0(x)|u|^p \mathrm{d}x + \frac{1}{q}\int_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n} b_i(x)|u_{x_i}|^q \mathrm{d}x. \qquad (5)$$

Теорема 2. Нехай коефіцієнти рівняння (1) задовольняють умови (A), (B), (C) і $f \in L^2_{loc}((0,+\infty);L^2(\Omega))$, $u_0 \in H^2_0(\Omega) \cap W^{1,q}_0(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$, $p > 2$, $q > 2$. Крім того,

$$\int_{Q_t} e^{\frac{M_1 \tau \varepsilon}{2}} |f(x,\tau)|^2 \, dx d\tau \leq t^{\beta} M_2, \qquad (6)$$

де $M_1, M_2, \beta, \varepsilon$ – додатні сталі. Тоді узагальнений розв'язок задачі (1)–(3) задовольняє оцінку

$$\mathrm{E}(t) \leq \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{M}_1 \varepsilon t}{2}} \mathrm{M}_3, \quad \mathrm{M}_3 > 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

Доведення. Для доведення теореми використаємо метод із [7]. Спочатку продиференціюємо (5) за t і одержимо

$$E'(t) = \int_{\Omega_t}\left[u_{tt}u_t + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{tx_i x_j} u_{x_s x_l} + b_0(x) u u_t + \right.$$
$$\left. + c_0(x)|u|^{p-2} u u_t + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)|u_{x_i}|^{q-2} u_{x_i} u_{tx_i}\right] dx.$$

Приймемо в (4) замість $v = u_t$. Отримаємо

$$\int_{\Omega_\tau} [u_{tt}u_t + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j} u_{tx_s x_l} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)|u_{tx_i}|^q + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)|u_{x_i}|^{q-2} u_{x_i} u_{tx_i} +$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x) u_{tx_i} u_{tx_j} + a_0(x) | u_t |^2 + b_0(x) u u_t + c_0(x) | u |^{p-2} u u_t - f(x,t) u_t \Bigg] dx = 0.$$

Тоді

$$E'(t) = \int_{\Omega_t} \left[f(x,t) u_t - \sum_{i=1}^{n} a_i(x) | u_{tx_i} |^q - a_0(x) | u_t |^2 - \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x) u_{tx_i} u_{tx_j} \right] dx.$$

Оцінимо доданки останньої рівності

$$J_1 := \int_{\Omega_t} f(x,t) u_t dx \le \frac{1}{2\delta_1} \int_{\Omega_t} | f(x,t) |^2 dx + \frac{\delta_1}{2} \int_{\Omega_t} | u_t |^2 dx, \text{ де } \delta_1 > 0;$$

$$J_2 := -\int_{\Omega_t} \sum_{i=1}^{n} a_i(x) | u_{tx_i} |^q dx \le -A_1 \int_{\Omega_t} \sum_{i=1}^{n} | u_{tx_i} |^q dx;$$

$$J_3 := -\int_{\Omega_t} a_0(x) | u_t |^2 dx \le -A_0 \int_{\Omega_t} | u_t |^2 dx;$$

$$J_4 := -\int_{\Omega_t} \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x) u_{tx_i} u_{tx_j} dx \le -B_2 \int_{\Omega_t} \sum_{i=1}^{n} | u_{tx_i} |^2 dx.$$

З оцінок $J_1 - J_4$ одержимо

$$E'(t) \le \frac{1}{2\delta_1} \int_{\Omega_t} | f(x,t) |^2 dx - \int_{\Omega_t} \left[A_1 \sum_{i=1}^{n} | u_{tx_i} |^q + \left(A_0 - \frac{\delta_1}{2} \right) | u_t |^2 + B_2 \sum_{i=1}^{n} | u_{tx_i} |^2 \right].$$

Нехай $\delta_1 < 2A_0$.

