*ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ* *VISNYK LVIV UNIV.*
*Серія мех.-мат. 2010. Вип. 73. С.148-154* *Ser. Mech-Mat. 2010. Vol. 73. P.148-154*

УДК 539.3

# НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНИХ ПЛАСТИН З РОЗРІЗОМ АБО АБСОЛЮТНО ЖОРСТКИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

**Ігор КУЗЬ**[1], **Імре ТІМАР**[2]

*[1]Львівський національний університет імені Івана Франка,*
*вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна*
*[2]Університет Панонії, вул. Еджетем, 10 8200 Веспрем, Угорщина*

За допомогою варіаційно-різницевого методу розв'язуються плоскі задачі деформаційної теорії пластичності за активного навантаження про деформування пластини з розрізом або з таким самим абсолютно жорстким включенням.

*Ключові слова:* варіаційно-різницевий метод, незв'язна область, деформаційна теорія пластичності, пластина, розріз, абсолютно жорстке включення.

Дослідження напружено-деформованого стану пластин з розрізами або з тонкими включеннями – необхідний етап розрахунку їхньої міцності та надійності. Оскільки такі елементи конструкцій займають незв'язну область [1] і містять концентратори напружень, то можливість застосування аналітичних методів розв'язування відповідних крайових задач значно обмежена.

За допомогою числового методу ми розв'язали плоскі задачі деформаційної теорії пластичності про деформування пластин з розрізом або з таким самим абсолютно жорстким включенням.

**Формулювання задачі**. Розглядають плоскі задачі деформаційної теорії пластичності (теорії малих пружно-пластичних деформацій Ілюшина) за активного навантаження в областях $\boldsymbol{V}$ з межею $\Sigma$ (рис.1), які моделюють напружено-деформований стан у пластині. З математичного погляду вони полягають у розв'язуванні рівнянь рівноваги

$$\left(\boldsymbol{C}_{ijkl}\boldsymbol{u}_{k,l}\right)_{,j} + \boldsymbol{X}_i = 0 \qquad (1)$$

при використанні мішаних крайових умов на її межі $\Sigma\ (\Sigma_{\boldsymbol{u}} \cup \Sigma_\sigma = \Sigma)$

$$\boldsymbol{u}_i \Big|_{\Sigma_u} = \boldsymbol{u}_i^0, \qquad \boldsymbol{C}_{ijkl}\boldsymbol{u}_{k,l}\boldsymbol{n}_j \ |_{\Sigma_\sigma} = \boldsymbol{S}_i^0. \qquad (2)$$

Тут $\boldsymbol{C}_{ijkl}$ – компоненти тензора модулів пружності; $\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{S}_i^0, \boldsymbol{n}_j$ – компоненти векторів переміщень, об'ємних і поверхневих сил, а також зовнішньої нормалі до поверхні $\Sigma_\sigma$, відповідно; $\boldsymbol{u}_{i,j} \equiv \partial \boldsymbol{u}_i / \partial \boldsymbol{x}_j$. За однаковими індексами, які трапляються в одному виразі двічі, відбувається підсумовування від одиниці до двох.

У випадку плоскої деформації

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_x(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \quad \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_y(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \quad \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_z \equiv 0\,. \tag{3}$$

Щоб отримати задачу деформаційної теорії пластичності для початково ізотропного матеріалу, потрібно в (1), (2) прийняти

$$\boldsymbol{C}_{ijkl}(\varepsilon_{\boldsymbol{u}}) = \lambda(\varepsilon_{\boldsymbol{u}})\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\varepsilon_{\boldsymbol{u}})\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right),$$

$$\mu(\varepsilon_{\boldsymbol{u}}) = \mu(1-\omega(\varepsilon_{\boldsymbol{u}})), \quad \lambda(\varepsilon_{\boldsymbol{u}}) = \boldsymbol{K} - \frac{2}{3}\mu(\varepsilon_{\boldsymbol{u}}), \tag{4}$$

де $\varepsilon_{\boldsymbol{u}}$ – інтенсивність тензора деформацій $\left(\varepsilon_{\boldsymbol{u}} = \sqrt{\boldsymbol{e}_{ij}\boldsymbol{e}_{ij}},\quad \boldsymbol{e}_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}\right)$; $\boldsymbol{K}$ – модуль об'ємного стиску; $\omega(\varepsilon_{\boldsymbol{u}})$ – функція пластичності Ілюшина [2].

