

МОДЕЛЮВАННЯ РУХУ ТРІЩИНИ НА ОСНОВІ ЧИСЛОВОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ПЛОСКОГО НАПРУЖЕНОГО СТАНУ

Владислав БОГДАНОВ¹, Георгій СУЛИМ²

¹Національний транспортний університет,
вул. Суворова, 1 01010 Київ, Україна

²Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

З використанням різницевих методів досліджують плоский напружений стан тонкого компактного зразка для визначення в'язкості руйнування (тріщиновитримності) в нестационарному пружно-пластичному формуванні з урахуванням підростання тріщини за навантаження, яке прикладене до локалізованої області та змінюється з часом за лінійним законом. Умовою підростання тріщини вважають локальний критерій крихкого руйнування. Як основний незалежний параметр для опису розвитку полів напружень, деформацій, параметра Одквіста, пружних і пластичних складових густин енергії деформації та інших величин вибрано розрахункові значення коефіцієнта інтенсивності напружень біля тріщини у статичній задачі для пружно-деформованого компактного зразка. Виявлено особливості зміни напружень при досягненні згаданими коефіцієнтами інтенсивності напружень певних критичних значень.

Ключові слова: компактний зразок, пружно-пластична деформація, динамічна задача, ріст тріщини, енергії деформації.

Вступ. Для детальнішого вивчення процесів руйнування, граничного стану конструктивних елементів і способів визначення граничних значень параметрів, які його окреслюють, необхідна побудова математичних моделей і розв'язків тих задач, які описують ті явища, які спостерігають та вивчають в експериментах. Найпростіше формулювати такі задачі з використанням лінійно-пружних механічних моделей рівноважного стану, оскільки у багатьох випадках сталі руйнування (параметри граничного сталі) визначають за ударного руйнування, зокрема на триточковий згин надрізаних зразків прямокутної форми (компактних зразків для визначення в'язкості руйнування), то нехтування динамічними явищами, а також нелінійністю перебігу процесів деформування та розвитку руйнування, зокрема й пластичністю явища деформування обумовлюватиме дуже великі похибки.

У працях [1, 2] для аналізу процесів руйнування було запропоновано застосувати поряд із експериментальними також і розрахункові методи з використанням квазістатичної пружно-пластичної моделі матеріалу. Ці результати було узагальнено у публікаціях [3–5], де визначальні співвідношення для пружно-пластичного деформування було поєднано з рівняннями руху середовища у припущенні, що тріщина є нерухомою. У [6] використовують таке ж динамічне пружно-пластичне формулювання, однак

враховано рух тріщини у припущенні, що найбільше головне напруження досягнуло чи перевищило рівень критичних напружень крихкого руйнування за умови, що певне ефективне напруження не є від'ємним. Запропоновані моделі дали змогу суттєво підвищити рівень адекватності отриманих теоретичних підходів, однак їхнє застосування можна вважати коректним лише у разі повільного підростання тріщини. В [7] визначаємо напружено-деформований стан жорстко-пластичної криволінійної пластини змінної товщини з довільним отвором при динамічному навантаженні.

У цьому дослідженні методика [4] поширена на той випадок, коли тріщина динамічно просувається у пружно-пластичному зразку після його динамічного навантажування. На відміну від [4], де так як і в [2], складовою ϵ_z^p пластичних деформацій нехтували, ці складові враховують. На відміну від [6], для підростання тріщини використовують локальний критерій крихкого руйнування.

1. Математичне формулювання задачі. Розглядають деформування балкового зразка у формі прямокутника $\Sigma = \mathbf{L} \times \mathbf{B}$ ($-L/2 \leq x \leq L/2$; $0 \leq y \leq B$) з пропилом-тріщиною початкової довжини $l = l_0$ уздовж відрізка $\{x = 0; 0 \leq y \leq l_0\}$, що контактує з двома нерухомими опорами уздовж $\{L_* \leq |x| \leq L_* + a; y = 0\}$. Товщина w зразка вважається настільки малою, що можна було б використовувати залежності плоского напруженого стану ($\sigma_{zz} = 0, \sigma_{xz} = 0, \sigma_{yz} = 0$).

Зверху на тіло падає абсолютно жорсткий ударник, що контактує уздовж відрізка $\{|x| \leq A; y = B\}$. Його дію на тіло замінимо рівномірно розподіленим в області контакту нормальним напруженням $-P$, що змінюється з часом як лінійна функція $P = p_{01} + p_{02}t$. З огляду на симетрію процесу деформування стосовно лінії $x = 0$ далі розглядається лише права частина поперечного перерізу тіла (рис. 1,а).

Внаслідок ударного навантаження вважатимемо, що матеріал пружно-пластичний із зміцненням, причому розрахунок полів напружень, деформацій та їхніх приростів, зокрема й приростів інтенсивності пластичних $d\epsilon_i^p$, а також параметра Одквіста $\kappa = \int d\epsilon_i^p$ будемо виконувати на підставі числового розв'язування відповідної динамічної пружно-пластичної задачі.

Під час проведення розрахунків використаємо відомі методики дослідження квазістатичної пружно-пластичної [1, 2] моделі, що враховують нестационарність навантаження і застосовують числове інтегрування, зреалізоване в розрахунку динамічної пружної моделі [7]. У розрахунку динамічних полів напружень і деформацій не враховуємо взаємодії хвильових полів, відбиття від межі тіла і можливої контактної взаємодії між берегами розрізу.

