

УДК 539.4

АНТИПЛОСКА ДЕФОРМАЦІЯ КВАДРАТНОГО В ПЛАНІ ТІЛА ІЗ ВНУТРІШНЬОЮ ТОНКОЮ НЕОДНОРІДНІСТЮ

Кирил ВАСІЛЬЄВ¹, Ярослав ПАСТЕРНАК¹, Георгій СУЛИМ²

¹Інститут прикладних проблем механіки і математики ім.
Я. С. Підстригача,
вул. Наукова, 3б 79060 Львів, Україна

²Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Запропоновано два методи дослідження антиплатоскої деформації обмежених тіл із тонкими стрічковими неоднорідностями. Перший – аналітично-числовий спосіб розв'язування задачі – полягає у моделюванні обмеженої області за допомогою простору з системою контактуючих між собою неоднорідностей, у точках контакту яких діють невідомі зосереджені сили і дислокації. Для верифікації цього методу розроблено другий підхід на підставі схеми методу граничних елементів. Обчислення виконано для прикладу квадрата з довільно розміщеною внутрішньою тріщиною. Різниця між результатами застосування двох методів не перевищила 1%.

Ключові слова: антиплатоска деформація, МППВ, МГЕ, прямокутне в плані тіло, тріщина, КІН.

1. **Вступ.** Задачі дослідження напружено-деформованого стану обмежених тіл із тонкими дефектами типу тріщин, абсолютно жорстких чи пружних включень є важливими, зважаючи на їхнє поширення в техніці. З огляду на високу технологічність виготовлення, простоту геометрії та зручне взаємне поєднання, об'єкти у формі прямокутника, чи квадрата використовують найчастіше, тому й задачі дослідження їхнього напружено-деформованого стану досить добре висвітлені в літературі. Проте визначення напруженого стану обмежених тіл надзвичайно складне і громіздке з позицій математичного моделювання завдання, тому більшість результатів для таких задач отримано за допомогою числових методів, зокрема методу граничних елементів [1, 2]. Інші підходи використовують, зокрема, перетворення Фур'є [3], чи застосовують метод прямого неповного вирізування, коли прямокутний виріз у необмеженому середовищі моделюється за допомогою двох відокремлених ламаних тріщин [4].

Ми запропонували два підходи дослідження антиплатоскої деформації обмежених тіл із тонкими стрічковими неоднорідностями на прикладі прямокутника з тріщиною. Перший – аналітично-числовий спосіб розв'язування задачі на основі модифікованого методу прямого вирізування, який верифікується другим – числовим підходом на підставі схеми методу граничних елементів.

2. **Формулювання задачі.** У квадратному в плані тілі S зі стороною $2b$ і модулем пружності G наявна щілина (тріщина) L , нахилена під кутом α

© Васільєв К., Пастернак Я., Сулим Г., 2010

до осі абсцис. Довжина неоднорідності – $2a$. Координати центру неоднорідності $O_0(x_0, y_0)$. До берегів тріщини прикладені симетричні напруження τ (рис. 1). Відповідно до методу функцій стрибка [5] за принципом спряження континуумів різної вимірності неоднорідність вилучають із розгляду як геометричний об'єкт, а контактні напруження та переміщення переносять на її серединну поверхню. Тобто щільна заступається функціями стрибків векторів напружень і похідних від переміщень на серединній поверхні неоднорідності.

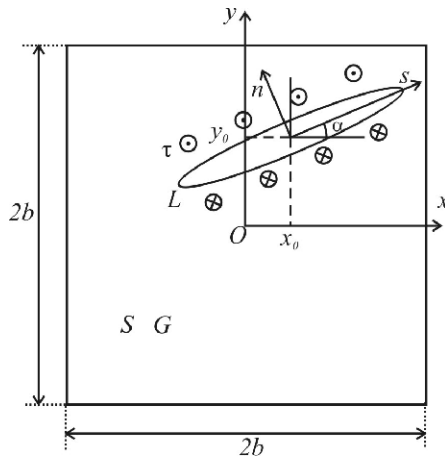


Рис. 1. Тріщина у квадраті за антиплоскої деформації

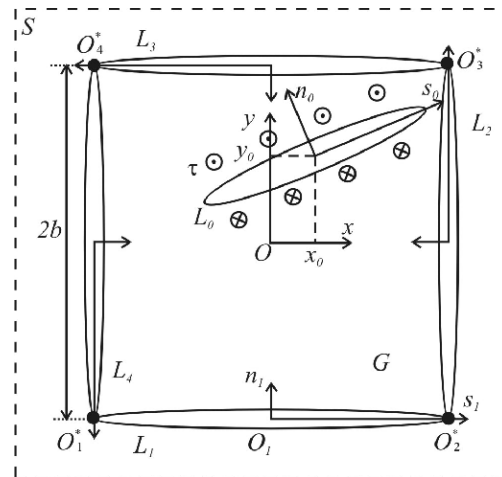


Рис. 2. Моделювання квадрату з тріщиною за допомогою методу повного прямого вирізування

