

УДК 539.3

ЗГИН ПЛАСТИНИ РЕЙССНЕРА З ПЕРІОДИЧНОЮ СИСТЕМОЮ НАСКРІЗНИХ КОЛІНЕАРНИХ ТРІЩИН З УРАХУВАННЯМ ШИРИНИ ОБЛАСТІ КОНТАКТУ ЇХНІХ БЕРЕГІВ

Ігор ЯЦИК

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна*

Розглянуто задачу згину безмежної ізотропної пластини рівномірно розподіленими згинальними моментами на нескінченності, яка ослаблена періодичною системою наскрізних співвісних тріщин, береги яких вільні від зовнішнього навантаження. Припускається, що береги тріщин контактують поблизу верхньої основи пластини вздовж усієї їхньої довжини, причому зона контакту має сталу для кожної тріщини ширину. Внаслідок контакту берегів тріщин розв'язок задачі подано як суперпозицію розв'язків двох задач: плоскої задачі та задачі згину пластин з використанням теорії Рейсснера. Використовуючи методи теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів, отримано систему сингулярних інтегральних рівнянь, яку розв'язано чисельно за допомогою методу механічних квадратур. Наведено результати числового аналізу задачі.

Ключові слова: плоска задача теорії пружності, теорія згину пластин за Рейсснером, ізотропна пластинка, періодична система наскрізних колінеарних тріщин, ширина області контакту, комплексні потенціали, контактне зусилля, коефіцієнти інтенсивності зусиль і моментів.

Вступ. Широке використання у техніці і будівництві елементів конструкцій у формі пластин вимагає розробки методів оцінки їхньої міцності в умовах дефектності матеріалу внаслідок існуючих тріщин, які є потужними концентраторами напружень і, отже, значно зменшують величину допустимих навантажень. Тріщини виникають також у процесі експлуатації структурних елементів, вони розвиваються і є основною причиною їхнього руйнування.

Формулювання задач згину пластин з тріщинами без урахування контакту їхніх берегів і методи їхнього розв'язування добре відомі [1–3]. Оскільки не враховували можливість берегів контактувати, то це зумовило кінематичне протиріччя – накладання одного берега на інший в тих місцях, де нормальні напруження від'ємні. З використанням класичної теорії згину тонких пластин в останні роки [4–7] були отримані розв'язки багатьох задач згину пластин з тріщинами з урахуванням контакту берегів тріщини вздовж лінії на одній з основ пластини, а в працях [8, 9] розв'язані деякі задачі в припущенні про контакт берегів тріщини за всією довжиною вздовж зони постійної ширини. Праці [10–12] використовують з цією метою вже й уточнені теорії згину пластин.

Наша мета – дослідити аналіз впливу періодичної системи тріщин у пластині Рейсснера за її згину у випадку, коли береги тріщин взаємодіють один з одним без тертя вздовж смуги постійної ширини на її напружено-деформований стан. Розв’язок шукають у вигляді суперпозиції розв’язків двох задач – задачі про плоский напружений стан і задачі згину пластини за рівняннями Рейсснера. Використовуючи метод функції комплексної змінної та комплексні потенціали, отримано систему сингулярних інтегральних рівнянь, яку розв’язано числовим методом механічних квадратур. Наведено результати числового аналізу контактної зусилля між берегами тріщин і коефіцієнтів інтенсивності моментів. В окремих випадках були отримані вже відомі в літературних працях дані.

Формулювання задачі. Нехай маємо ізотропну пластину постійної товщини $2h$ з періодичною системою наскрізних тріщин довжини $2l$, які розташовані на спільній прямій, де відстань між центрами сусідніх тріщин позначимо через $2d$ (див. рис. 1). Дослідимо задачу про її згин рівномірно розподіленими згинальними моментами на нескінченності.

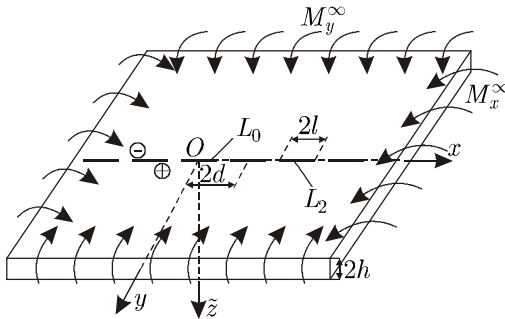


Рис. 1. Схема навантаження пластини з тріщинами

координат O у центрі однієї з тріщин, спрямувавши вісь Ox уздовж тріщин. Позначимо контактне зусилля між берегами k -ї тріщини через N_k ($N_k > 0$), розподілені згинальні моменти на нескінченності – через M_x^∞ і M_y^∞ , а відрізки дійсної осі $[-l + 2dk, l + 2dk]$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) – відповідно, через L_k і $L = \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} L_k$.

