

УДК 539.3

СПЕКТР КОССЕРА ДРУГОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПРУЖНОГО СКІНЧЕНОГО ЦИЛІНДРА

В'ячеслав МЕЛЕШКО¹, Юрій ТОКОВИЙ², П'єро ВІЛЛАДЖІО³

¹Київський національний університет ім. Тараса Шевченка,
вул. Володимирська, 64 01601 Київ, Україна

²Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С.Підстригача НАН України, вул. Наукова, 36 79053 Львів, Україна

³Пізанський університет,
Лунжарно Пацінотті, 43 56126 Піза, Італія

Досліджено спектр Коссера другої основної крайової задачі теорії пружності для суцільного ізотропного скінченного циліндра залежно від співвідношення між його довжиною та радіусом.

Ключові слова: спектр Коссера, задача теорії пружності в напруженнях, скінчений циліндр.

Вступ. У серії з дев'яти коротких публікацій протягом 1898-1901 рр. (першою з яких була стаття [1], перелік і короткий зміст решти наведено в [2]), брати Ежен та Франсуа Коссера запропонували оригінальний підхід до розв'язування основних двох крайових задач теорії пружності для ізотропного тіла. У випадку другої основної задачі, коли на всій межі тіла задано вектор зовнішніх зусиль, задача описується рівнянням Ляме для вектора переміщень \mathbf{u} , яке має інваріантний вигляд

$$(\omega + 1) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} + \mathbf{F} / G = 0 \quad (1)$$

в області V , разом із крайовими умовами

$$\mathbf{n}(\omega - 1) \operatorname{div} \mathbf{u} + 2(\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{u} + \mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{u} = \mathbf{t} / G \quad (2)$$

на межі S . Тут grad , div , rot – відомі диференціальні оператори; \mathbf{n} – вектор зовнішньої нормалі до поверхні S ; \mathbf{F} – сила, що діє в одиниці об'єму; \mathbf{t} – поверхневе зусилля, віднесене до одиниці площі; $\omega = 1/(1 - 2\sigma)$, σ та G – відповідно коефіцієнт Пуассона та модуль зсуву пружного матеріалу. Для розв'язання крайової задачі (1), (2) брати Коссера запропонували спочатку знайти такі власні значення параметра ω_n , при яких однорідна крайова задача

$$(\omega + 1) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0, \quad (3)$$

$$\mathbf{n}(\omega - 1) \operatorname{div} \mathbf{u} + 2(\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{u} + \mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0 \quad (4)$$

має нетривіальний розв'язок.

Завдяки фізичним обмеженням $-1 \leq \sigma \leq 1/2$ на коефіцієнт Пуассона реальних матеріалів та теоремі єдиності розв'язку задачі (1), (2) значення ω_n для однорідної крайової задачі (3), (4) можуть перебувати лише в інтервалі $[-\infty, 1/3]$. Для відносно простого випадку суцільної пружної кулі брати Коссера [3] довели, що $\omega_n = \frac{2n+1}{2n^2+4n+3}$ ($n = 0, 1, 2$), навели вирази для власних функцій $\mathbf{u}_n^{\mathbf{r}}$ і записали коротко повний розв'язок задачі. (Цей розв'язок, на нашу думку, потребує ретельної перевірки.) В [4] було доведено, що $\omega_0 = 1/3$ завжди буде власним числом задачі (3), (4).

Хоча роботи братів Коссера були досить відомими – їм було присвячено один параграф у класичній книзі [5], де детально обговорили розв'язок першої основної крайової задачі – до середини 70-х років практично нічого не було зроблено з застосування та розвитку цього підходу. Інтерес до спектра Коссера знову сколихнули праці С.Г. Міхліна, перелік яких подано в [2], а пізніше – серія праць [6,7], в яких було розглянуто здебільшого плоскі крайові задачі, та [8]. Зокрема, С.Г. Міхлін [2, с. 66] довів, що задача (3), (4), окрім дискретного спектра ω_n , має власні значення $\omega^{(-1)} = -1$ та $\omega^{(-\infty)} = -\infty$, яким відповідає нескінченна кількість незалежних власних функцій $\mathbf{u}_k^{(-1)}$ та $\mathbf{u}_k^{(-\infty)}$. У загальному випадку розв'язок крайової задачі (1), (2) набуває вигляду [2, с. 70]