Розглядають рівняння плоскої динамічної теорії, для якої компоненти вектора зміщень $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ пов'язані з компонентами тензора

деформацій співвідношеннями Коші $\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}$, $\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}$, $\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$,

$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)$, а рівняння руху середовища набувають вигляду

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}, \text{ де } \rho - \text{ густина матеріалу.}$$

Крайові умови задачі, які враховують зміну довжини тріщини, випливають із припущення про незмінність області прикладання реакції, розташування опор, а також визначення опорних реакцій за допомогою методів статки, запишемо так:

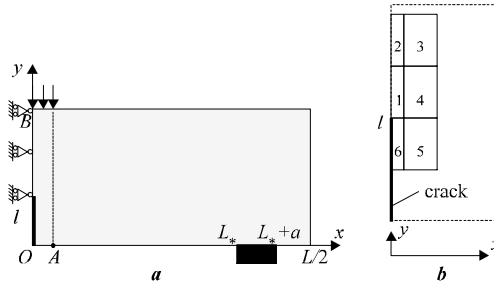


Рис. 1. Геометрична схема задачі (а) і сітка розбиття біля вістря тріщини (б)

$$\begin{aligned}
 x = 0, \quad 0 < y < l: & \quad \sigma_{xx} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0; \\
 x = 0; \quad l < y < B: & \quad u_x = 0, \quad \sigma_{xy} = 0; \\
 x = L/2, \quad 0 < y < B: & \quad \sigma_{xx} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0; \\
 y = 0, \quad 0 < x < L*: & \quad \sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0; \\
 y = 0, \quad L* < x < L* + a: & \quad u_y = 0, \quad \sigma_{xy} = 0; \\
 y = 0, \quad L* + a < x < L/2: & \quad \sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0; \\
 y = B, \quad 0 < x < A: & \quad \sigma_{yy} = -P, \quad \sigma_{xy} = 0; \\
 y = B, \quad A < x < L/2: & \quad \sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Початкові умови набувають вигляду

$$u_x|_{t=0} = 0, \quad u_y|_{t=0} = 0, \quad u_z|_{t=0} = 0, \quad \dot{u}_x|_{t=0} = 0, \quad \dot{u}_y|_{t=0} = 0, \quad \dot{u}_z|_{t=0} = 0, \quad l|_{t=0} = l_0, \tag{2}$$

де крапочка над символом означає похідну за часом.

В основу визначальних співвідношень механічної моделі покладено теорію неізотермічного пластичного течіння середовища з зміцненням за умови текучості Губера – Мізеса [9]. Ефектами повзучості і температурним розширенням нехтуємо. Тоді, вважаючи компоненти тензора деформацій сумою пружних і пластичних його складових [10], отримаємо для них

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p, \quad \varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{2G} \mathbf{s}_{ij} + \mathbf{K}\sigma + \varphi, \quad d\varepsilon_{ij}^p = \mathbf{s}_{ij} d\lambda. \quad (3)$$

Тут $\mathbf{s}_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma$ – компоненти девіатора тензора напружень; δ_{ij} – символ Кронекера; G – модуль зсуву; $\mathbf{K}_1 = (1 - 2\nu)/(3E)$; E – модуль пружності; ν – коефіцієнт Пуассона; $\mathbf{K} = 3\mathbf{K}_1$ – модуль об'ємного стиску, що зв'язує у співвідношенні $\varepsilon = \mathbf{K}\sigma + \varphi$ об'ємне розширення 3ε (температурне розширення $\varphi \equiv 0$); $\sigma = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})/3$ – середнє напруження; $d\lambda$ – деяка скалярна функція, що визначається умовою пластичності (формою поверхні навантаження) і з огляду на згаданий вище його вибір квадратично залежить від компонент девіатора напружень \mathbf{s}_{ij} [9]. Матеріал зміцнюється з коефіцієнтом зміцнення η . [2]

$$\sigma_s(\mathbf{T}) = \sigma_{02}(\mathbf{T}_0) \left(1 + \frac{\kappa(\mathbf{T})}{\varepsilon_0} \right)^{\eta}, \quad \varepsilon_0 = \frac{\sigma_{02}(\mathbf{T}_0)}{E}, \quad \mathbf{T}_0 = 20^\circ \text{C}, \quad (4)$$

де $\sigma_s(\mathbf{T})$ – межа текучості після зміцнення матеріалу за температури \mathbf{T} .

Перепишемо (3) у розгорнутій формі

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{xx} &= d\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma}{2G} + \mathbf{K}\sigma\right) + (\sigma_{xx} - \sigma)d\lambda, & d\varepsilon_{xy} &= d\left(\frac{\sigma_{xy}}{2G}\right) + \sigma_{xy}d\lambda, \\ d\varepsilon_{yy} &= d\left(\frac{\sigma_{yy} - \sigma}{2G} + \mathbf{K}\sigma\right) + (\sigma_{yy} - \sigma)d\lambda, \end{aligned} \quad (5)$$

причому

$$\begin{aligned} d\lambda &= \begin{cases} 0 & (\mathbf{f} \equiv \sigma_i^2 - \sigma_s^2(\mathbf{T}) < 0), \\ \frac{3d\varepsilon_i^p}{2\sigma_i} & (\mathbf{f} = 0, \quad d\mathbf{f} = 0) \end{cases} (\mathbf{f} > 0 - \text{неприпустиме}), \\ d\varepsilon_i^p &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(d\varepsilon_{xx}^p - d\varepsilon_{yy}^p)^2 + (d\varepsilon_{xx}^p - d\varepsilon_{zz}^p)^2 + (d\varepsilon_{yy}^p - d\varepsilon_{zz}^p)^2 + 6(d\varepsilon_{xy}^p)^2}, \\ \sigma_i &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{xx})^2 + (\sigma_{yy})^2 + 6(\sigma_{xy})^2}, \quad d\varepsilon_{zz}^p = -d\varepsilon_{xx}^p - d\varepsilon_{yy}^p. \end{aligned} \quad (6)$$