Надалі використовуватимемо такі позначення: μ – модуль зсуву; E – модуль Юнга; ν – коефіцієнт Пуассона; $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$.

Унаслідок контакту берегів тріщин розв’язок задачі ділимо на дві частини: плоску задачу теорії пружності і задачу згину пластини з використанням теорії Рейсснера.

На берегах k -ї тріщини, згідно з формулюванням задачі, маємо такі крайові умови:

Припустимо, що під впливом зовнішнього навантаження береги тріщин приходять у гладкий контакт за всією їхньою довжиною уздовж двовимірної області постійної ширини h_1 поблизу верхньої основи пластини, причому до її деформування береги тріщин були вільними від зовнішнього навантаження.

Виберемо декартову систему координат Oxy з координатними осями Ox і Oy у серединній площині пластини і початком

$$\sigma_{yy}^+ = \sigma_{yy}^- = -N_k/(2h), \quad \sigma_{xy}^+ = \sigma_{xy}^- = 0, \quad \mathbf{x} \in L_k, \quad (1)$$

$$M_y^+ = M_y^- = M_k, \quad Q_y^+ = Q_y^- = 0, \quad H_{xy}^+ = H_{xy}^- = 0, \quad \mathbf{x} \in L_k, \quad (2)$$

$$M_k = \beta h N_k, \quad \partial_x [v_\Pi] - \alpha h \partial_x [\varphi_y] = 0, \quad \mathbf{x} \in L_k, \quad (3)$$

де σ_{xy} , σ_{yy} і v_Π – відповідно, компоненти тензора напружень і проекція вектора переміщення точки на вісь Oy у плоскій задачі; φ_y – усереднений за товщиною пластини кут повороту нормалі до серединної площини пластини в задачі згину [13]; M_y – згинальний момент; Q_y і H_{xy} – поперечна сила і крутний момент, відповідно; $\partial_x = \partial/\partial \mathbf{x}$, $[f] = f^+ - f^-$; значками «+» і «-» позначені граничні значення функції при прямуванні точки площини до тріщин коли $y \rightarrow \pm 0$; $\alpha = 0.5\{1 + (1 - \gamma)^2\}$, $\beta = 1 - \gamma/3$ і $\gamma = h_1/h$ – наведена ширина області контакту [8].

Потрібно знайти напружено-деформований стан пластини.

Побудова розв'язку задачі. При визначенні плоского напруженого стану введемо комплексні потенціали $\Phi_\Pi(\mathbf{z})$ і $\Omega_\Pi(\mathbf{z})$, які прямують до нуля на нескінченності, а для визначення напружено-деформованого стану пластини правильні залежності [14]

$$\sigma_{yy} - i\sigma_{xy} = \Phi_\Pi(\mathbf{z}) + \Omega_\Pi(\bar{\mathbf{z}}) + (\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}})\overline{\Phi_\Pi'(\mathbf{z})},$$

$$2\mu\partial_x(\mathbf{u}_\Pi + i\mathbf{v}_\Pi) = \kappa\Phi_\Pi(\mathbf{z}) - \Omega_\Pi(\bar{\mathbf{z}}) - (\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}})\overline{\Phi_\Pi'(\mathbf{z})}. \quad (4)$$

Комплексний потенціал $\Phi_\Pi(\mathbf{z})$ візьмемо у вигляді [15]

$$\Phi_\Pi(\mathbf{z}) = 1/(4di) \int_{-l}^l \text{ctg}\left\{\pi(t - \mathbf{z})/(2d)\right\} \mathfrak{G}'(t) dt, \quad (5)$$

де $\mathfrak{G}'(\mathbf{x}) = 2\mu\partial_x[\mathbf{u}_\Pi + i\mathbf{v}_\Pi]/(1 + \kappa) = \mathfrak{G}'_1(\mathbf{x}) + i\mathfrak{G}'_2(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in L$.