Введемо позначення

$$E_\varepsilon(t) = E(t) + \varepsilon \psi(t),$$

де

$$\psi(t) = \int_{\Omega_t} u u_t dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} \left[a_0(x) | u |^2 + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j} \right] dx, \quad \varepsilon > 0.$$

Розглянемо

$$\left| E_\varepsilon(t) - E(t) \right| = \varepsilon \, | \psi(t) | = \varepsilon \left| \int_{\Omega_t} u u_t dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} \left[a_0(x) | u |^2 + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j} \right] dx \right|.$$

Оскільки

$$\int_{\Omega_t} u u_t dx \le \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} | u |^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} | u_t |^2 dx,$$

то

$$\left| E_\varepsilon(t) - E(t) \right| \le \varepsilon \mu_1 E(t), \tag{7}$$

де μ_1 – деяка додатна стала, яка залежить від коефіцієнтів рівняння (1).

Розглянемо

$$E_\varepsilon^{'}(t)=E'(t)+\varepsilon\int_{\Omega_t}\left[uu_{tt}+|u_t|^2+a_0(x)uu_t+\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}(x)u_{x_i}u_{tx_j}\right]dx\le$$

$$\le\frac{1}{2\delta_1}\int_{\Omega_t}|f(x,t)|^2dx-A_1\int_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n}|u_{tx_i}|^q dx-\left(A_0-\frac{\delta_1}{2}\right)\int_{\Omega_t}|u_t|^2dx-$$

$$-B_2\int_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n}|u_{tx_i}|^2dx+\varepsilon\int_{\Omega_t}\Big[|u_t|^2-\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_{x_sx_l}-\sum_{i=1}^{n}a_i(x)|u_{tx_i}|^{q-2}u_{tx_i}u_{x_i}-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}b_i(x)|u_{x_i}|^q-b_0(x)|u|^2-c_0(x)|u|^p+f(x,t)u\Big]dx.$$

Оцінимо доданки останньої нерівності

$$J_5:=-\int_{\Omega_t}\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_{x_sx_l}dx\le-A_2\int_{\Omega_t}\sum_{i,j=1}^{n}|u_{x_ix_j}|^2dx;$$

$$J_6:=-\int_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n}b_i(x)|u_{x_i}|^q dx\le-B_1\int_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^q dx;$$

$$J_7:=-\int_{\Omega_t}b_0(x)|u|^2dx\le-B_0\int_{\Omega_t}|u|^2dx;$$

$$J_8:=-\int_{\Omega_t}c_0(x)|u|^p dx\le-C_0\int_{\Omega_t}|u|^p dx;$$

$$J_6:=-\int_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n}a_i(x)|u_{tx_i}|^{q-2}u_{tx_i}u_{x_i}dx\le\frac{A_1}{q'\delta_2}\int_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n}|u_{tx_i}|^q dx+\frac{\delta_2A_1}{q}\int_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^q dx,$$

де $\delta_2>0,\ q'=\dfrac{1}{1-q}$.

З оцінок J_1 і J_5-J_9 випливає, що

$$E_\varepsilon^{'}(t)\le\frac{1+\varepsilon}{2\delta_1}\int_{\Omega_t}|f(x,t)|^2dx-\left(A_1-\frac{A_1\varepsilon}{q'\delta_2}\right)\int_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n}|u_{tx_i}|^q dx-B_2\int_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n}|u_{tx_i}|^2dx-$$

$$-\left(A_0-\frac{\delta_1}{2}-\varepsilon\right)\int_{\Omega_t}|u_t|^2dx-A_2\varepsilon\int_{\Omega_t}\sum_{i,j=1}^{n}|u_{x_ix_j}|^2dx-\left(B_1-\frac{\delta_2A_1}{q}\right)\varepsilon\int_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^q dx-$$

$$-\left(B_0-\frac{\delta_1}{2}\right)\varepsilon\int_{\Omega_t}|u|^2dx-C_0\varepsilon\int_{\Omega_t}|u|^p dx.$$

Виберемо $\delta_1+2\varepsilon<2A_0,\ \delta_1<2B_0,\ \dfrac{\varepsilon}{q'}<\delta_2<\dfrac{qB_1}{A_1}$, тоді

$$E_\varepsilon^{'}(t) \le \frac{1+\varepsilon}{2\delta_1}\int_{\Omega_t} |f(x,t)|^2\, dx - \mu_2 \varepsilon E(t) = \mu_3 \int_{\Omega_t} |f(x,t)|^2\, dx - \mu_2 \varepsilon E(t),$$

де $\mu_{2,}$ μ_3 – додатні сталі.