2. Схема розв'язування задачі. Нехай нестационарна взаємодія відбувається в інтервалі часу $t \in [0, t_*]$. Тоді для кожного моменту часу t з цього інтервалу:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^e &= \frac{\sigma_{xx} - \sigma}{2G} + \mathbf{K}\sigma, & \varepsilon_{yy}^e &= \frac{\sigma_{yy} - \sigma}{2G} + \mathbf{K}\sigma, & \varepsilon_{xy}^e &= \frac{\sigma_{xy}}{2G}, & \varepsilon_{zz}^e &= -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{xx}^e + \varepsilon_{yy}^e), \\ \frac{d\varepsilon_{xx}^p}{dt} &= (\sigma_{xx} - \sigma) \frac{d\lambda}{dt}, & \frac{d\varepsilon_{yy}^p}{dt} &= (\sigma_{yy} - \sigma) \frac{d\lambda}{dt}, & \frac{d\varepsilon_{xy}^p}{dt} &= \sigma_{xy} \frac{d\lambda}{dt}, & \varepsilon_{zz}^p &= -\varepsilon_{xx}^p - \varepsilon_{yy}^p. \end{aligned} \quad (7)$$

Для числового інтегрування за часом використовували квадратурну формулу Грегорі [11] порядку $m_1 = 3$ з коефіцієнтами D_n . Після

рівномірної дискретизації за часом з вузлами $t_k = k\Delta t \in [0, t_+]$ ($k = \overline{0, K}$) для кожного значення k запишемо відповідні вузлові значення приростів деформацій

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_{xx,k} &= \mathbf{B}_1\sigma_{xx,k} + \mathbf{B}_2\sigma_{yy,k} - \mathbf{b}_{xx}, \quad \mathbf{B}_1 = \frac{1}{3}\left(\mathbf{K} + \frac{1}{\mathbf{G}} + 2\mathbf{D}_0\Delta\lambda_k\right), \\ \Delta\varepsilon_{yy,k} &= \mathbf{B}_2\sigma_{xx,k} + \mathbf{B}_1\sigma_{yy,k} - \mathbf{b}_{yy}, \quad \mathbf{B}_2 = \frac{1}{3}\left(\mathbf{K} - \frac{1}{2\mathbf{G}} - \mathbf{D}_0\Delta\lambda_k\right), \\ \Delta\varepsilon_{xy,k} &= \mathbf{B}_3\sigma_{xy,k} - \mathbf{b}_{xy}, \quad \Delta\varepsilon_{zz,k} = \mathbf{B}_4(\sigma_{xx,k} + \sigma_{yy,k}) - \Delta\varepsilon_{xx,k} - \Delta\varepsilon_{yy,k} - \mathbf{b}_{zz}, \\ \mathbf{B}_3 &= \frac{1}{2\mathbf{G}} + \mathbf{D}_0\Delta\lambda_k, \quad \mathbf{B}_4 = \frac{1-2\nu}{3(1-\nu)}\left(2\mathbf{K} + \frac{1}{2\mathbf{G}}\right), \quad \mathbf{b}_{zz} = \mathbf{B}_4(\sigma_{xx,k-1} + \sigma_{yy,k-1}), \\ \mathbf{b}_{ij} &= \frac{1}{2\mathbf{G}}\sigma_{ij,k-1} + \delta_{ij}\left(\mathbf{K} - \frac{1}{2\mathbf{G}}\right)\sigma_{k-1} - \sum_{n=1}^{m-1} \mathbf{D}_n(\sigma_{ij,k-n} - \delta_{ij}\sigma_{k-n})\Delta\lambda_{k-n} \quad (i, j: x, y). \end{aligned} \quad (8)$$

Функція $\psi = 1/(2\mathbf{G}) + \Delta\lambda$, що характеризує умову текучості, з урахуванням (6), (7) дорівнює

$$\begin{aligned} \psi &= \left\{ \frac{1}{2\mathbf{G}} \quad (f < 0), \quad \frac{1}{2\mathbf{G}} + \frac{3\Delta\varepsilon_i^p}{2\sigma_i} \quad (f = 0, \quad df = 0) \right\} \quad (f > 0 - \text{неприпустиме}), \\ \Delta\varepsilon_i^p &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\Delta\varepsilon_{xx}^p - \Delta\varepsilon_{yy}^p)^2 + (\Delta\varepsilon_{xx}^p - \Delta\varepsilon_{zz}^p)^2 + (\Delta\varepsilon_{yy}^p - \Delta\varepsilon_{zz}^p)^2 + 6(\Delta\varepsilon_{xy}^p)^2}, \\ \Delta\varepsilon_{xx}^p &= \Delta\varepsilon_{xx} - \Delta\varepsilon_{xx}^e, \quad \Delta\varepsilon_{yy}^p = \Delta\varepsilon_{yy} - \Delta\varepsilon_{yy}^e, \quad \Delta\varepsilon_{xy}^p = \Delta\varepsilon_{xy} - \Delta\varepsilon_{xy}^e, \quad \Delta\varepsilon_{zz}^p = -\Delta\varepsilon_{xx}^p - \Delta\varepsilon_{yy}^p, \\ \varepsilon_{xx}^e &= \frac{1}{2\mathbf{G}}\sigma_{xx} + \left(\mathbf{K} - \frac{1}{2\mathbf{G}}\right)\sigma, \quad \varepsilon_{yy}^e = \frac{1}{2\mathbf{G}}\sigma_{yy} + \left(\mathbf{K} - \frac{1}{2\mathbf{G}}\right)\sigma, \quad \varepsilon_{xy}^e = \frac{1}{2\mathbf{G}}\sigma_{xy}, \quad \sigma = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})/3. \end{aligned} \quad (9)$$