Врахувавши (4), з крайових умов (1) отримаємо задачу лінійного спряження, розв'язавши яку знайдемо, що $\Phi_\Pi(\mathbf{z}) = \Omega_\Pi(\mathbf{z})$, а також, врахувавши (5), одержимо залежності

$$-N_k/(2h) = 1/(2d) \int_{-l}^l \text{ctg}\left\{\pi(t - \mathbf{x})/(2d)\right\} \mathfrak{G}'_2(t) dt, \quad \mathbf{x} \in L_k, \quad (6)$$

$$\int_{-l}^l \text{ctg}\left\{\pi(t - \mathbf{x})/(2d)\right\} \mathfrak{G}'_1(t) dt = 0, \quad \mathbf{x} \in L. \quad (7)$$

Розв'язавши сингулярне рівняння (7) [16] і врахувавши, що $\int_{L_k} \mathfrak{G}'_1(t) dt = 0$, одержимо $\mathfrak{G}'_1(t) = 0$, $t \in L$.

Для побудови розв'язку задачі згину введемо комплексні потенціали $\Phi(z)$ і $\Psi(z)$, функцію $\Omega(z, \bar{z})$ і скористаємося залежностями [17], які після перетворень запишемо у вигляді

$$M_y + iH_{xy} = 2m \operatorname{Re} \Phi(z) + n \{ z \overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)} \} + \rho \{ 2 \overline{\Phi''(z)} + i \overline{\partial_{zz}^2 \Omega(z, \bar{z})} \}, \quad (8)$$

$$Q_x - iQ_y = -2D \{ 2\Phi'(z) - i\partial_z \Omega(z, \bar{z}) \}, \quad (9)$$

де $D = 2Eh^3 / \{ 3(1 - \nu^2) \}$; $m = -D(1 + \nu)$; $n = D(1 - \nu)$; $\rho = 4D/k_*^2$; $k_*^2 = 5/(2h^2)$; $\partial_z = 0.5(\partial_x - i\partial_y)$; функція $\Omega(z, \bar{z})$ – розв'язок рівняння Гельмгольца $4\partial_{z\bar{z}}^2 \Omega(z, \bar{z}) = k_*^2 \Omega(z, \bar{z})$; $\partial_{\bar{z}} = 0.5(\partial_x + i\partial_y) = \overline{\partial_z}$.

Комплексні потенціали $\Phi(z)$ і $\Psi(z)$ запишемо у вигляді [2]

$$\Phi(z) = \Phi_*(z) + \Gamma, \quad \Psi(z) = \Psi_*(z) + \Gamma', \quad (10)$$

де $\Gamma = (M_x^\infty + M_y^\infty)/(4m)$, $\Gamma' = (M_y^\infty - M_x^\infty)/(2n)$; $\Phi_*(z)$ і $\Psi_*(z)$ – голоморфні функції, які зникають на безмежності.

Враховуючи результати [8, 10], функції $\Phi_*(z)$ і $\Omega(z, \bar{z})$ подамо так:

$$\Phi_*(z) = 1/(4di) \int_{-1}^1 \operatorname{ctg} \{ \pi(t-z)/(2d) \} g(t) dt, \quad g(t) = g_1(t) + i g_2(t), \quad (11)$$

$$\Omega(z, \bar{z}) = k_*/\pi \operatorname{Im} \left\{ \int_L r K_1(k_* r)/(t-z) \omega(t) dt \right\}, \quad \omega(t) = \omega_1(t) + i \omega_2(t), \quad (12)$$

де $r = \sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}$, $g_1(t)$, $g_2(t)$, $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$ – невідомі дійсні функції; тут і надалі $K_j(x)$ – функція Макдональда j -го порядку; $j = 1, 2$.

Враховувавши формули (10)–(12) та обчисливши похідні від функції $\Omega(z, \bar{z})$, що входять у вирази (8) і (9), і ввівши функцію $V(z) = q \overline{\Phi_*(z)} + z \overline{\Phi'_*(z)} + \overline{\Psi_*(z)} + m_1/(k_*^2 \pi i) \int_L \overline{\delta(t)}/(t-z)^3 dt$, можемо записати

$$M_y + iH_{xy} = n \{ q(\Phi_*(z) + 2\Gamma) + \Gamma' + V(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \overline{\Phi'_*(z)} + i m_1 k_*^{-2} \overline{\Omega_2(z, \bar{z})} \}, \quad (13)$$