$$\mathbf{u} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2}{1+\omega} \left(\mathbf{f}, \mathbf{u}_k^{(-1)} \right) \mathbf{u}_k^{(-1)} + \left(\mathbf{f}, \mathbf{u}_k^{(-\infty)} \right) \mathbf{u}_k^{(-\infty)} \right] + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-\omega_n}{\omega-\omega_n} \left(\mathbf{f}, \mathbf{u}_n \right) \mathbf{u}_n,$$

де

$$\left(\mathbf{f}, \mathbf{u}_\alpha \right) = \frac{1}{G} \left[\int_V \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_\alpha dV + \int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}_\alpha dS \right], \quad \alpha = k, n,$$

а всі власні функції $\mathbf{u}_k^{(-1)}$, $\mathbf{u}_k^{(-\infty)}$ та \mathbf{u}_n - ортонормовані у метриці, пов'язаній з енергією системи [2, с. 65].

Незважаючи на перелічені публікації, зовсім немає відомостей про спектр Коссера для суто просторових пружних тіл, окрім сфери. На нашу думку, однією з перешкод у поширенні згаданого методу є складність у практичному відшуканні власних значень і власних функцій для тіл порівняно складної геометрії, зокрема скінчених тіл за наявності кутових точок межі.

Ми запропонували методику знаходження власних значень Коссера для осесиметричної задачі теорії пружності для суцільного циліндра скінченої довжини з крайовими умовами в термінах напружень. Проаналізовано вплив співвідношення між довжиною та радіусом циліндра на власні значення.

Формулювання задачі. Розглядаємо осесиметричну задачу про рівновагу пружного ізотропного циліндра $V = \{0 \leq r \leq a, |z| \leq h\}$ у циліндричній системі координат. Векторне рівняння Ляме (3) у цьому випадку запишемо покомпонентно у вигляді

$$(\omega + 1) \frac{\partial \Theta}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{z}} = 0, \quad (\omega + 1) \frac{\partial \Theta}{\partial \mathbf{z}} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r\Omega)}{\partial \mathbf{r}} = 0, \quad (5)$$

де $\Theta = \operatorname{div} \mathbf{u}^{\dot{}}$ – об'ємне розширення; $\Omega = \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}$ – єдина відмінна від нуля компонента $\operatorname{rot} \mathbf{u}^{\dot{}}$. Ставимо задачу знаходження таких значень параметра ω , за яких розв'язки рівнянь (5) відмінні від нуля в області V , забезпечуючи виконання крайових умов (4), які набувають вигляду

$$\sigma_r = 0, \quad \tau_{rz} = 0, \quad \mathbf{r} = \mathbf{a}; \quad \sigma_z = 0, \quad \tau_{rz} = 0, \quad \mathbf{z} = \pm \mathbf{h}. \quad (6)$$

Побудова розв'язку. Знаходити розв'язки рівнянь (5) можна різними способами. Ми застосуємо підхід, який ґрунтується на використанні функції Лява [9, § 188]. Переміщення та напруження виражаються через бігармонічну функцію $\chi(\mathbf{r}, \mathbf{z})$ за допомогою таких співвідношень:

$$\begin{aligned} 2\mathbf{G}\mathbf{u}_r &= -\frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial \mathbf{z}}, & 2\mathbf{G}\mathbf{u}_z &= (1 - 2\sigma)\nabla^2 \chi + \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r}, \\ \sigma_r &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \left(\sigma \nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} \right), & \sigma_z &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \left((2 - \sigma)\nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right), & \tau_{rz} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left((1 - \sigma)\nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

де $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – осесиметричний оператор Лапласа.

