

УДК 539.375

КОНТАКТНА ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНА ЗАДАЧА ДЛЯ ШАРУ З ТОНКИМ ВКЛЮЧЕННЯМ ЗА НАЯВНОСТІ ЗАТРИМКИ ТЕКУЧОСТІ

Георгій СУЛИМ, Марта КРИВЕНЬ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Досліджено розвиток пластичних деформацій в околі жорсткого тонкого включення, розміщеного у шарі, симетрично і перпендикулярно до його граней. Матеріал шару пружно-пластичний зі значним перепадом порогів текучості. Деформація спричинена тангенціальним зсувом граней шару. Знайдено співвідношення між верхнім і нижнім порогамі текучості, за якого відбуватиметься пластичне відшарування включення і від вершин включення розвиватимуться по дві навскісні смуги. Досліджено розвиток пластичних смуг при поступовому квазістатичному зміщенні граней шару.

Ключові слова: контактна задача, включення, текучість.

Локалізація пластичних деформацій в околі концентраторів напружень, у тім числі й у вигляді тонких смуг пластичності, має численні експериментальні підтвердження [1]. Її треба враховувати не тільки для адекватного опису картини розвитку пластичних деформацій, а й для точнішого визначення утримувальної здатності матеріалу та елементів конструкцій. Хоча фізичні причини, які обумовлюють тонкосмугову локалізацію пластичних деформацій ще остаточно не з'ясовані, є підстави вважати, що головна її причина – явище затримки текучості, або, як його по-іншому називають, перепаду меж текучості [2 – 4]. До досягнення напруженнями певного рівня (верхнього порогу текучості) пластичні деформації взагалі не відбуваються, а потім виникають пластичні деформації, які розвиваються під практично сталими напруженнями (нижній поріг текучості), суттєво нижчими за стартові.

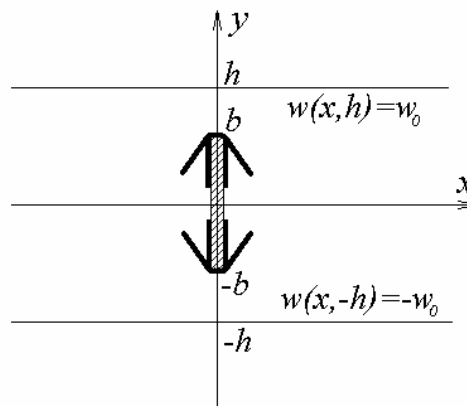


Рис. 1. Схема задачі

Наша мета – вивчити розвиток пластичних смуг в околі вершин тонкого жорсткого стрічкового включення ($x = 0, -b \leq y \leq b, -\infty < z < +\infty$), розміщеного центрально у шарі ($-\infty < x < +\infty, -b \leq y \leq b, -\infty < z < +\infty$)

перпендикулярно до його граней. Грані $y = b$ та $y = -b$ шару тангенціально й квазістатично зміщуються (вздовж граней зміщення сталі й дорівнюють w_0 і $-w_0$ відповідно), що спричиняє антиплоский напружено-деформований стан (рис. 1).

Вважатимемо, що матеріалу матриці властива затримка пластичної текучості з верхнім порогом k_1 і нижнім k_0 . За певних співвідношень між порогами текучості спостерігатиметься пластичне відшарування включення (розвиток смуг на межі включення-середовище), а також від вершин (фронтів) включення під певним кутом α до нього розвиватимуться дві, симетричні стосовно включення, косі смуги. Товщини усіх пластичних смуг вважатимемо нульовими і моделюватимемо їх лініями тангенціального розриву переміщення.

1. **Формалізація задачі.** За описаної ситуації в шарі виникне антиплоский напружено-деформований стан, що описується одним ненульовим переміщенням $w(x, y)$ і двома ненульовими компонентами тензора напружень $\tau_{xz}(x, y)$ та $\tau_{yz}(x, y)$, яким у пружній частині тіла відповідає аналітична функція $\tau(\zeta) = \tau_{xz}(x, y) + i\tau_{yz}(x, y)$ комплексної змінної $\zeta = x + iy$. Внаслідок силової й геометричної симетрії задачі можна обмежитися розглядом напружено-деформованого стану тільки у півсмугі $0 < x < \infty$, $0 < y < h$. Ця півсмуга з математичним розрізом уздовж відрізка, що збігається з косою пластичною смугою, називатимемо областю **D**.

У зв'язку з затримкою текучості з верхнім k_1 і нижнім k_0 порогами пластичні деформації виникають за виконання напруженнями в тілі умови

$$\tau_{xz}^2(x, y) + \tau_{yz}^2(x, y) = k_1^2 \quad (1)$$

та розвиваються вздовж площинок з нормаллю \mathbf{n} , коли

$$\tau_{nz} = k_0. \quad (2)$$

Сформулюємо в області **D** крайову задачу для функції $\tau(\zeta)$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \tau(\zeta) &= 0 \quad (\zeta = x, \quad 0 < x < +\infty); \\ \operatorname{Im} \tau(\zeta) &= 0 \quad (\zeta = iy, \quad b - d_1 < x < b); \\ \tau_{yz}(0, y) &= k_0 \quad (b - d_1 < y < b); \\ \tau_{nz}(\zeta) &= k_0 \quad (\zeta = b + \rho e^{i(\alpha \pm 0)}, \quad 0 < \rho < d_2); \\ \operatorname{Re} \tau(\zeta) &= 0 \quad (\zeta = iy, \quad b < y < h); \\ \operatorname{Im} \tau(\zeta) &= 0 \quad (\zeta = x + ih, \quad 0 < x < +\infty); \\ \operatorname{Im} \frac{1}{\mu} \int_{x_0}^{x_0 + ih} \tau(\zeta) d\zeta &= w_0, \end{aligned} \quad (3)$$