Для урахування фізичної нелінійності, що міститься в залежностях (9), застосовують метод послідовних наближень, який дає підстави нелінійну задачу звести до послідовності лінійних задач [2]

$$\begin{aligned} \psi^{(n+1)} &= \left\{ \psi^{(n)}\mathbf{p} + \frac{1-\mathbf{p}}{2\mathbf{G}} (\sigma_i^{(n)} - \sigma_s(\mathbf{T}) < -\mathbf{Q}); \quad \psi^{(n)} \quad (-\mathbf{Q} < \sigma_i^{(n)} - \sigma_s(\mathbf{T}) < \mathbf{Q}); \right. \\ &\quad \left. \psi^{(n)} \frac{\sigma_i^{(n)}}{\sigma_s(\mathbf{T})} \quad (\sigma_i^{(n)} - \sigma_s(\mathbf{T}) > \mathbf{Q}) \right\}, \end{aligned} \quad (10)$$

де \mathbf{Q} – найбільше відхилення інтенсивності напружень від зміщеної межі текучості; емпірична стала $0 \leq \mathbf{p} \leq 1$ визначається для різних типів матеріалів (для м'яких сталей вона дорівнює 0,25; для твердих – 0,75; для дуже твердих інструментальних сталей – 0,87 - 0,90).

Розв'язок системи (8) дає вирази для компонент тензора напружень на кожному кроці

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx,k} &= \mathbf{A}_1 \Delta \varepsilon_{xx,k} + \mathbf{A}_2 \Delta \varepsilon_{yy,k} + \mathbf{Y}_{xx}, \quad \mathbf{Y}_{xx} = \mathbf{A}_1 \mathbf{b}_{xx} + \mathbf{A}_2 \mathbf{b}_{yy}, \quad \mathbf{A}_1 = \mathbf{B}_1 / (\mathbf{B}_1^2 - \mathbf{B}_2^2), \\
 \sigma_{yy,k} &= \mathbf{A}_2 \Delta \varepsilon_{xx,k} + \mathbf{A}_1 \Delta \varepsilon_{yy,k} + \mathbf{Y}_{yy}, \quad \mathbf{Y}_{yy} = \mathbf{A}_2 \mathbf{b}_{xx} + \mathbf{A}_1 \mathbf{b}_{yy}, \quad \mathbf{A}_2 = -\mathbf{B}_2 / (\mathbf{B}_1^2 - \mathbf{B}_2^2), \\
 \sigma_{xy,k} &= \mathbf{A}_3 \Delta \varepsilon_{xy,k} + \mathbf{Y}_{xy}, \quad \mathbf{Y}_{xy} = \mathbf{A}_3 \mathbf{b}_{xy}, \quad \mathbf{A}_3 = 1 / \mathbf{B}_3.
 \end{aligned} \quad (11)$$

Прирости $\Delta \mathbf{u}$ вектора переміщень пов'язані з приростами деформацій такими співвідношеннями:

$$\Delta \varepsilon_{xx} = \frac{\partial \Delta \mathbf{u}_x}{\partial \mathbf{x}}, \quad \Delta \varepsilon_{yy} = \frac{\partial \Delta \mathbf{u}_y}{\partial \mathbf{y}}, \quad \Delta \varepsilon_{zz} = \frac{\partial \Delta \mathbf{u}_z}{\partial \mathbf{z}}, \quad \Delta \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{u}_x}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial \Delta \mathbf{u}_y}{\partial \mathbf{x}} \right). \quad (12)$$

Інтенсивність напружень і деформацій, які використовували вище, визначали для кожної елементарної комірки з числового розв'язку.

Незалежним параметром, який характеризує процес навантаження, є час $t_k = k \Delta t$, а відтак і відповідна цьому моменту часу сила $\mathbf{F} = 2\mathbf{AP}$ контактної взаємодії ударника зі зразком. Оскільки в механіці руйнування в'язкість руйнування (тріщиновитримність) переважно отримують у квазістатичних експериментах та зіставляють її з граничним значенням коефіцієнта інтенсивності напружень (КІН) \mathbf{K}_1 , отриманим із пружного розв'язку, то для опису зміни окремих характеристик у багатьох залежностях як незалежний параметр (змінної) виберемо наближене значення КІН \mathbf{K}_1^e (далі називатимемо його пружним КІН) для пружної задачі триточкового згину балки з тріщиною [12]

$$\mathbf{K}_1^e = 12\mathbf{F} \frac{\sqrt{l}}{\mathbf{BH}} \left(1,93 - 3,07 \frac{l}{\mathbf{B}} + 14,53 \left(\frac{l}{\mathbf{B}} \right)^2 - 25,11 \left(\frac{l}{\mathbf{B}} \right)^3 + 25,8 \left(\frac{l}{\mathbf{B}} \right)^4 \right). \quad (13)$$