$$Q_x - iQ_y = -2D \{ P(z) - i \Omega_1(z, \bar{z}) \}, \quad (14)$$

де $P(z) = -1/(2\pi i) \int_L \delta(t)/(t-z)^2 dt$, $q = -(1+\nu)/(1-\nu)$, $m_1 = 4/(1-\nu)$,
 $\delta(t) \equiv \delta_1(t) + i\delta_2(t) = -2g(t) + i\omega(t)$, $\delta_1(t)$ і $\delta_2(t)$ – дійсні функції;

$$\Omega_1(z, \bar{z}) = \frac{ik_*^2}{2\pi} \int_L \left\{ \frac{r^2 \mathfrak{K}_1(k_* r)}{(t-z)^2} \omega(t) + \frac{(t-\bar{z}) K_0(k_* r)}{r^2} \operatorname{Re} \{ (t-\bar{z}) \omega(t) \} \right\} dt,$$

$$\Omega_2(z, \bar{z}) = k_*^2/(2\pi) \left\{ \int_L r^2 \mathfrak{K}_2(k_* r) / \{ i(t-z)^3 \} \omega(t) dt - k_*/2 \operatorname{Im} \left\{ \int_L K_1(k_* r) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times r/(t-z) \omega(t) dt \right\} + k_* \int_L (t-x)/r^3 K_1(k_* r) (t-\bar{z}) \operatorname{Im} \{ (t-\bar{z}) \omega(t) \} dt \right\},$$

$$\mathfrak{K}_1(x) = K_1(x) - 1/x, \quad \mathfrak{K}_2(x) = K_2(x) - 2/x^2.$$

Враховуючи умови $\delta(2dk - I) = \delta(2dk + I) = 0$, функцію $P(z)$ запишемо у вигляді $P(z) = -1/(2\pi i) \int_L \delta'(t)/(t-z) dt$, звідки отримаємо

$$P^+(x) - P^-(x) = -\delta'(x) \quad (x \in L). \quad (15)$$

Задовольнивши за допомогою формули (14) другу крайову умову (2) і врахувавши співвідношення (15), одержимо $\delta_2'(x) = 0$, а з вище наведених умов випливає, що $\delta_2(x) = 0$, тому правильні залежності $\omega_1(x) = 2g_2(x)$, $\omega_2(x) = -2g_1(x) - \delta_1(x)$.

Враховуючи (13), з першої і третьої крайових умов (2) одержимо задачу лінійного спряження, з якої знаходимо

$$V(z) = 1/(2\pi i) \int_L \{ qg_1(t) - im_2 g_2(t) \} / (t-z) dt, \quad m_2 = (5+\nu)/(1-\nu).$$

Скориставшись залежністю $\partial_x(\varphi_x + i\varphi_y) = -\{ \Phi_*(z) + m_1/2 \overline{\Phi_*(z)} + (z-\bar{z}) \overline{\Phi'_*(z)} + V(\bar{z}) + im_1 \{ \overline{\Omega_2(z, \bar{z})}/k_*^2 + \Omega(z, \bar{z})/4 \} \}$, одержимо $\partial_x[\varphi_x + i\varphi_y] = -m_1 \{ g_1(x) + ig_2(x) \}$, $x \in L$, звідки, на підставі другої умови (3) отримаємо $\mathfrak{G}_2(t) = -2\alpha h m_1 \mu / (1+\kappa) g_2(t)$, $t \in L$. Врахувавши це, (6)

$$\text{запишемо у вигляді } N_k = \frac{2\alpha h^2 m_1 \mu}{d(1+\kappa)} \int_{-l}^l \operatorname{ctg} \{ \pi(t-x)/(2d) \} g_2(t) dt, \quad x \in L_k.$$

Враховуючи (11), (13), (14) і наведені викладення, з крайових умов (2) і (3) одержимо систему інтегральних рівнянь для визначення невідомих функцій $g_1(x)$ і $\delta_1(x)$, з якої знаходимо, що $g_1(x) = \delta_1(x) = 0$, і рівняння для визначення невідомої функції $g_2(x)$

$$\int_L \{ n_1 + \rho\rho/n + 2m_1 \mathfrak{K}_2(k_* |t-x|) \} / (t-x) g_2(t) dt = 2\pi M_y^\infty / n, \quad x \in L_k, \quad (16)$$

де $n_1 = 2(3 + \nu)/(1 - \nu)$, $\rho\rho = 8\alpha\beta h^3 m_1 \mu / (1 + \kappa)$.