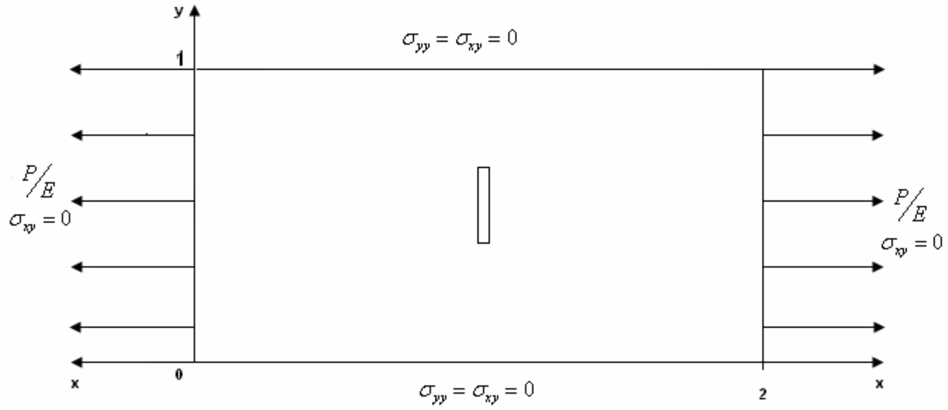


Рис.1. Пластина з розрізом (абсолютно жорстким включенням) і крайовими умовами на зовнішній межі

Для матеріалу з лінійним зміцненням $\omega(\varepsilon_{\boldsymbol{u}})$ набуває вигляду

$$\omega(\varepsilon_{\boldsymbol{u}}) = \begin{cases} (1-\gamma)\dfrac{\varepsilon_{\boldsymbol{u}} - \varepsilon_{\boldsymbol{s}}}{\varepsilon_{\boldsymbol{u}}} & \text{при} \quad \varepsilon_{\boldsymbol{u}} > \varepsilon_{\boldsymbol{s}} \\ 0 & \text{при} \quad \varepsilon_{\boldsymbol{u}} \le \varepsilon_{\boldsymbol{s}}. \end{cases} \tag{5}$$

Тут $\varepsilon_{\boldsymbol{s}}$ – межа плинності; $\gamma = \mu'/\mu$ ($\mu'$ – модуль зміцнення).

**Метод розв'язування задачі**. Для числового розв'язування задачі (1) - (5) зручно використовувати її варіаційне формулювання [3], яке полягає у мінімізації лагранжіана

$$\boldsymbol{L} = \int\limits_{\boldsymbol{V}} \boldsymbol{WdV} - \int\limits_{\boldsymbol{V}} \boldsymbol{X}_i\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{dV} - \int\limits_{\Sigma_\sigma} \boldsymbol{S}_i^0\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{d}\Sigma\,, \tag{6}$$

де $W = \frac{1}{2} C_{ijkl}(\varepsilon_u) u_{i,j} u_{k,l}$ - питома енергія пружно-пластичної деформації.