Для визначення актуальної довжини l тріщини у кожний розглядуваний момент часу використовували такий критерій, втілений у відповідний алгоритм. Якщо в комірці 1 (що прилягає до осі тріщини біля її продовження), найбільше головне напруження σ_1 досягнуло чи перевищило рівень критичних напружень крихкого руйнування $\mathbf{S}_c(\kappa) = [\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 \exp(-\mathbf{A}_d \kappa)]^{-1/2}$ за умови, що ефективне напруження $\sigma_{eff} = \sigma_1 - \sigma_{02}$ при залежному від температури значенні $\sigma_{02}(\mathbf{T}) = \mathbf{a}_1 - \mathbf{c}(\mathbf{T} + 273) + \mathbf{b} \exp(-\mathbf{h}(\mathbf{T} + 273))$ не є від'ємним, то вважається, що ця комірка руйнується [4], довжина тріщини збільшується на висоту цієї комірки і відбувається перебудова сітки та її перенумерування так, щоби біля вістря тріщини знову була комірка 1. Параметри a_1, c, b, h, C_1, C_2 , і A_d цих залежностей характеризують властивості досліджуваного полікристалічного матеріалу.

Обчислені поля деформацій використовували для визначення пластичної і пружної складових енергій деформації [13]

$$U_{ij}^e = \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} \varepsilon_{ij}^e \sigma_{ij} dx dy, \quad U_{ij}^p = \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} \varepsilon_{ij}^p \sigma_{ij} dx dy \quad (i, j = x, y). \quad (14)$$

3. **Числова реалізація.** Для розрахунків математичної моделі компактного зразка зі сталі 15Х2НМФА застосовано метод скінченних різниць зі змінюваним кроком розбиття уздовж осей Ox (N елементів) і Oy (M елементів). Крок між точками розбиття був найменшим в околі вершини тріщини і на межах зразка. Характерний розмір комірок в радіусі 1-2 мм від вершини тріщини дорівнює середньому розміру зерна випробуваного металу (0,05 мм). Використання методу скінчених різниць обґрунтовується в [14], причому забезпечується точність розрахунків з похибкою не більше, ніж $O((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta t)^2)$.

Результати розрахунків середніх напружень у комірках поблизу вістря тріщини за невеликих навантажень, коли у дискретизованій задачі пластичної деформації немає і розв'язок задачі суто лінійно пружний, збігалися з розрахованими для центра комірки на основі класичних одночленних асимптотичних залежностей п. 1.2 [12] з використанням виразу (13) для КІН пружного розв'язку. Для комірок 1, 6 (див. рис. 1,б) при $x = 0,01$ мм, $y = 3 \pm 0,04$ мм різниця не перевищувала 0,3%.

На рис. 2-9 зображено результати обчислення деяких важливих для механіки руйнування величин за таких значень параметрів: коефіцієнт зміцнення матеріалу $\eta_s = 0,05$; $L = 60$ мм; $B = 10$ мм; $I_0 = 3$ мм; $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$ с; $A = 2,5$ мм; $p_{01} = 8$ МПа; $p_{02} = 10$ МПа; $M = 60$; $N = 77$. Найменший крок розбиття дорівнював 0,02 мм, а найбільший - 2,6 мм ($\Delta x_{\min} = 0,02$ мм; $\Delta y_{\min} = 0,04$ мм (лише перший шар); $\Delta x_{\max} = 2,6$ мм; $\Delta y_{\max} = 0,6$ мм), $a_1 = 867$ МПа, $b = 975$ МПа, $c = 0,0305$ МПа K^{-1} , $h = 1,04 \cdot 10^{-2}$ K^{-1} , $C_1 = 1,92$, $C_2 = 3,04$, $A_f = 2,92$, $T = 50^\circ$.

Графіки розрахованої залежності від КІН K_1^e середніх напружень на продовженні осі включення біля його вістря (комірка 1 на схемі рис. 1,б) двовимірної моделі компактного зразка (рис. 2) свідчать, що з розвитком процесу деформування зразка в разі перевищення пружним КІН K_1^e рівня $K_1^e = K_{1*}^e = 90,5$ МПа \sqrt{m} , напруження у цій точці монотонний характер збільшення змінюють на коливний, а в разі перевищення пружним КІН K_1^e рівня $K_1^e = K_{1**}^e = 166,3$ МПа \sqrt{m} , коливання напружень набувають більшої амплітуди. Суцільна, суцільна з трикутником, пунктирна, суцільна з хрестиком і суцільна з кружечком лінії стосуються відповідно напружень σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} , напруження текучості σ_s та інтенсивність напружень σ_I .

Обчислення виявили, що при температурі зразка $T = 50^\circ C$ тріщина починала збільшуватися в разі перевищення пружним КІН рівня $K_1^e = K_{1c}^e \equiv 72,3$ МПа \sqrt{m} . Дослідження залежності довжини тріщини від K_1^e (рис. 3) дають змогу стверджувати таке: коли інтенсивність напружень

набуває значення $K_1^e = K_{1*}^e$, процес збільшення довжини тріщини стає інтенсивнішим (із набагато більшими приростами довжини з таким самим збільшенням K_1^e).

Після досягнення пружним КІН значення $K_1^e = K_{1d}^e \equiv 324,3 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}$ напруження σ_{xx} , σ_{yy} різко зменшуються (див. рис. 2), причому напруження σ_{xx} стають стискувальними. В цей момент параметр Одквіста (рис. 4) в комірці 1 зменшується майже до нуля, а довжина тріщини сягає $l = 8,35 \text{ мм}$. З цього моменту напруження σ_{xx} і σ_{yy} починають коливатися в околі нуля і це, скоріш за все, відповідає подальшому доломлюванню зразка.