3. Розв'язування задачі методом прямого повного вирізування (МППВ). У [6] для визначення напружено-деформованого стану обмежених тіл із тонкими неоднорідностями запропоновано метод прямого вирізування (МППВ), який успішно апробували на задачах для шаруватих структур із тонкими включеннями. Цей метод полягає у моделюванні крайових умов обмеженого тіла з неоднорідностями за допомогою тонкостінних об'єктів – тріщин та абсолютно жорстких включень у кусково-однорідному, чи однорідному просторі. Як виявилось, при застосуванні МППВ до обмежених тіл, зокрема у випадку моделювання квадрата з тріщиною за допомогою п'яти стрічкових неоднорідностей, в околі вершин модельованого об'єкта виникають великі градієнти напружень, особливо, якщо моделюючі неоднорідності навантажені. Це, за навантажування берегів неоднорідностей, що моделюють межу тіла, зумовлює виникнення суттєвих похибок обчислення узагальнених коефіцієнтів інтенсивності напружень (УКІН) досліджуваної неоднорідності порівняно з відомими розв'язками навіть на досить великій відстані неоднорідності від кутових точок межі тіла. Для зменшення впливу взаємодії вершин моделюючих неоднорідностей на напружений стан тіла модифікуємо МППВ так.

Розглянемо однорідний ізотропний простір із модулем пружності \mathbf{G} і п'ятьма стрічковими неоднорідностями \mathbf{L}_j ($j = \overline{0,4}$). Довжини включень – $2a_j$, товщини – $2h_j$, модулі пружності – \mathbf{G}_{Bj} , орієнтації щодо осі абсцис – α_j , координати центрів – $\mathbf{z}_{0j} = \mathbf{x}_{0j} + i\mathbf{y}_{0j}$ ($j = \overline{0,4}$). Грані квадрата моделюватимемо за допомогою чотирьох стрічкових неоднорідностей \mathbf{L}_j ($j = \overline{1,4}$) однакової довжини $2a_j = 2b$ ($j = \overline{1,4}$) (тріщин у випадку дослідження вільних, чи навантажених берегів квадрата і абсолютно жорстких включень, у випадку дослідження жорстко защемлених берегів тіла), які контактують між собою в точках \mathbf{O}_j^* ($j = \overline{1,4}$). Досліджувану тріщину описуватимемо моделлю дуже податного включення \mathbf{L}_0 , орієнтація і розміщення якого такі ж, як і щілини \mathbf{L} вихідної задачі (рис. 2).

У точках \mathbf{O}_j^* дотику моделюючих включень функції стрибків суміжних неоднорідностей повинні якимось між собою пов'язуватись. Оскільки цей зв'язок заздалегідь невідомий, то спочатку накладемо додаткові умови рівності нулю функцій стрибків у точках \mathbf{O}_j^* ($j = \overline{1,4}$)

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{5j}(\mathbf{O}_j^*) = \mathbf{f}_{6j}(\mathbf{O}_j^*) = 0 \quad (j = \overline{1,4}); \\ \mathbf{f}_{5j}(\mathbf{O}_{j+1}^*) = \mathbf{f}_{6j}(\mathbf{O}_{j+1}^*) = 0 \quad (j = \overline{1,3}); \quad \mathbf{f}_{54}(\mathbf{O}_1^*) = \mathbf{f}_{64}(\mathbf{O}_1^*) = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Через те, що у точках \mathbf{O}_j^* ($j = \overline{1,4}$) первісної задачі існує певний ненульовий стрибок напружень і похідних від переміщень, а тонка неоднорідність із фізичного погляду моделюється за допомогою розподілених вздовж її осі зосереджених сил і дислокацій [5, 7], то для того, щоб підправити накладене умовами (1) обмеження, додатково розмістимо у цих точках невідомі зосереджені сили \mathbf{Q}_j і дислокації \mathbf{b}_j ($j = \overline{1,4}$), які повинні забезпечити згаданий стрибок. Отже, напружений стан модельованої задачі шукатимемо у вигляді суперпозиції розв'язків для п'яти включень в однорідному просторі та невідомих зосереджених сил і дислокацій, що діють у точках \mathbf{O}_j^* ($j = \overline{1,4}$) контакту неоднорідностей

$$\begin{aligned} \sigma_{yz} + i\sigma_{zx} = \frac{i}{2\pi} \sum_{j=0}^4 \int_{\mathbf{L}_j} \frac{\mathbf{f}_{5j}(t) + i\mathbf{G}\mathbf{f}_{6j}(t)}{t e^{i\alpha_j} - (\mathbf{z} - \mathbf{z}_{0j})} dt + \sum_{j=1}^4 (\sigma_{yz}^{j*} + i\sigma_{zx}^{j*}), \quad (2) \\ \sigma_{yz}^{j*} + i\sigma_{zx}^{j*} = -\frac{i}{2\pi} \frac{\mathbf{Q}_j + i\mathbf{G}\mathbf{b}_j}{\mathbf{z} - \mathbf{z}^{j*}}, \quad \mathbf{z}^{j*} = \mathbf{x}^{j*} + i\mathbf{y}^{j*}. \end{aligned}$$

Тут σ_{yz}^{j*} , σ_{zx}^{j*} – напруження від дії зосередженої сили \mathbf{Q}_j і дислокації \mathbf{b}_j в точці \mathbf{O}_j^* із координатами \mathbf{z}^{j*} контакту неоднорідностей.