Запишемо лагранжіан (6) у канонічній області $V_0$, якою може бути прямокутник або область, складена з них. Для цього використаємо дискретне взаємно-однозначне відображення сітки в області $V$ на рівномірну прямокутну сітку області $V_0$ (рис.2)

$$x_i = x_i(\beta^1, \beta^2) \quad (i = 1,2). \tag{7}$$

Тоді $J = \det(A_i^j)$, $g_{ij} = A_i^{\ m} A^m_{\ j}$, де $A_i^j = \partial x_i / \partial \beta^j$ – матриця Якобі цього відображення. За допомогою (7) запишемо питому енергію деформації $W$ у координатах $\vec{\beta}$

$$W = \frac{1}{2} C^{ijkl} u_{i,j} u_{k,l} = \frac{1}{2} C^{ijkl}(\vec{\beta}) B_j^m B_l^n u_{i|m} u_{k|n} = \frac{1}{2} D^{imkn}(\vec{\beta}) u_{i|m} u_{k|n},$$

де $u_{i|m} \equiv \partial u_i / \partial \beta^m$, $B_j^m = \partial \beta^m / \partial x_j$, $D^{imkn} = C^{ijkl} B_j^m B_l^n$.

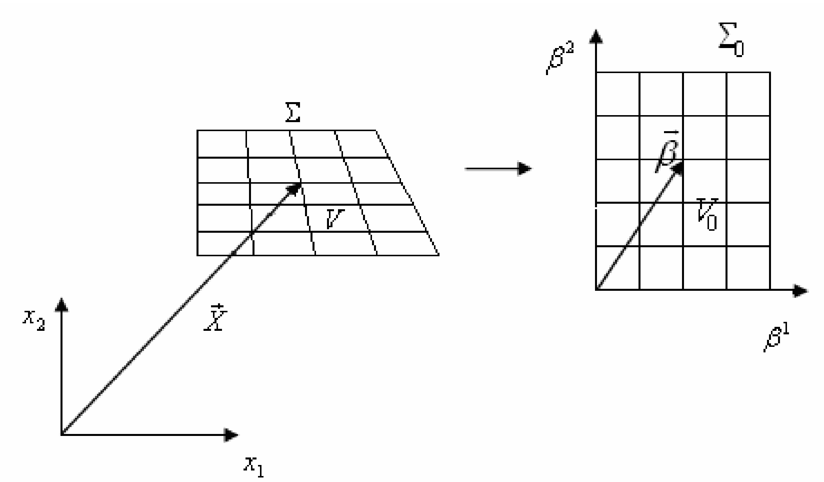


Рис.2. Відображення сітки в області $V$ на рівномірну прямокутну сітку області $V_0$

Об'ємні та поверхневі інтеграли перетворюються за формулами

$$\int_V \vec{X} \vec{u} dv = \int_{V_0} J \vec{X} \vec{u} dv, \qquad \int_\Sigma \vec{S}^0 \vec{u} d\Sigma = \int_{\Sigma_0} q(\vec{\beta}) \vec{S}^0 \vec{u} d\Sigma, \tag{8}$$

де

$$\vec{q}(\beta) = \begin{cases} \sqrt{g_{11}}, & \beta^2 = \{0, l_2\}, \\ \sqrt{g_{22}}, & \beta^1 = \{0, l_1\}. \end{cases}$$

Отже, лагранжіан у прямокутнику $V_0$ набуде вигляду

$$L_0 = \frac{1}{2}\int_{V_0} JD^{imkn} u_{i|m} u_{k|n} dv - \int_{V_0} J\vec{X}\vec{u} dv - \int_{\Sigma_0} \vec{q}(\beta)\vec{S}^0 \vec{u} d\Sigma. \qquad (9)$$

Замінивши в (9) усі континуальні функції сітковими, інтеграли – скінченими сумами, похідні – різницевими похідними, отримаємо різницевий аналог лагранжіана $L_0^h$.

Для визначення стаціонарної точки $L_0^h$ у випадку деформаційної теорії пластичності отримаємо системи нелінійних алгебричних рівнянь

$$\vec{P}(\vec{u}) + \vec{F} = 0,$$

які розв'язують ітераційними методами [4].

Описаний варіаційно-різницевий метод у неоднозв'язних областях реалізований у вигляді пакета програм на мові FORTRAN з підпрограмою побудови сіток на DELPHI.