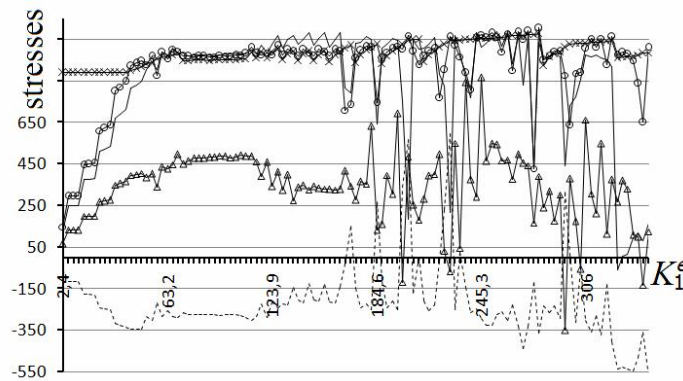


Рис. 2. Залежність напруження у комірці 1 на продовженні осі тріщини від K_1^e

Обчислення залежності параметра Одквіста κ , який характеризує накопичену у комірці 1 (увесь час безпосередньо перед вістрям тріщини) пластичну деформацію від K_1^e відображає рис. 4. Доки деформування пружне, доти $\kappa = 0$. Потім у комірці 1 починають монотонно накопичуватися пластичні деформації і у момент, коли тріщина робить перший стрибок, відбувається зміна розташування комірки 1 у зону з меншими значеннями параметра κ (значення κ стрибком зменшується) і знову відбувається процес накопичення κ . Через це при перевищенні пружним КІН значення K_{1c}^e зміна κ , а водночас і величина накопиченої в комірці 1 пластичної деформації, має осциляційний (немонотонний) характер. Коли $K_1^e = K_{1*}^e$,

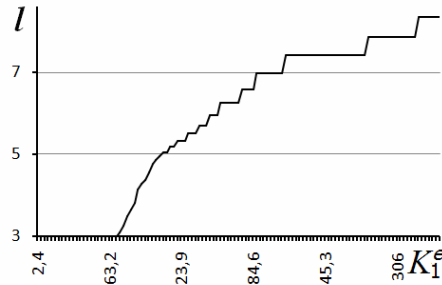


Рис. 3. Залежність довжини тріщини l від K_1^e

амплітуда осциляцій параметра κ значно збільшується, і, як зазначалося вище, при $K_1^e = K_{1d}^e$ він зменшується майже до нуля і починає повільно зростати.

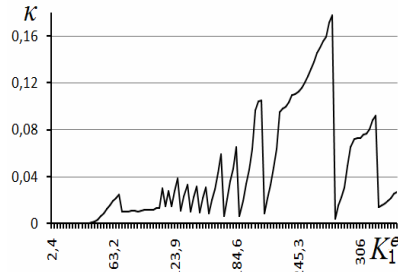


Рис. 4. Залежність параметра Од-квіста κ від КІН K_1^e у комірці 1

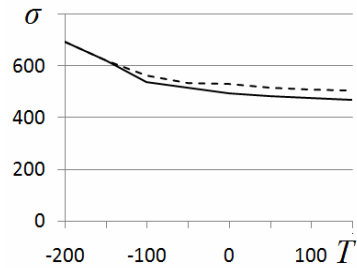


Рис. 5. Залежність середніх напружень σ від температури T у комірці 1

На рис. 5 і 6 зображено залежності від температури T відповідно середнього напруження σ та параметра Одквіста κ у комірці 1, отримані за фіксованого значення $K_1^e = K_{10}^e = 78,3 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}} > K_{1c}^e$ у разі врахування розвитку тріщини (суцільні лінії) при досягненні навантаженням такого рівня, а також у припущенні, що тріщина свого первісного розміру не змінює (штрихові лінії).

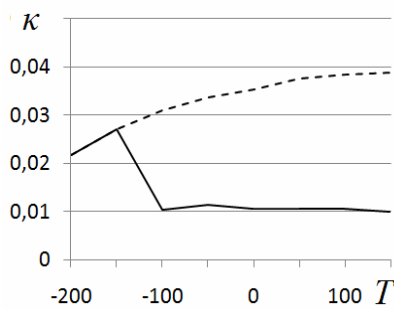


Рис. 6. Залежність параметра Одквіста κ від температури T у комірці 1

У тих випадках, коли рівень температури забезпечує можливість збільшення розміру тріщини при заданому рівні напружень, то перед кінчиком тріщини властивий вищий рівень середніх напружень і накопичених пластичних деформацій. Якщо ж при певній температурі (у даному випадку це $T < -100^\circ$) рівень напружень для руху тріщини недостатній, то обидва підходи дають однакові результати.

На рис. 7 зображено діаграми розподілу максимальних досягнутих пластичних деформацій ε_{xx}^p , ε_{yy}^p , і ε_{xy}^p в зоні, що оточує вістря тріщини і прилягає до її фрагмента, що утворився внаслідок підростання. Верхня частина відповідає значенню пружного КІН, коли $K_1^e = 60,1 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}$ (коли тріщина ще нерухома), а нижня, коли $K_1^e = K_{1c}^e$, тріщина підросла на 3,24 мм і починає фазу інтенсивного підростання, яке передуює доломлюванню зразка. У цьому разі темніші зони на діаграмах відповідають ще вищим значенням деформацій.