Використаємо функцію напружень для симетричного стосовно площини $z = 0$ поля напружень у вигляді [10]

$$\chi(\mathbf{r}, \mathbf{z}) = \mathbf{B}_0 \mathbf{z}^3 + \mathbf{D}_0 \mathbf{r}^2 \mathbf{z} + \mathbf{a} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \mathbf{X}_n \mathbf{R}_n(r) \frac{\sin k_n z}{k_n^4} + \mathbf{h} \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{Y}_j \mathbf{Z}_j(z) \frac{J_0(\lambda_j r)}{\lambda_j^4 J_0(\lambda_j a)}, \quad (8)$$

де

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_n(r) &= k_n r \frac{I_1(k_n r)}{I_1(k_n a)} - \left(\frac{\omega + 1}{\omega} + k_n a \frac{I_0(k_n a)}{I_1(k_n a)} \right) \frac{I_0(k_n r)}{I_1(k_n a)}, \\ \mathbf{Z}_j(z) &= \left(\frac{\omega - 1}{\omega} + \lambda_j h \operatorname{cth} \lambda_j h \right) \frac{\operatorname{sh} \lambda_j z}{\operatorname{sh} \lambda_j h} - \lambda_j z \frac{\operatorname{ch} \lambda_j z}{\operatorname{sh} \lambda_j h}, \end{aligned}$$

$k_n = n\pi/h$; $\lambda_j > 0$ – корінь рівняння $J_1(\lambda_j a) = 0$, J_0 , J_1 і I_0 , I_1 – відповідно звичайні та модифіковані функції Бесселя першого роду нульового та першого порядків.

Визначення напружень на підставі співвідношень (7) та задоволення ними крайових умов (6) приводить до двох систем лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{cases} (\omega - 1)\mathbf{B}_0 + 2\omega\mathbf{D}_0 = \mathbf{0}, \\ (\omega + 1)\mathbf{B}_0 + 2(\omega - 1)\mathbf{D}_0 = \mathbf{0} \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \mathbf{X}_n\mathbf{P}_n - \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{Y}_j \frac{4\mathbf{k}_n^2}{(\mathbf{k}_n^2 + \lambda_j^2)^2} = \mathbf{0}, & \mathbf{n} = 1, 2, \dots, \\ \mathbf{Y}_j\Delta_j - \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_n \frac{4\lambda_j^2}{(\mathbf{k}_n^2 + \lambda_j^2)^2} = \mathbf{0}, & \mathbf{j} = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (10)$$

Тут

$$\mathbf{P}_n = \mathbf{a}^2 \left(\frac{\mathbf{I}_0^2(\mathbf{k}_n\mathbf{a})}{\mathbf{I}_1^2(\mathbf{k}_n\mathbf{a})} - 1 \right) - \frac{1}{\mathbf{k}_n^2} \frac{1 + \omega}{\omega}, \quad \Delta_j = \frac{\mathbf{h}}{\lambda_j} \left(\operatorname{cth} \lambda_j \mathbf{h} + \frac{\lambda_j \mathbf{h}}{\operatorname{sh}^2 \lambda_j \mathbf{h}} \right).$$

Побудова нетривіальних розв'язків рівнянь (5) за крайових умов (6) можлива, якщо системи рівнянь (9) і (10) мають нетривіальні розв'язки, що забезпечується рівністю нулеві головних визначників цих систем рівнянь.

У випадку системи рівнянь (9) рівність нулеві визначника забезпечується за єдиного значення параметра $\omega = 1/3$, якому відповідає $\sigma = -1$. Варто зауважити, що отримане власне значення не залежить від радіуса та довжини циліндра.

Перед тим, як розглядати визначник системи (10), варто зазначити, що лише рівняння першої групи цієї системи, що подаються першою стрічкою (10), залежать від параметра ω завдяки коефіцієнту \mathbf{P}_n , а рівняння другої групи (друга стрічка (10)) від зазначеного параметра не залежать. Тому доцільно вилучити рівняння другої групи з розгляду. Визначивши з цих рівнянь \mathbf{Y}_j та підставивши їхні значення у рівняння першої групи, систему (10) перепишемо у вигляді

$$\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{nm} \mathbf{X}_m = \mathbf{0}, \quad \mathbf{n} = 1, 2, \dots \quad (11)$$

де

$$\alpha_{nm} = \mathbf{P}_n \delta_{nm} - \frac{16}{\mathbf{h}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j^3 (\operatorname{ch} 2\lambda_j \mathbf{h} - 1)}{(\mathbf{k}_n^2 + \lambda_j^2)^2 (\mathbf{k}_m^2 + \lambda_j^2)^2 (\operatorname{sh} 2\lambda_j \mathbf{h} + 2\lambda_j \mathbf{h})},$$

δ_{nm} – символ Кронекера.