Для визначення невідомих $\mathbf{f}_{5j}, \mathbf{f}_{6j}$ ($j = \overline{0,4}$) за методом функцій стрибка треба використати умови взаємодії матриці з включеннями. Для пружної тонкої плівки завдовжки $2\mathbf{a}_j$, завтовшки $2\mathbf{h}_j$ з довільним сталим модулем зсуву \mathbf{G}_{Bj} , навантаженої симетричними зусиллями τ_{Bj} умови взаємодії можна подати у вигляді [5, 6]

$$\begin{aligned} \sigma_{sz}^{j+} + \sigma_{sz}^j + \frac{\mathbf{G}}{\mathbf{G}_{Bj}\mathbf{h}_j} \int_{-a_j}^{s_j} (\sigma_{nz}^{j+} - \sigma_{nz}^j) dt &= 2 \frac{\mathbf{G}\sigma_{sz}^{jc}(-\mathbf{a}_j)}{\mathbf{G}_{Bj}}, \\ \sigma_{nz}^{j+} + \sigma_{nz}^j + 2\tau_{Bj} - \frac{\mathbf{G}_{Bj}}{\mathbf{h}_j\mathbf{G}} \int_{-a_j}^{s_j} (\sigma_{sz}^{j+} - \sigma_{sz}^j) dt &= \frac{\mathbf{w}_j^*}{\mathbf{h}_j}. \end{aligned} \quad (3)$$

Тут $\sigma_{sz}^{j\pm}, \sigma_{nz}^{j\pm}$ – дотичні і нормальні напруження на верхньому (+) і нижньому (–) берегах неоднорідності у її локальній системі координат $\mathbf{s}_j\mathbf{O}_j\mathbf{n}_j$; $\sigma_{sz}^{jc}(-\mathbf{a}_j), \mathbf{w}_j^*$ – певні торцеві сталі лівої вершини неоднорідності, для визначення яких використовують апріорні залежності [5, 8]

$$\sigma_{sz}^{jc}(-\mathbf{a}_j) = \sigma_{sz}^0(-\mathbf{a}_j) \frac{\mathbf{G}_{Bj}}{\max(\mathbf{G}_{Bj}, \mathbf{G})}, \quad \mathbf{w}_j^* = 2\mathbf{h}_j(\mathbf{a}_j)\sigma_{nz}^0(-\mathbf{a}_j) \frac{\min(\mathbf{G}_{Bj}, \mathbf{G})}{\mathbf{G}}. \quad (4)$$

Перейдемо у (2) до локальної для j -го включення ($j = \overline{0,4}$) системи координат $\mathbf{s}_j\mathbf{O}_j\mathbf{n}_j$

$$\begin{aligned} \sigma_{nz}^j + i\sigma_{sz}^j &= [\sigma_{yz} + i\sigma_{xz}] \exp(i\alpha_j), \\ \mathbf{z} = \mathbf{x} + i\mathbf{y} &= \mathbf{z}_j \exp(i\alpha_j) + \mathbf{z}_{0j} = (\mathbf{s}_j + i\mathbf{n}_j) \exp(i\alpha_j) + \mathbf{z}_{0j}. \end{aligned}$$

Застосувавши до результату такого перетворення формулу Сохоцького – Племелі [9], отримаємо вирази для залежності напружень і переміщень на верхньому та нижньому берегах стрічкових неоднорідностей від невідомих функцій стрибків $\mathbf{f}_{5j}, \mathbf{f}_{6j}$ ($j = \overline{0,4}$)

$$\begin{aligned} \sigma_{nz}^{j\pm}(\mathbf{s}_j) + i\sigma_{sz}^{j\pm}(\mathbf{s}_j) &= \mathbf{m} \frac{1}{2} [\mathbf{f}_{5j}(\mathbf{s}_j) + i\mathbf{G}\mathbf{f}_{6j}(\mathbf{s}_j)] + \frac{i}{2\pi} \int_{L'_j} \frac{\mathbf{f}_{5j}(t) + i\mathbf{G}\mathbf{f}_{6j}(t)}{t - \mathbf{s}_j} dt + \\ &+ (\delta_{nz}^j + i\delta_{sz}^j) + \sum_{p=1}^4 (\sigma_{nz}^{pj*} + i\sigma_{sz}^{pj*}) \quad (j = \overline{0,4}), \\ \delta_{nz}^j + i\delta_{sz}^j &= \frac{i}{2\pi} \sum_{k=0, k \neq j}^4 \int_{L'_k} \frac{\mathbf{f}_{5k}(t) + i\mathbf{G}\mathbf{f}_{6k}(t)}{t \exp(i\alpha_k) - (\mathbf{s}_p \exp(i\alpha_j) + \mathbf{z}_{0j} - \mathbf{z}_{0k})} \exp(i\alpha_j) dt, \\ \sigma_{nz}^{pj*} + i\sigma_{sz}^{pj*} &= [\sigma_{yz}^{p*} + i\sigma_{xz}^{p*}] \exp(i\alpha_j). \end{aligned} \quad (5)$$