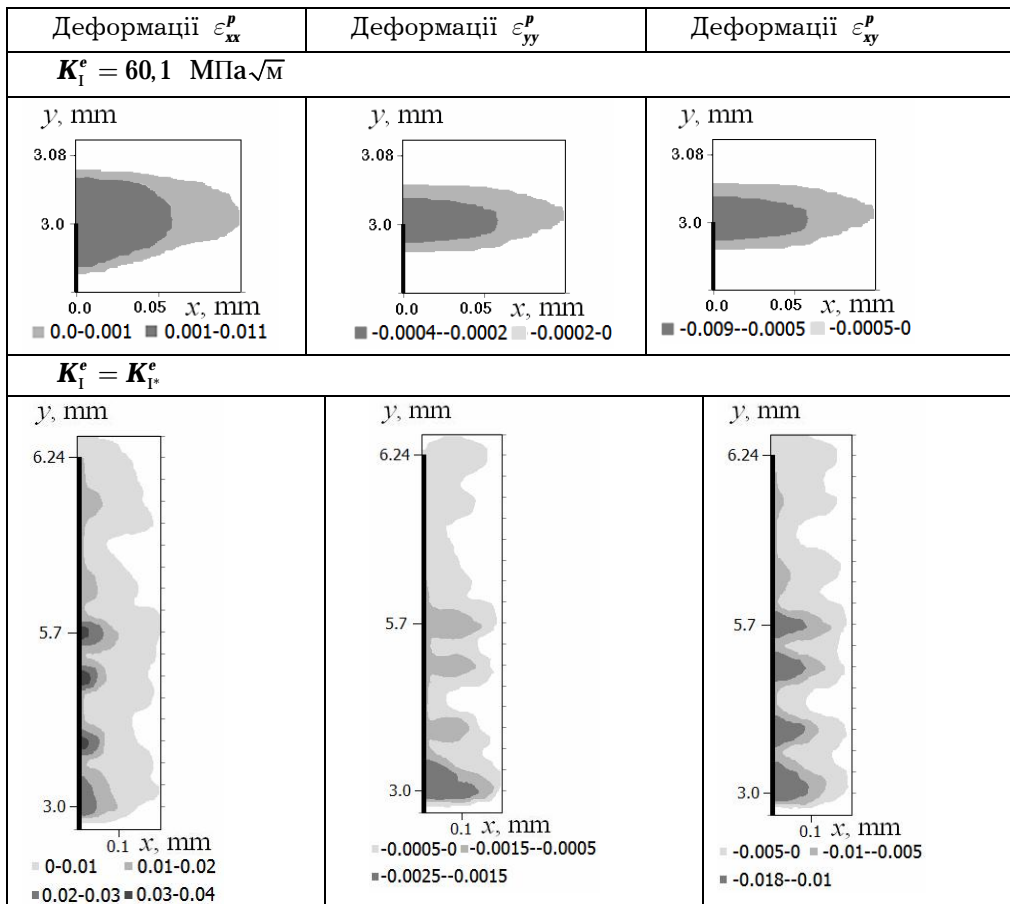


Рис. 7. Діаграми розподілу максимальних досягнутих пластичних деформацій ε_{xx}^p , ε_{yy}^p і ε_{xy}^p в зоні тріщини

Помітно, що зони максимальних пластичних деформацій (вони, як ще видно з верхньої частини рисунка, формуються безпосередньо навколо вістря тріщини і при її просуванні потрапляють у зону розвантаження) прилягають до вільної поверхні тріщини, причому її вістря за достатнього розвитку тріщини розташовується у менш пластично деформованому матеріалі. Якщо приріст довжини тріщини достатньо великий, то до берегів тріщини прилягає низка таких зон підвищеної пластичної деформації, тобто товщина приповерхневого пластично деформованого металу не є ані сталою, ані монотонно змінюваною.

Зрозуміло, що зменшення розмірів сітки розбиття дещо згладить зображені у нижній частині діаграми розподілу, однак така нерівномірність пластичних деформацій може бути властива динамічному характеру просування тріщини.

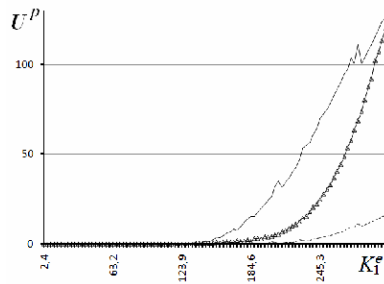


Рис. 8. Зміна складових енергії пластичних деформацій U_{ij}^p

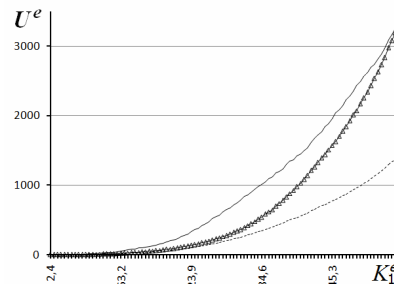


Рис. 9. Зміна складових енергії пружних деформацій U_{ij}^e

На рис. 8, 9 суцільна, суцільна з трикутником і пунктирна лінії стосуються відповідно зміни адитивних складових (14) енергій пластичних U_{xx}^p , U_{yy}^p і U_{xy}^p (рис. 8) та пружних U_{xx}^e , U_{yy}^e і U_{xy}^e (рис. 9) деформацій у комірці 1 перед вістрям тріщини. Дослідження розподілу складових пластичних енергій U_{ij}^p ($i, j : x, y$) (див. рис. 8) з моменту перевищення пружним коефіцієнтом інтенсивності напружень рівня K_{I*} свідчить про їхній у цілому коливний характер. Пружні складові енергії U_{ij}^e ($i, j : x, y$) (див. рис. 9) збільшуються монотонно, у цьому разі незначні стрибки можна пояснити дискретністю обчислювальної схеми.