З врахування нерівності (7) отримаємо

$$(1-\varepsilon\mu_1)E(t) \le E_\varepsilon(t) \le (1+\varepsilon\mu_1)E(t).$$

Нехай $\varepsilon \le \dfrac{1}{2\mu_1}$, тоді

$$\frac{1}{2}E(t) \le E_\varepsilon(t) \le \frac{3}{2}E(t) \le 2E(t),$$

$$-\varepsilon\mu_2 E(t) \le \frac{\varepsilon\mu_2}{2}E_\varepsilon(t).$$

Отже,

$$E_\varepsilon^{'}(t) \le \mu_3 \int_{\Omega_t} |f(x,t)|^2\, dx - \frac{\varepsilon\mu_2}{2}E_\varepsilon(t). \tag{7}$$

Приймемо $\mu_2 := M_1$. Домножимо (7) на $e^{\frac{M_1\varepsilon t}{2}}$ і отриману нерівність проінтегруємо від 0 до t. Отримаємо

$$E_\varepsilon(t) \le e^{-\frac{M_1\varepsilon t}{2}}\left(E(0) + \mu_2 \int_{Q_t} e^{\frac{M_1\varepsilon\tau}{2}} |f(x,\tau)|\, dx d\tau\right).$$

Врахувавши оцінку (6), з умов теореми, одержимо

$$E_\varepsilon(t) \le e^{-\frac{M_1\varepsilon t}{2}}\left(E(0) + t^\beta \mu_2 M_2\right) \le e^{-\frac{M_1\varepsilon t}{2}} M_3,$$

де M_3 – деяка додатна стала. Отже, теорема доведена.

---

1. *Abeyaratne R.* Implications of viscosity and strain gradient effects for the kinetics of propagating phase boundaries in solids /R. Abeyaratne, J.K. Knowles// SIAM. J. Appl. Math. – 1991. – Vol. 51. – P. 1205–1221.
2. *Abeyaratne R.* Kinetic relations and propagation of phase boundaries in solids /R. Abeyaratne, J.K. Knowles// Arch. Ration. Mech. Anal. – 1991. – Vol. 114. – P.119–154.
3. *Rybka P.* Convergence of solutions to the equation of quasi-static approximation of viscoelasticity with capillarity /P. Rybka, K.-H. Hoffmann// J. Math. Anal. and Appl. – 1998. – Vol. 226, N. 1. – P. 61–81.

4. *Slemrod M.* Admissibility criteria for propagating phase boundaries a van der Waals fluid /*M. Slemrod*// Arch. Ration. Mech. Anal. – 1983. – P. 37–85.

5. *Торган Г. Р.* Поведінка розв'язків мішаної задачі для параболічного рівняння четвертого порядку на нескінченності / Г. Р. Торган// Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2008. – Вип. 69. – С. 72–77.

6. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М., 1972.

7. *Cavalcanti M.M.* Existence and exponential decay for a Kirchhoff-Carrier model with viscosity /M.M. Cavalcanti, V.N. Domingos Cavalcanti, J.S. Prates Filho, J.A. Soriano// Journal of Math. Anal. and Appl. – 1998. – Vol. 226. – P. 40–60.

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА ПО ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ПЕРЕМЕННЫМ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПО ВРЕМЕНИ ОБЛАСТИ

Галина БАЗЫЛЯК

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1 79000 Львов, Украина

Исследовано поведение при $t \to \infty$ обобщенных решений смешанной задачи для нелинейного параболического уравнения четвертого порядка по пространственным переменным.

Ключевые слова: смешанная задача, параболическое уравнение.

THE INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE NONLINEAR PARABOLIC EQUATION OF THE FOURTH ORDER WITH SPATIAL VARIABLE IN UNBOUNDED DOMAIN FOR THE TIME

Halyna BAZYLYAK

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine

In the paper is estimated the behaviour at $t \to \infty$ of the generalized solutions of the initial-boundary value problem for the nonlinear parabolic equation of the fourth order with spatial variable.

Key words: initial-boundary value problem, parabolic equation.

Стаття надійшла до редколегії 06.09.2010
Прийнята до друку 22.12.2010