Підставляючи (5) в умови взаємодії матриці з включеннями (3), отримуємо десять сингулярних інтегральних рівнянь стосовно десяти невідомих функцій стрибків f_{5j} , f_{6j} ($j = \overline{0,4}$) та восьми невідомих сталих Q_j і b_j ($j = \overline{1,4}$)

$$\frac{1}{\pi} \int_{L_j} \frac{f_{5j}(t) dt}{t - s_j} - \frac{G}{G_{Bj} h_j} \int_{-a_j}^{s_j} f_{5j} dt + 2\delta_{sz}^j + 2 \sum_{p=1}^4 \sigma_{sz}^{pj*} = 2 \frac{G \sigma_{sz}^j(-a_j)}{G_{Bj}}, \quad (6)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{L_j} \frac{f_{6j}(t) dt}{t - s_j} - \frac{G_{Bj}}{G h_j} \int_{-a_j}^{s_j} f_{6j} dt - \frac{2}{G} \delta_{nz}^j - \frac{2}{G} \sum_{p=1}^4 \sigma_{nz}^{pj*} = -\frac{w_j^*}{G h_j} - \frac{2\tau_{Bj}}{G} \quad (j = \overline{0,4}).$$

Дві додаткові залежності задані умовами глобальної рівноваги досліджуваної неоднорідності L_0 і умовами однозначності переміщень при обході навколо неї

$$\int_{-a_0}^{a_0} f_{50}(t) dt = 0; \quad \int_{-a_0}^{a_0} f_{60}(t) dt = 0. \quad (7)$$

Отож, отримано десять сингулярних інтегральних рівнянь (6) стосовно десяти невідомих функцій стрибків та восьми невідомих сталих. Шістнадцять умов (1) і дві умови (7) дають змогу розв'язати отриману систему сингулярних інтегральних рівнянь. Розв'язок (1), (6), (7) шукатимемо на підставі методу колокацій [5], вважаючи, як і у загальній схемі відокремлених включень, що функції стрибків мають кореневі особливості на кінцях L_j .

Основними характеристиками поля напружень біля вістря тонких неоднорідностей вважатимемо, відповідно до [5], узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень (УКІН), що визначаються за формулами [5, 7]

$$K_{32}^A - iK_{31}^A = (p_5^A + iGp_6^A) \sqrt{\pi/2}, \quad p_j^A = \lim_{t \rightarrow -a_0} [\sqrt{a_0 + t} f_{j0}(-a_0)], \quad (8)$$

$$K_{32}^B - iK_{31}^B = -(p_5^B + iGp_6^B) \sqrt{\pi/2}, \quad p_j^B = \lim_{t \rightarrow a_0} [\sqrt{a_0 - t} f_{j0}(a_0)] \quad (j = \overline{5,6}).$$

Тут "A" і "B" – відповідно ліва і права вершини неоднорідності.

4. **Моделювання антипоскої деформації тіл із тріщинами за схемою методу граничних елементів.** Система інтегральних рівнянь дуального методу граничних елементів для задач теорії тріщин набуває вигляду [10]:

- коли точка колокації y розташована на межі $\Gamma = \bigcup_{j=1}^4 L_j$ тіла

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathbf{w}(\mathbf{y}) = & \text{RPV} \int_{\Gamma} \mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{t}(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \text{CPV} \int_{\Gamma} \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{w}(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) + \\ & + \int_{\Gamma_c^+} [\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma \mathbf{t}(\mathbf{x}) - \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta \mathbf{w}(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}); \end{aligned} \quad (9)$$

- коли точка колокації \mathbf{y} розташована на серединній поверхні $\Gamma_c = \mathbf{L}_0$ щілини

$$\left\{ \begin{aligned} & \text{RPV} \int_{\Gamma_c^+} \mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma \mathbf{t}(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \text{CPV} \int_{\Gamma_c^+} \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta \mathbf{w}(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) = \\ & = \Sigma \mathbf{w}(\mathbf{y})/2 - \int_{\Gamma} [\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{t}(\mathbf{x}) - \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{w}(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}), \\ & \mathbf{n}_j^+(\mathbf{y}) \left[\text{CPV} \int_{\Gamma_c^+} \mathbf{D}_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma \mathbf{t}(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \text{HPV} \int_{\Gamma_c^+} \mathbf{S}_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta \mathbf{w}(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \right] = \\ & = \Delta \mathbf{t}(\mathbf{y})/2 - \mathbf{n}_j^+(\mathbf{y}) \int_{\Gamma} [\mathbf{D}_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{t}(\mathbf{x}) - \mathbf{S}_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{w}(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}). \end{aligned} \right. \quad (9')$$