У цьому разі справджуються додаткові умови $\int_{L_k} g_2(t) dt = 0$.

Обезрозміривши систему рівнянь (16) разом з додатковими умовами та врахувавши симетрію задачі, можемо записати

$$\int_{-1}^1 \left\{ \{3 + \nu + 3\alpha\beta(1 + \nu)\} \pi / (2\xi) \operatorname{ctg} \left\{ \pi(T - X) / (2\xi) \right\} + 4 \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \mathbb{K}_2(|T - X + 2\xi k / \lambda|) / (T - X + 2\xi k) \right\} g_2^*(T) / \sqrt{1 - T^2} dT = 1, \quad X \in [-1, 1],$$

$$\int_{-1}^1 g_2^*(T) / \sqrt{1 - T^2} dT = 0, \quad (17)$$

де $\lambda = 1/(k_1 l)$, $\xi = d/l$, $g_2^*(T) = D \sqrt{1 - T^2} g_2(IT) / (\pi M_y^\infty)$.

Систему рівнянь (17) розв'язуємо методом механічних квадратур [15].

Для визначення коефіцієнтів інтенсивності зусиль (КІЗ) K_1^\pm і моментів (КІМ) K_M^\pm у вершинах тріщин скористаємося залежностями з монографій [3, 17], які після перетворень набудуть вигляду

$$K_M^\pm = m m \sqrt{l} \pi M_y^\infty / D g_2^*(\pm 1), \quad K_1^\pm = 3\alpha K_M^\pm / h, \quad (18)$$

де $g_2^*(\pm 1) = m_1 / S \sum_{s=1}^S (-1)^{s+0.5(1m_1)S} g_2^*(T_s) \operatorname{tg}^{m_1} \left\{ (2s - 1) \pi / (4S) \right\}$; $T_s = \cos \left\{ \frac{2s - 1}{2S} \pi \right\}$; S – кількість вузлів методу механічних квадратур.

Числовий аналіз задачі. Провели числовий аналіз задачі при $\nu = 0.3$ і $\gamma = 0.1$. На рис. 2 зображено графічну залежність зведеного контактного зусилля $\tilde{N} = h N_k / M_y^\infty$ уздовж тріщин, причому, враховуючи симетрію

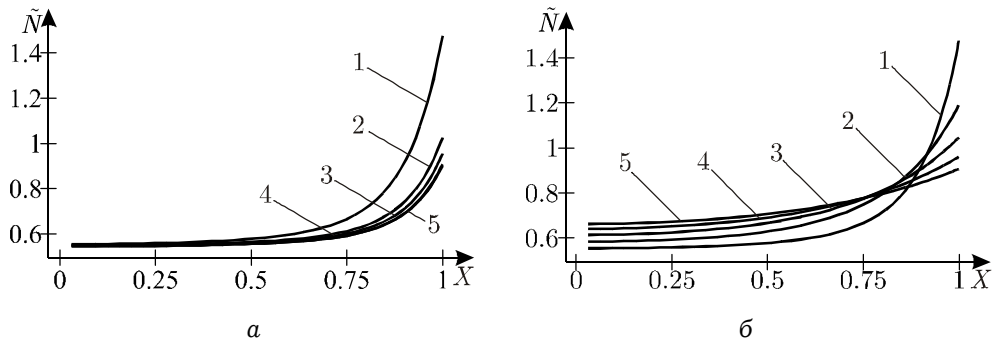


Рис 2. Графічні залежності зведеного контактного зусилля

задачі стосовно осі, що проходить через середину тріщини, графічні залежності наведемо при $X \geq 0$. Рис. 2,а побудовано при $\mathbb{P} = h/l = 0.1$, причому кривій 1 відповідає $\xi = d/l = 1.1$, кривій 2 – $\xi = 1.5$, кривій 3 – $\xi = 2$, кривій 4 – $\xi = 5$, кривій 5 – $\xi = 10$, а рис. 2,б – при $\xi = 1.1$, причому кривій 1 відповідає $\mathbb{P} = 0.1$, кривій 2 – $\mathbb{P} = 0.2$, кривій 3 – $\mathbb{P} = 0.3$, кривій 4 – $\mathbb{P} = 0.4$, кривій 5 – $\mathbb{P} = 0.5$.