Система (11) має нетривіальні розв'язки, якщо величини ω є коренями характеристичного рівняння

$$\Psi_{\infty} = \mathbf{0}, \quad (12)$$

де $\Psi_{\infty} = \det(\alpha_{nm})_{n,m=1,\infty}$. Зауважимо, що вирази, які містять параметр ω , розташовані лише на головній діагоналі Ψ_{∞} . Вираз для Ψ_{∞} є нескінченним

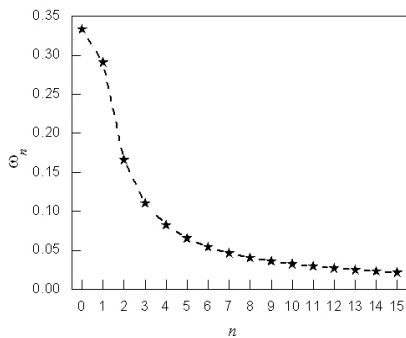


Рис. 1

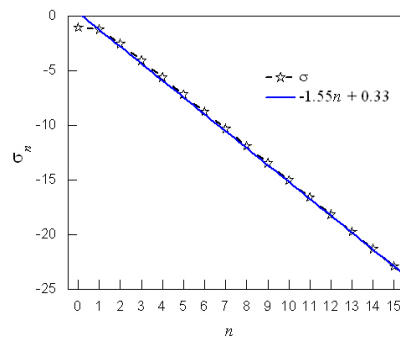


Рис. 2

Вплив відношення h/a на власні значення ω_n показано на рис. 3, а на відповідні значення σ_n – рис. 4. Як видно, зі зменшенням цього відношення власні значення скупчуються біля рівня $\omega = 0$, а з його збільшенням – біля рівня $\omega = 1/3$. Коefіцієнти Пуассона, крім $\sigma_0 = -1$, розташовуються вздовж прямих, які описуються такими рівняннями для випадків, показаних на рис. 4, у порядку збільшення h/a : $\sigma_n = -15.73n + 2.78$, $\sigma_n = -3.14n + 0.84$, $\sigma_n = -1.55n + 0.33$, $\sigma_n = -0.73n - 0.29$, $\sigma_n = -0.07n - 0.93$, $\sigma_n = 3 \cdot 10^{-5}n - 1$. Зі збільшенням відношення h/a величини σ_n розташовуються уздовж прямої, яка змагає до горизонтального положення, все менше відрізняючись зі зміною n ; у цьому разі зі збільшенням h/a спадає похибка визначення власних значень.

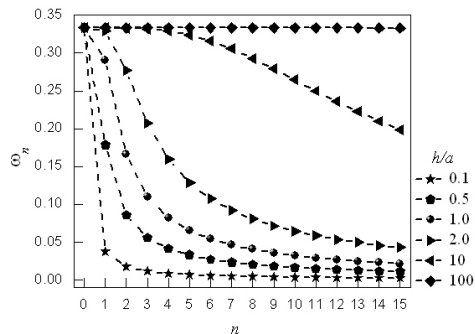


Рис. 3

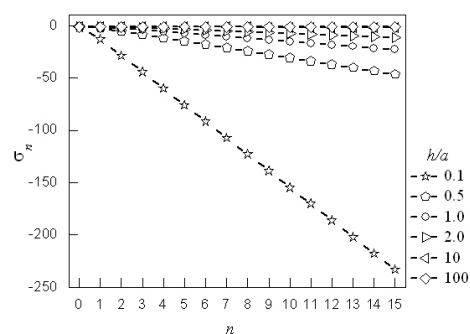


Рис. 4

Висновки. Знайдено дискретний спектр Коссера для скінченного пружного циліндра у випадку осесиметричного деформування за крайових умов у термінах напружень і досліджено вплив співвідношення між довжиною та радіусом циліндра на власні значення. Виявлено лінійну залежність від номера відповідних значень коefіцієнта Пуассона. Незважаючи на ці дані,