де \mathbf{w} , \mathbf{t} – ненульові компоненти векторів переміщень $(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{w})$ та напружень $(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{t})$; $\Delta \mathbf{w} = \mathbf{w}^+ - \mathbf{w}^-$, $\Delta \mathbf{t} = \mathbf{t}^+ - \mathbf{t}^-$, $\Sigma \mathbf{w} = \mathbf{w}^+ + \mathbf{w}^-$, $\Sigma \mathbf{t} = \mathbf{t}^+ + \mathbf{t}^-$; знаками «+» та «-» позначено величини, які стосуються поверхонь Γ_c^+ та Γ_c^- , утворених математичним розрізом Γ_c ; позначення **RPV** означає величину невластивого інтеграла (Riemann principal value); **CPV** – головне значення інтеграла (Cauchy principal value); **HPV** – скінченну частину гіперсингулярного інтеграла (Hadamard principal value). Індeksi у позначеннях відповідають проекціям векторів на осі глобальної системи координат $\mathbf{Ox}_1\mathbf{x}_2$. У формулах прийняте правило Ейнштейна підсумовування за індексом, що повторюється. Ядра інтегральних рівнянь для антиплоскої задачі теорії пружності набувають вигляду

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(\mathbf{x}, \xi) = & -\frac{\ln r}{2\pi G} + \mathbf{A}, \quad \mathbf{T}(\mathbf{x}, \xi) = -\frac{1}{2\pi r^2} \mathbf{r}_k \mathbf{n}_k \quad (\mathbf{k} = 1, 2). \\ \mathbf{D}_j = & \mathbf{r}_j / (2\pi r^2); \quad \mathbf{S}_j = \mathbf{G} [n_j r^2 - 2r_j (n_k r_k)] / (2\pi r^4). \end{aligned}$$

Тут $\mathbf{r}_i = \mathbf{x}_i - \xi_i$, $r = \sqrt{r_k r_k}$; \mathbf{G} – модуль зсуву.

Для розв'язування рівнянь (9) за схемою методу граничних елементів [10] зазвичай використовують розривні квадратичні елементи [10], які задаються Лагранжевими базовими функціями

$$\phi_1 = t \left(\frac{9}{8} t - \frac{3}{4} \right), \quad \phi_2 = \left(1 - \frac{3}{2} t \right) \left(1 + \frac{3}{2} t \right), \quad \phi_3 = t \left(\frac{9}{8} t + \frac{3}{4} \right) \quad (-1 \leq t \leq 1)$$

для системи вузлів $\mathbf{t}_p = [-2/3; 0; 2/3]$ тривузлового елемента. Це дає змогу обчислювати особливі інтеграли аналітично, однак у цьому разі не можна отримати достатньо високу точність обчислення коефіцієнтів інтенсивності напружень. Для підвищення точності методу та для зручності визначення

УКІН очевидно видається перевага введення спеціальних елементів, що моделюють приторцеві ділянки тріщини. У цьому разі постає необхідність числового обчислення інтегралів від добутку спеціальних базових функцій на сингулярні ядра задачі, оскільки аналітичне інтегрування надто складне, а можливо й нездійсненне.

Тому для моделювання приторцевої частини тріщини за допомогою тривузлових розривних граничних елементів введено такі системи базових функцій для розривів переміщень:

$$\phi_p^{\Delta w} = \Phi_{p1}^{\Delta w} \sqrt{\rho} + \Phi_{p2}^{\Delta w} \rho + \Phi_{p3}^{\Delta w} \rho^{3/2} \quad (p = 1, 2, 3). \quad (10)$$

Тут $\rho = 1 \pm t$ ($-1 \leq t \leq 1$) – нормована дугова координата граничного елемента; $\Phi_{pj}^{\Delta w}$ – матриця сталих, яку визначають з рівнянь

$$\phi_p(t_p) = 1, \quad \phi_p(t_{j \neq p}) = 0.$$

Базові функції у формі (10) дають значну перевагу, навіть порівняно зі спеціальними функціями [1] типу $\phi_p = \Phi_{p1} \sqrt{\rho} + \Phi_{p2} \rho + \Phi_{p3}$, оскільки вони вводять сталу складову в розриви переміщень у вершині дефекту, що фізично не виправдано. Саме тому в [1] КІН визначали все ж за допомогою J-інтеграла, а не безпосередньо (це було би природно) як коефіцієнт при $\sqrt{\rho}$.

Із введенням базових функцій (10) у числовій схемі методу граничних елементів треба обчислювати такі сингулярні інтеграли:

$$I_2 = \int_{-1}^1 T(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t_p)) \phi^{\Delta w}(t) dt, \quad I_4 = \int_{-1}^1 S(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t_q)) \phi^{\Delta w}(t) dt,$$

де $T : O(|t - t_p|^{-1})$, $S : O(|t - t_p|^{-2})$.