Як видно з рис. 2, зі зменшенням параметра \mathbb{P} та зі зближенням тріщин максимальне значення \tilde{K}_M збільшується і досягається біля вершин тріщин. Крім того, за цих значень параметрів вплив відстані між тріщинами на зведене контактне зусилля порівняно з впливом параметра \mathbb{P} не є значним.

На рис. 3,а зображені графічні залежності зведеного КІМ $\tilde{K}_M = K_M^\pm / (M_y^\infty \sqrt{l})$ від параметра \mathbb{P} , а на рис. 3,б ці ж залежності – від параметра ξ . На рис. 3,а крива 1 побудована при $\xi = 1.1$, крива 2 – при $\xi = 1.5$, крива 3 – при $\xi = 2$, крива 4 – при $\xi = 5$, крива 5 – при $\xi = 10$. На рис. 3,б крива 1 наведена при $\mathbb{P} = 10^{-5}$, крива 2 – при $\mathbb{P} = 0.25$, крива 3 – при $\mathbb{P} = 0.5$.

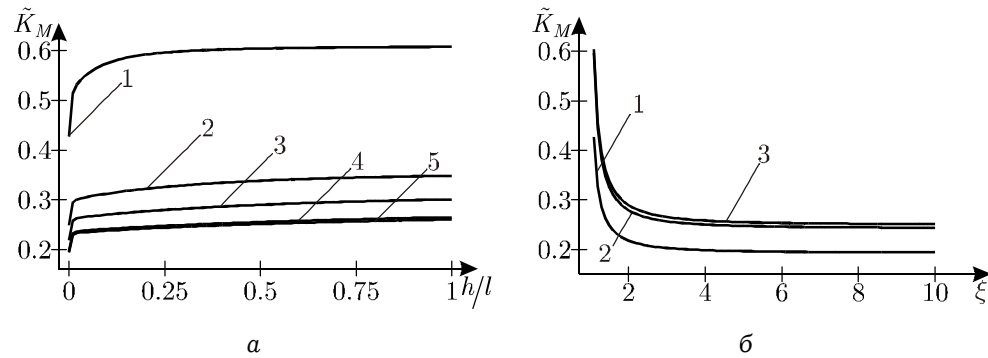


Рис 3. Графічні залежності зведеного КІМ

З рис. 3 видно, що зростання параметра \mathbb{P} і зменшення ξ призводить до збільшення \tilde{K}_M , особливо за малих значень \mathbb{P} . Коли $\xi \rightarrow 1$, КІМ швидко прямують до нескінченності.

Зауважимо, що КІЗ K_I^\pm пов'язаний з КІМ K_M^\pm згідно з формулою (18), тому графічних залежностей для нього не наводимо.

Зазначимо також, що у часткових випадках отримані відомі в літературі результати для згину пластини з тріщинами за класичною теорією згину пластин [5] (при $\gamma = 0$ і $\mathbb{P} \rightarrow 0$) і [9] (при $\mathbb{P} \rightarrow 0$), та за теорією Рейсснера [12] (при $\xi \rightarrow \infty$).

1. *Бережницький Л. Т.* Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин / Л. Т. Бережницький, М. В. Делявский, В. В. Панасюк. – К., 1979.
2. *Прусов И. А.* Метод сопряжения в теории плит / И. А. Прусов. – Минск, 1975.
3. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / М. П. Саврук. – К., 1981.
4. *Шацький І. П.* Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами / І. П. Шацький // Доп. АН УРСР. Сер. А. Фіз.-мат. та техн. науки. – 1988. – № 7. – С. 49–51.
5. *Шацький І. П.* Взаимодействие коллинеарных разрезов с контактирующими кромками в изгибаемой пластине / І. П. Шацький // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 1990. – Т. 26, № 3. – С. 70–75.
6. *Шацький І. П.* Згин напівнескінченної пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами / І. П. Шацький, В. В. Перепічка // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 1992. – Т. 28, № 2. – С. 54–58.
7. *Шацький І.* Задачі теорії пластин та оболонок із взаємопов'язаними крайовими умовами на розрізах / І. Шацький, В. Перепічка, Т. Даляк, А. Щербій // Матем. проблеми механіки неоднорідних структур. – Львів, 2000. – Т. 2. – С. 51–54.
8. *Опанасович В. К.* Згин пластини з наскрізною прямолінійною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її поверхонь / В. К. Опанасович // Наукові нотатки Луцького технічного університету. – 2007. – Вип. 20 (2). – С. 123–127.
9. *Опанасович В. К.* Згин пластини з періодичною системою колінеарних тріщин з урахуванням контакту їх берегів / В. К. Опанасович, М. Г. Стащук, М. І. Дорош // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2008. – Т. 44, № 2. – С. 46–52.
10. *Опанасович В. К.* Новий підхід до розрахунку напруженого стану плити з тріщиною за теорією Рейсснера / В. К. Опанасович, М. В. Делявський, А. Подхорецькі // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій: в 3-х т. / За заг. ред. Панасюка В. – Т. 2: Аналітичні методи в механіці руйнування матеріалів. – 1999. – С. 186–189.
11. *Опанасович В. К.* Врахування контакту берегів тріщини під час згину трансверсально-ізотропної пластини / В. К. Опанасович, В. П. Новосад, Р. Г. Селіверстов // Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій: Збірник наукових праць. – Вип. 5 / За заг.