**Результати числових досліджень**. На рис.1 зображено геометрію пластини з крайовими умовами. Межа розрізу або вільна від навантажень $\left(\sigma_{nn} = 0, \sigma_{n\tau} = 0\right)$, або закріплена $(u_\tau = 0, u_n = 0)$, що моделює наявність тонкого абсолютно жорсткого включення. До правого та лівого краю пластини прикладене рівномірне горизонтальне розтягувальне навантаження $P / E = 0,45$.

Усі розрахунки проводили у безрозмірних величинах. Модуль пружності $E = 1$, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,3$, межа плинності $\sigma_s = 0,5$ , параметр зміцнення $\gamma = 0,2$. Отримані діаграми розподілу інтенсивності тензора напружень $\sigma_u / E$ у пластинах з розрізом або з абсолютно жорстким включенням зображені на рис.3, 4, відповідно.

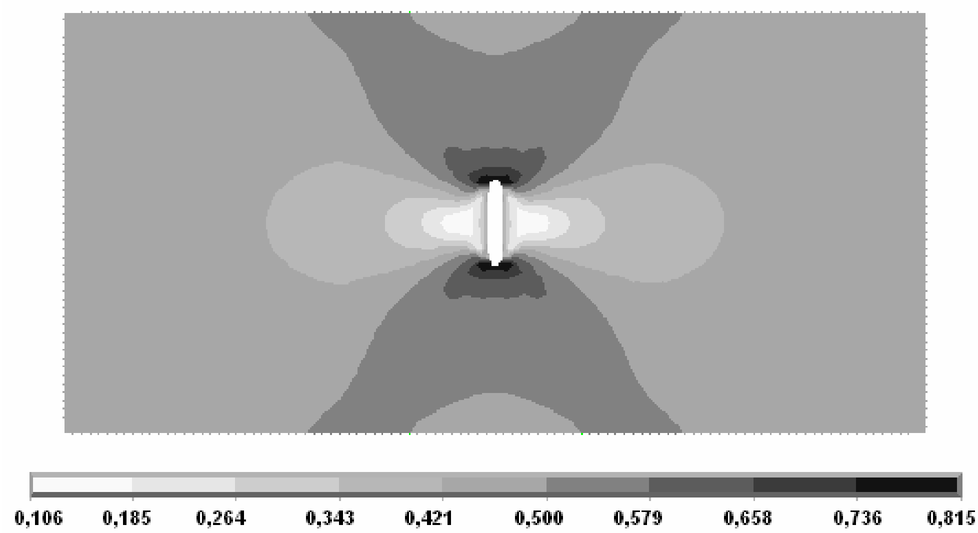


Рис.3. Діаграма розподілу інтенсивності тензора напружень $\sigma_u/E$ у пластині з розрізом

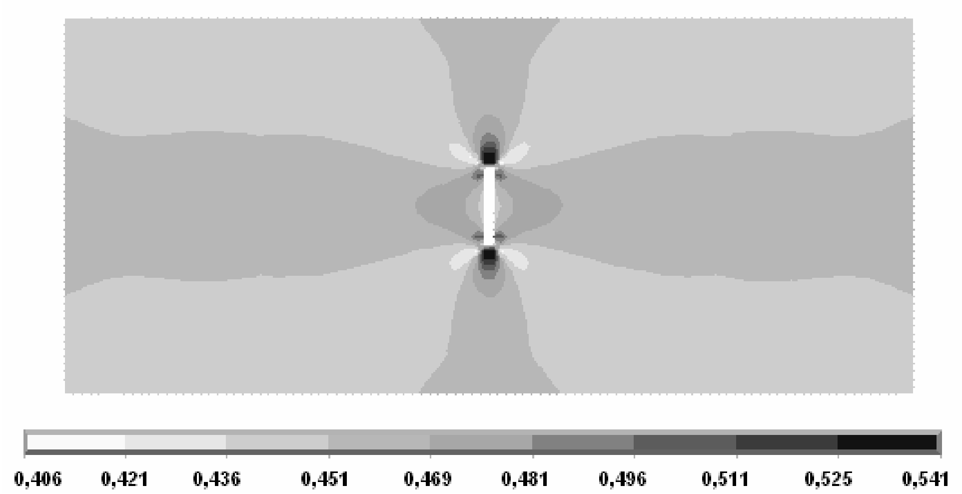


Рис.4. Діаграма розподілу інтенсивності тензора напружень $\sigma_u/E$ у пластині з тонким абсолютно жорстким включенням