Для обчислення сингулярних інтегралів $I_{2,4}$ побудовано спеціальні квадратури інтерполяційного типу із вузлами Чебишева

$$\int_{-1}^1 \frac{f(s)}{s} ds = \sum_{k=1}^n A_k^{CPV} f(\sigma_k), \quad \int_{-1}^1 \frac{f(s)}{s^2} ds = \sum_{k=1}^n A_k^{HPV} f(\sigma_k), \quad (11)$$

де $\sigma_k = \cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right]$ – нулі поліномів Чебишева; n – парне додатне ціле число; інтеграли записані в сенсі головного значення чи скінченної частини. Квадратури (11) точні, коли $f(s)$ є поліномом степеня, меншого за n .

Для обчислення сингулярних і гіперсингулярних інтегралів за квадратурами (11) додатково запропоновано використовувати нелінійне відображення

$$\mathbf{t} = \mu(\mathbf{s}) = \mathbf{t}_p + (1 + (-2\mathbf{t}_p + (1/2 + (\mathbf{t}_p - \mathbf{s}/2)\mathbf{s})\mathbf{s})\mathbf{s}), \quad (12)$$

яке завдяки своїм властивостям

$$\begin{aligned} \mu(\pm 1) &= \pm 1, \quad \mu(0) = \mathbf{t}_p, \quad |\mu(\mathbf{s})| < 1 \\ (-1 < \mathbf{s} < 1, \mathbf{t}_p &= \{-2/3; 0; 2/3\}), \quad \mu'(\mathbf{s})|_{\mathbf{s}=\pm 1} = 0 \end{aligned}$$

дає змогу не тільки згладити підінтегральний вираз біля кінців проміжку інтегрування, а й перенести особливу точку \mathbf{t}_p в точку $\mathbf{s} = 0$. Із використанням відображення (12) і спеціальних квадратур (11) інтеграли $I_{2,4}$ обчислюють так:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{-1}^1 \mathbf{T}(\mathbf{x}(\mathbf{t}), \mathbf{y}(\mathbf{t}_p)) \phi^{\Delta w}(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = \int_{-1}^1 \mathbf{T}[\mathbf{x}(\mu(\mathbf{s})), \mathbf{y}(\mathbf{t}_p)] \phi^{\Delta w}(\mu(\mathbf{s})) \mu'(\mathbf{s}) d\mathbf{s} \approx \\ &\approx \sum_{k=1}^n \mathbf{A}_k^{CPV} \mathbf{T}[\mathbf{x}(\mu(\sigma_k)), \mathbf{y}(\mathbf{t}_p)] \phi^{\Delta w}(\mu(\sigma_k)) \sigma_k \mu'(\sigma_k), \\ I_4 &= \int_{-1}^1 \mathbf{S}(\mathbf{x}(\mathbf{t}), \xi(\mathbf{t}_p)) \phi^{\Delta w}(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = \int_{-1}^1 \mathbf{S}[\mathbf{x}(\mu(\mathbf{s})), \mathbf{y}(\mathbf{t}_p)] \phi^{\Delta w}(\mu(\mathbf{s})) \mu'(\mathbf{s}) d\mathbf{s} \approx \\ &\approx \sum_{k=1}^n \mathbf{A}_k^{HPV} \mathbf{S}[\mathbf{x}(\mu(\sigma_k)), \mathbf{y}(\mathbf{t}_p)] \phi^{\Delta w}(\mu(\sigma_k)) \sigma_k^2 \mu'(\sigma_k). \end{aligned}$$

Базові функції приторцевих елементів у формі (10) дають також змогу безпосередньо визначити коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН) \mathbf{K}_3 : \mathbf{K}_{31} як коефіцієнт при \sqrt{r} [5]

$$\mathbf{K}_{31} = \mathbf{G} \sqrt{\frac{\pi}{8}} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\Delta w(\mathbf{r})}{\sqrt{r}},$$

де \mathbf{r} – відстань до вершини тріщини.

5. **Аналіз результатів.** Вивчимо вплив геометричних та фізичних параметрів тіла і неоднорідності на УКІН, отримані двома методами.

Приклад 1. Розглянемо антиплоску деформацію квадратного в плані тіла з вільними берегами і навантаженою тріщиною.

Проаналізуємо вплив кута орієнтації центральної неоднорідності (табл. 1) на нормовані КІН $\mathbf{K}_3^{0B} = \mathbf{K}_3^B / \tau \sqrt{\pi a}$.

Таблиця 1

Вплив кута орієнтації центральної тріщини на КІН \mathbf{K}_3^{0B}

α \backslash a/b	0,5		0,7		0,9	
	МППВ	МГЕ	МППВ	МГЕ	МППВ	МГЕ
0	1,1305	1,1305	1,3376	1,3376	2,1136	2,1181

$\pi/12$	1,1266	1,1266	1,3137	1,3136	1,8997	1,9009
$\pi/6$	1,1187	1,1187	1,2667	1,2665	1,5872	1,5863
$\pi/4$	1,1148	1,1148	1,2435	1,2431	1,4606	1,4593
$\pi/3$	1,1187	1,1187	1,2667	1,2665	1,5872	1,5863
$5\pi/12$	1,1266	1,1266	1,3137	1,3136	1,8997	1,9009
$\pi/2$	1,1305	1,1305	1,3376	1,3376	2,1135	2,1181

Мінімальні КІН центральної тріщини отримано при $\alpha = \pi/4$ за найбільшого віддалення кінців тріщини від межі тіла; максимальні – при $\alpha = 0, \pi/2$, коли вершини тріщини знаходяться найближче до граней досліджуваного тіла. Відносна різниця отриманих двома методами результатів не перевищує 1 %, що підтверджує достовірність одержаних даних.