- ред. О. С. Андрейківа, Й. Й. Лучка, В. В. Божидарника. – Львів, - 2002. – С. 148–153.
12. Опанасович В. Згин пластины Рейсснера з наскрізною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її берегів / Віктор Опанасович, Ігор Яцик // Вісник Львівського університету. Сер. мех.-мат. – 2008. – Вип. 69. – С. 125–135.
 13. Тимошенко С. П. Пластины и оболочки / С. П. Тимошенко, Войновски-Кригер. – М., 1966.
 14. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. – М., 1966.
 15. Панасюк В. В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацишин. – К., 1976.
 16. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мухелишвили – М., 1962.
 17. Мазурак Л. П. Изгиб трансверсально-изотропных пластин с дефектами типа трещин / Л. П. Мазурак, Л. Т. Бережницкий – К., 1990.

**ИЗГИБ ПЛАСТИНЫ РЕЙССНЕРА С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ
СКВОЗНЫХ КОЛЛИНЕАРНЫХ ТРЕЩИН С УЧЕТОМ ШИРИНЫ
ОБЛАСТИ КОНТАКТА ИХ БЕРЕГОВ**

Игорь ЯЦЫК

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1 79000 Львов, Украина*

Рассмотрена задача изгиба неограниченной изотропной пластины равномерно распределенными изгибающими моментами на бесконечности, ослабленной периодической системой коллинеарных трещин со свободными от внешней нагрузки берегами. Предполагается, что берега трещин контактируют вблизи верхнего основания пластины по всей их длине, причем зона контакта имеет постоянную для каждой трещины ширину. За счет контакта берегов трещин решение задачи является суперпозицией решений двух задач: плоской задачи и задачи изгиба пластин с использованием теории Рейсснера. Используя методы теории функций комплексного переменного и комплексных потенциалов, получено систему сингулярных интегральных уравнений, решенную численно с помощью

метода механических квадратур. Приведены результаты численного анализа случаев задачи.

Ключевые слова: плоская задача теории упругости, теория изгиба пластин по Рейсснеру, изотропная пластина, периодическая система сквозных коллинеарных трещин, ширина области контакта, комплексные потенциалы, контактное усилие, коэффициенты интенсивности усилий и моментов.

REISSNER'S PLATE BENDING CONTAINING PERIODIC SYSTEM OF COLLINEAR THROUGH-THE-THICKNESS CRACKS TAKING INTO ACCOUNT CONTACT REGION WIDTH OF THEIR FACES

Ihor YATSYK

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine

In this paper the bending problem of boundless isotropic Reissner's plate is investigated by the evenly distributed bending moments on infinity, which is loosened by collinear cracks periodic system, the faces of which are the external loading free. It is assumed that faces of cracks are in smooth contact near overhead plate basis on all their length and contact zone width is permanent on every crack. Through cracks faces contact the problem solution is a superposition of two problems solutions: the plane problem and plates bending problem using Reissner theory. On the basis of complex variable theory methods and complex potentials obtained singular integral equations system which is solved numerically by the method of mechanical quadratures. The problem cases numerical analysis results is conducted.

Key words: plane elasticity problem, Reissner theory of plates bending, isotropic plate, periodic system of through-the-thickness collinear cracks, contact zone width, complex potentials, contact force, forces and moments intensity factors.

Стаття надійшла до редколегії 17.05.2010
Прийнята до друку 22.12.2010