На рис. 3 також показано, як буде деформуватися межа розрізу. За допомогою діаграм розподілу інтенсивності тензора напружень $\sigma_u/E$ можна визначити області виникнення та розвитку пластичних деформацій. Згідно з умовами плинності Губера-Мізеса пластичне деформування починається тоді, коли інтенсивність тензора напружень $\sigma_u$ досягає межі плинності $\sigma_s$ (у нас $\sigma_s$ =0,5).

**Висновки**. Як видно з рис.3, області пластичних деформацій у пластині з розрізом зароджуються навколо верхнього і нижнього торців розрізу та розповсюджуються вертикально догори і вниз широкою зоною. Як видно з рис.4, пластичні деформації у пластинці з таким же абсолютно жорстким включенням виникають на деякій відстані від верхнього і нижнього торців включення, розповсюджуються так само вертикально догори і вниз, але значно вужчою зоною. Форма областей з однаковою величиною інтенсивності напружень у пластині з розрізом (включенням) є, очевидно, симетричною стосовно вертикальної та горизонтальної осей симетрії розрізу (включення). Пластичні деформації у пластині з розрізом виникають при навантаженні на 35% меншому, ніж у пластині з таким самим включенням.

Отож, отримані поля напружень дають змогу виявити області їхньої найбільшої концентрації та за відповідним критерієм руйнування оцінити міцність пластин з розрізом або з тонким абсолютно жорстким включенням.

---


1. *Кузь І. С.* Дослідження пружно-пластичного з'єднувального елемента конструкцій під дією нерівномірних навантажень / *Кузь І. С.* // В зб. "Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій". Вип. 8. – Львів, 2009.
2. *Ильюшин А. А.* Пластичность / *Ильюшин А. А.* – М.;Л., 1948.
3. *Победря Б. Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности. / *Победря Б. Е.* – М., 1981.
4. *Кузь И. С.* О прикладных итерационных методах / *Шешенин С. В., Кузь И. С.* // Вычислительная механика деформируемого твердого тела. – 1990. – Вып. 1. – С. 63-75.

# НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ПЛАСТИН С РАЗРЕЗОМ ИЛИ АБСОЛЮТНО ЖЕСТКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

**Игорь КУЗЬ**[1], **Имре ТИМАР**[2]

[1]*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,*
*ул. Университетская, 1 79000, Украина*
[2]*Университет Панонии,*
*ул. Еджетем, 10 8200 Веспрем, Венгрия*

С помощью вариационно-разностного метода построено решение плоских задач деформационной теории пластичности при активной нагрузке о деформировании пластины с разрезом или с такого же размера абсолютно жестким включением.

*Ключевые слова*: вариационно-разностный метод, деформационная теория пластичности, пластина, разрез, абсолютно жесткое включение.

# STRESS STRAIN STATE OF ELASTIC PLASTIC PLATES WITH CRACK OR WITH THE SAME THIN RIGID BODY

Ihor Kuz'[1], Imre Timar[2]

[1]*Ivan Franko National University of L'viv,*
*Universytetska Str., 1 79000 L'viv, Ukraine*
[2]*University of Pannonia,*
*Egyetem Str., 10 8200 Veszprem, Hungary*

Variation difference method of building finite difference schemes is used in unconnected domain. Using this method for solving 2D plasticity problems stress states in plate with crack or with the same thin rigid body is investigated.

*Key words:* variation difference method, plasticity problems, thin rigid body.

Стаття надійшла до редколегії 24.03.2010
Прийнята до друку 22.12.2010