Дослідимо вплив відносного розміщення $d = 2y_0/b$ (див. рис. 2) паралельної ($\alpha = 0$) щодо осі абсцис тріщини (табл. 2)

Таблиця 2

Вплив розміщення тріщини на КІН K_3^{0B}

$d \backslash a/b$	0,5		0,7		0,9	
	МППВ	МГЕ	МППВ	МГЕ	МППВ	МГЕ
0	1,1305	1,1305	1,3376	1,3375	2,1136	2,1181
0,1	1,1306	1,1306	1,3377	1,3376	2,1137	2,1181
0,2	1,1309	1,1309	1,3379	1,3378	2,1138	2,1182
0,5	1,1336	1,1337	1,3401	1,3400	2,1143	2,1187
0,8	1,1416	1,1416	1,3464	1,3463	2,1158	2,1203
1	1,1534	1,1533	1,3561	1,3559	2,1182	2,1227
1,3	1,1950	1,1948	1,3928	1,3924	2,1285	2,1330
1,5	1,2618	1,2613	1,4577	1,4568	2,1504	2,1549
1,9	2,0670	2,0527	2,3827	2,3649	2,8354	2,8142

З наближенням до вільної межі області спостерігаємо монотонне збільшення значень КІН. Збільшення лінійних розмірів досліджуваного квадрата спричинює зменшення КІН. Практично всі результати, отримані двома методами, крім обчислених для досить близького розміщення тріщини до межі тіла при $d = 1,9$ та при $a/b = 0,9$, відрізняються між собою не більше, як на 0,1 %. Для $d = 1,9$, $a/b = 0,9$ ця різниця не перевищує 1 %.

Приклад 2. Розглянемо антиплоску деформацію квадратного в плані тіла з жорстко зацемленими берегами і навантаженою тріщиною. Лінійні

розміри квадрата – $b = 2a$; відносьне розташування центру неоднорідності – $d = y_0/a$. Усі обчислення виконані двома запропонованими методами. Відносьне відхилення результатів не перевищує 0,1 %.

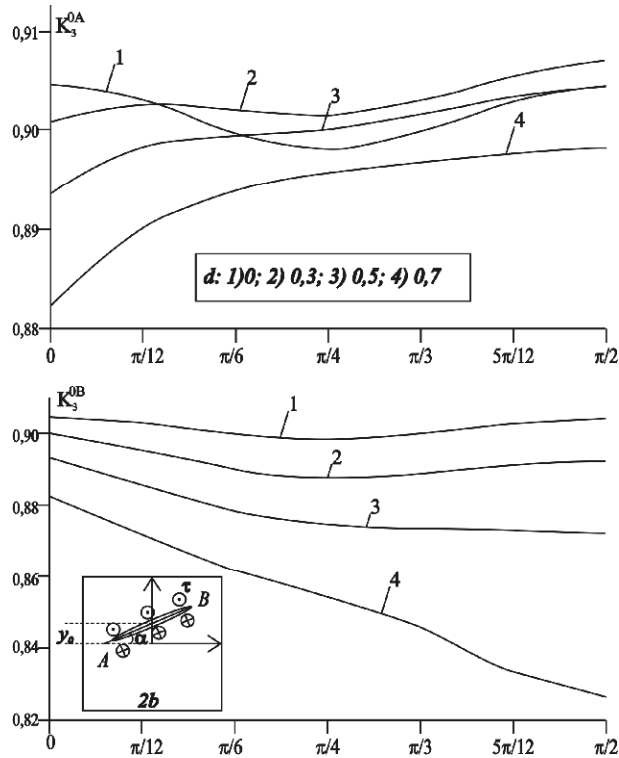


Рис. 1. КІН тріщини залежно від кута орієнтації і відносьного розміщення d

Вивчаючи вплив орієнтації неоднорідності та її відносьного розміщення на УКІН $K_3^{0AB} = K_3^{AB} / \tau \sqrt{\pi a}$ (рис. 3), спостерігаємо, що наближення вершини тріщини (B) до заземленого берега зменшує її КІН біля кожної з вершин A і B . А ось залежність K_3^{0A} , K_3^{0B} від кута α може бути немонотонною. Це пов'язано передусім з поступовим послабленням впливу одних граней квадрата і посиленням впливу інших.