Висновок. Розв'язування задачі плоского напруженого стану для компактного зразка для визначення в'язкості руйнування на триточковий згин у динамічному пружно-пластичному формулюванні з урахуванням підростання тріщини дає змогу набагато точніше визначити поля пластичних деформацій і напружень, аніж при розв'язуванні квазістатичної пружно-пластичної задачі плоского напруженого стану, а також дає підстави адекватно моделювати процес розповсюдження тріщини. Процес підростання тріщини починається пізніше і потребує більше часу.

1. Махненко В.И. Совершенствование методов оценки остаточного ресурса сварных соединений конструкций длительного срока эксплуатации // Автоматическая сварка. – 2003. – № 10–11. – С. 112–121.
2. Махненко В.И. Расчетные методы исследования кинетики сварочных напряжений и деформаций. – К., 1976.
3. Богданов В.Р., Сулим Г.Т. Визначення в'язкості руйнування матеріалу на основі чисельного моделювання плоского деформованого стану // Физ.-хім. мех. матеріалів. – 2010. – № 3. – С. 51–56.
4. Богданов В.Р. Визначення в'язкості руйнування матеріалу на основі чисельного моделювання плоского напруженого стану // Вісник

- Київського національного університету. Серія фіз.-мат. науки. – 2008. – № 3. – С. 51–56.
5. *Богданов В.Р.* Тривимірна динамічна задача концентрації пластичних деформацій і напружень біля вершини тріщини // Вісник Київського національного університету. Серія фіз.-мат. науки. – 2009. – № 2. – С. 51–56.
 6. *Богданов В.Р., Сулим Г.Т.* Динамічний розвиток тріщини у компактному зразку за пружно-пластичною моделлю плоского напруженого стану // Вісник Київського національного університету. Серія фіз.-мат. науки. – 2010. – № 4. – С. 51–54.
 7. *Немировский Ю.В., Романова Т.П.* Динамика жесткопластической криволинейной пластины переменной толщины с произвольным отверстием // Прикл. механика – 2010. – 46, №3. – С. 70 – 76.
 8. *Kubenko V.D., Bogdanov V.R.* Planar problem of the impact of a shell on an elastic half-space.// International Applied Mechanics. – Vol. 31. – № 6. – 1995. – P. 483–490.
 9. Сборник: Теория пластичности. – М., 1948.
 10. *Аркулис Г.Э., Дорогобид В.Г.* Теория пластичности. – М., 1987.
 11. *Хемминг Р.В.* Численные методы. – М., 1972.
 12. *Саврук М.П.* Механика разрушения и прочность материалов. – Т. 2. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – К., 1988.
 13. *Божидарник В.В., Сулим Г.Т.* Елементи теорії пластичності та міцності.– Львів, 1999.
 14. *Зюкина Е.Л.* Консервативные разностные схемы на неравномерных сетках для двумерного волнового уравнения // Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского, – Казань, – Т.26. – 2004 – С. 151–160.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТРЕЩИНЫ НА ОСНОВЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Владислав БОГДАНОВ¹, Георгий СУЛЫМ²

¹Національний Транспортний Університет,
ул. Суворова, 1 01010 Киев, Украина

²Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1 79000 Львов, Украина

С использованием разностных методов исследуется плоское напряженное состояние тонкого компактного образца для определения вязкости

разрушения (трещиностойкости) в нестационарной упруго-пластической постановке с учетом подрастания трещины при нагрузке, которая приложена к локализованной области и изменяется со временем по линейному закону. Условием подрастания трещины считается локальный критерий хрупкого разрушения. В роли основного независимого параметра для описи развития полей напряжений, деформаций, параметра Одквиста, упругих и пластических составляющих плотности энергии деформации, а также других величин выбрано расчетное значение коэффициента интенсивности напряжений возле трещины в статической задаче для упруго деформированного компактного образца. Выявлены особенности изменения напряжений при достижении упомянутыми коэффициентами интенсивности напряжений критических значений.

Ключевые слова: компактный образец, упруго-пластическая деформация, динамическая задача, рост трещины, энергии деформации.

THE CRACK CLEAVAGE SIMULATION BASED ON THE NUMERICAL MODELING OF THE PLANE STRESS STATE

Vladislav. BOGDANOV¹, Georgij SULYM²

¹*National Transport Universit,
Suvorova str., 1 01010 Kyiv, Ukraine*

²*Ivan Franko National University of L'viv,
Universytetska Str., 1 79000 L'viv, Ukraine*

On the base of developed method of solving problems of planar stress state in non-stationary plastic-elastic model the problem of crack cleavage was solved when non-stationary pressure is applied. The non-stationary pressure time dependence is linear and area of that pressure has not changed. The crack is growing by local criteria of destruction. There were determined dependences of stresses, Odquist parameter, plastic and elastic deformation and etc. parameters for different stress intensity values.

Key words: Compact specimen, elastic-plastic deformation, dynamic problem, crack cleavage, deformation energy.

Стаття надійшла до редколегії 17.02.2010

Прийнята до друку 22.12.2010