автори схиляються до короткого зауваження [5, с. 149]: "...для практичного обчислення вказаний метод, взагалі кажучи, не застосовувався, проте окремі задачі, які можуть бути розв'язані й іншими способами, були розібрані за його допомогою" та рекомендують використовувати прямий підхід [10] для розв'язування крайових задач теорії пружності для скінчених циліндрів.

1. *Cosserat E., Cosserat F.* Sur les equations de la theorie de l'elasticité // *C. R. Acad. Sci. Paris.* – 1898. – 126. – P. 1089-1091.
2. *Михлин С.Г.* Спектр пучка операторов теории упругости // *Успехи матем. наук.* – 1973. – 28, № 3(171). – С. 43-82.
3. *Cosserat E., Cosserat F.* Sur la deformation infiniment petite d'un corps elastique soumis à des forces donnees // *C. R. Acad. Sci. Paris.* – 1901. – 133. – P. 271-273.
4. *Cosserat E., Cosserat F.* Sur un point critique particulier de la solution des equations de l'elasticite, dans le cas on les efforts sur la frontiere sont donnees // *C. R. Acad. Sci. Paris.* – 1901. – 133. – P. 382-384.
5. *Треффц Е.* Математическая теория упругости. – М.; Л., 1934.
6. *Markenscoff X., Paukshto M.* The Cosserat spectrum in the theory of elasticity and applications // *Proc. R. Soc. Lond.* – 1998. – A454. – P. 631-643.
7. *Liu W., Markenscoff X., Paukshto M.* The Cosserat spectrum theory for two-dimensional thermoelastic problems // *J. Thermal Stresses.* – 1999. – 22. – P. 225-239.
8. *Михлин С.Г., Морозов Н.Ф., Паукшто М.В.* Интегральные уравнения в теории упругости. – СПб., 1994.
9. *Ляв А.* Математическая теория упругости. – М.; Л., 1935.
10. *Meleshko V.V.* Equilibrium of an elastic finite cylinder: Filon's problem revisited // *J. Eng. Math.* – 2003. – 46. – P. 355-376.

**СПЕКТР КОССЕРА ВТОРОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГОГО
ЦИЛИНДРА КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ****Вячеслав МЕЛЕШКО¹, Юрий ТОКОВЫЙ², Пьеро ВИЛЛАДЖИО³**

¹ *Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко,
ул. Владимирская, 64 01601 Киев, Украина*

² *Институт прикладных проблем механики и математики
им. Я.С Подстригача НАН Украины, ул. Научная, 3б 79053 Львов, Украина*

³ *Пизанский университет,
Лунгарно Пацинотти, 43 56126 Пиза, Италия*

Исследован спектр Коссера второй основной граничной задачи теории упругости для сплошного изотропного конечного цилиндра в зависимости от соотношения между его длиной и радиусом.

Ключевые слова: спектр Коссера, задача теории упругости в напряжениях, конечный цилиндр.

**THE COSSERAT SPECTRUM FOR THE SECOND BOUNDARY VALUE
PROBLEM FOR AN ELASTIC CYLINDER OF FINITE LENGTH****Viatcheslav MELESHKO¹, Yuriy TOKOVYY², Piero VILLAGGIO³**

¹ *Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Volodymyrs'ka St., 64 01601 Kyiv, Ukraine*

² *Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics,
Naukova Str., 3b 79053 Lviv, Ukraine*

³ *University of Pisa,
Lungarno Pacinotti, 43 56126 Pisa, Italy*

The Cosserat spectrum for the second boundary value problem for an isotropic elastic cylinder of finite length is investigated with respect to different aspect of sides ratio.

Keywords: the Cosserat spectrum, elasticity problem in terms of stresses, finite cylinder.

Стаття надійшла до редколегії 12.01.2010

Прийнята до друку 22.12.2010