Під час розв'язування системи сингулярних інтегральних рівнянь (6) з додатковими умовами (1), (7) методом колокацій [5] брали $N = 40$ членів розвинення в ряд функцій стрибків. Для розв'язування інтегральних рівнянь (9) задачі за схемою методу граничних елементів використано 31 елемент для моделювання поверхні тріщини та по 35 елементів для кожної з бічних сторін квадратного в плані тіла. У цьому разі для двох крайніх

граничних елементів тріщини використано базові функції у формі (10), а для решти – звичайні Лагранжеві.

6. **Висновки.** На підставі методу функцій стрибків і принципу спряження континуумів різної вимірності на прикладі прямокутника з тріщиною запропоновано два зручних способи визначення напружено-деформованого стану обмежених тіл з тонкими стрічковими неоднорідностями. В одному з них задача зведена до визначення напружено-деформованого стану простору зі збільшеною кількістю навантажених неоднорідностей і невідомих зосереджених сил і дислокацій, які діють у вершинах модельованого об'єкта. Розроблений за схемою методу граничних елементів числовий алгоритм підтвердив достовірність застосування запропонованого підходу. Різниця між отриманими за допомогою двох методів результатами обчислення КІН не перевищувала 1%.

1. Pan E. Fracture mechanics analysis of 2D anisotropic media with a new formulation of the boundary element method / E. Pan, B. Amadei // *Int. J. Fract.* – 1996. – 77. – P. 161–174.
2. Wei-Liang Wu. Dual Boundary Element Method Applied to Antiplane Crack Problems / Wei-Liang Wu // *Mathematical Problems in Engineering.* – 2009. – Article ID 132980, 10 pages, 2009. doi:10.1155/2009/132980
3. X. S. Zhang. A tearing mode crack located anywhere in a finite rectangular sheet / X. S. Zhang // *Engineering Fracture Mechanics.* – 1989. – Vol. 33, № 4. P 509 – 516.
4. Саврук М. П. Поздовжній зсув безмежного тіла із системою ламаних тріщин / Саврук М. П., Осечко А. М. // *ФХММ.* – 2003. – Т. 39, № 5. – С. 49 – 58.
5. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями / Сулим Г. Т. – Монографія. – Львів, 2007.
6. Васільєв К.В. Прямий метод вирізування для моделювання напружено-деформованого стану ізотропних шаруватих середовищ з тонкими неоднорідностями за антиплаского деформування / Васільєв К.В. Сулим Г.Т. // *Машинознавство.* – 2006. – №11-12. – С. 10-17.
7. Божидарник В. В. Елементи теорії пластичності та міцності / Божидарник В. В. Сулим Г. Т. – Львів, 1994.
8. Сулим Г. Т. Антиплоская задача для системы линейных включений в изотропной среде / Сулим Г. Т. // *Прикл. матем. и механика.* – 1981. – Т. 45, № 2. – С. 308 – 318.
9. Божидарник В. В. Елементи теорії пружності / Божидарник В. В. Сулим Г. Т. – Львів, 1994.

АНТИПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ КВАДРАТНОГО В ПЛАНЕ ТЕЛА С ВНУТРЕННЕЙ ТОНКОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

Кирилл ВАСИЛЬЄВ¹, Ярослав ПАСТЕРНАК¹, Георгий СУЛИМ²

¹*Институт прикладных проблем механики и математики
им. Я. С. Подстригача, ул. Научная, 3б 79060 Львов, Украина*

²*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1 79000 Львов, Украина*

Предложено два метода исследования антиплоской деформации ограниченных тел с тонкими ленточными неоднородностями. Первый – аналитико-численный способ решения задачи – состоит в моделировании ограниченной области с помощью пространства с системой контактирующих между собой неоднородностей, в точках контакта которых действуют неизвестные сосредоточенные силы и дислокации. Для верификации этого метода разработан второй подход на основе схемы метода граничных элементов. Вычисления осуществлены для примера квадрата с произвольно размещенной внутренней трещиной. Разница между результатами применения двух методов не превысила 1%.

Ключевые слова: антиплоская деформация, МППВ, МГЭ, прямоугольное в плане тело, трещина, КИН.

ANTIPLANE DEFORMATION OF THE RECTANGULAR SOLID WITH THIN INTERNAL HETEROGENEITY

Kirill VASIL'EV¹, Iaroslav PASTERNAK¹, Heorhiy SULYM²

¹*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics,
Naukova St., 3b 79060, Lviv, Ukraine*

²*Ivan Franko National University of L'viv,
Universytetska Str., 1 79000 L'viv, Ukraine*

This paper presents two methods for studying the antiplane deformation of finite solids containing thin ribbon-like inclusions. The first one is the analytic-numerical method, which models finite domains using the infinite medium with the system of contacting heterogeneities with the unknown concentrated forces and dislocations located at the contact points. For verification of this method, the second numerical approach is proposed basing on the boundary element method procedure. Numerical examples are presented for a square domain with the arbitrarily located crack. The difference between the results of two methods is less than 1 % that shows the efficiency of proposed approaches.

Key words: antiplane deformation, method of direct complete cutting, BEM, rectangular solid, crack, SIF

Стаття надійшла до редколегії 17.05.2010

Прийнята до друку 22.12.2010