де d_1, d_2 - довжини вертикальної та косої пластичних смуг; \mathbf{n} - вектор одиничної нормалі до косої смуги; x_0 - довільне додатне дійсне число; μ - модуль зсуву матеріалу тіла, інтегрування від точки $\zeta = x_0$ до точки $\zeta = x_0 + ih$ виконується вздовж довільної лінії з області \mathbf{D} .

Внаслідок умови (1) розв'язок задачі (3) додатково повинен задовольняти умову $|\tau(\zeta)| < k_1$ в усіх точках області \mathbf{D} .

Варто дослідити змішану нелінійну крайову задачу (3), знайти умову існування її розв'язку (залежності d_1, d_2 від w_0) та знайти його.

2. **Аналіз задачі (3).** Можна довести, що функція $\tau = \tau(\zeta)$ є в області \mathbf{D} однолистою і внаслідок умов (3) конформно відображає її на область \mathbf{G} комплексної площини τ (рис. 2). Отже, дослідження й розв'язування задачі (3) зводиться до з'ясування умов існування зображеного на рис. 2. відображення та знаходження його.

Дамо необхідні пояснення до рис. 2. Точки D і F в області \mathbf{D} означають кінці пластичних смуг, тому їхні координати наперед невідомі. Точки A, B, D, G в області \mathbf{G} характеризують відповідно напруження на нескінченності, посередині верхньої грані шару, на кінці косої смуги, посередині нижньої грані шару і є також невідомими апріорі. Кут чотирикутника \mathbf{G} у точці C дорівнює α , а його сторона EF розташована на відстані k_0 від початку координат. Фігура \mathbf{G} не повинна виходити за межі круга радіуса k_1 з центром у початку координат.

Аналіз області \mathbf{G} дає змогу зробити висновок про зв'язок величини

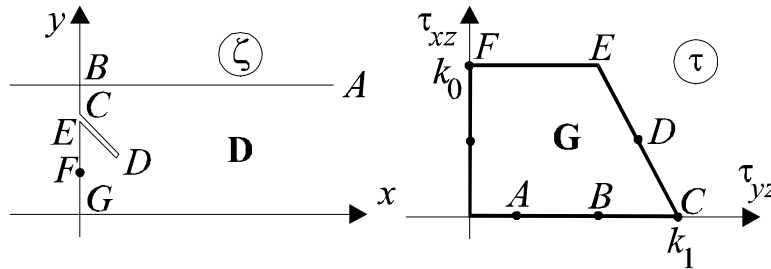


Рис. 2. Области конформного відображення, які виконує функція $\tau = \tau(\zeta)$

затримки текучості з кутом нахилу косої смуги до включення. Найменше значення затримки, за якої, крім відшаровування включення, виникне лише бічна смуга, дорівнює $k_1 = \sqrt{2}k_0$. Тоді вона розвиватиметься перпендикулярно до включення. Якщо більша затримка, то коса смуга розвивається під кутом

$$\alpha = \arcsin \frac{k_0}{k_1}. \quad (4)$$

Оскільки у фігурах \mathbf{D} і \mathbf{G} тільки дві пари точок C і E фіксовані, то згідно з теоремою Рімана про існування конформного відображення [5] існуватиме однопараметрична множина відображень \mathbf{D} на \mathbf{G} . Вибором параметра, наприклад, координатою точки F у площині ζ (довжиною смуги на межі включення-матриця), можна забезпечити виконання останньої з умов (3) – заданого зміщення граней шару.

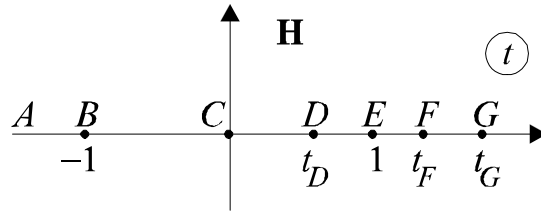


Рис. 3. Допоміжна комплексна площина

Фігури \mathbf{D} і \mathbf{G} прямокутні багатокутники, а відтак потрібне конформне відображення можна побудувати з допомогою перетворення Крістофеля-Шварца [6]. Уведемо для цього допоміжну комплексну площину t і відобразимо почергово її верхню половину на області \mathbf{D} і \mathbf{G} . Тоді пара функцій

$$\zeta = \zeta(t), \quad \tau = \tau(t) \quad (t \in \mathbf{H}, \quad \mathbf{H} = \{t | \text{Im} t > 0\})$$

визначатиме відображення $\tau(\zeta)$ у параметричному вигляді [7].

Прийнявши для визначеності у площині t координати відомих априорі точок C , E і F відповідно такими, що дорівнюють 0 , 1 і t_F (рис. 3), отримуємо для функції $\tau = \tau(t)$

$$\tau(t) = k_0 + ik_0 \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{\int_0^t F_\tau(\eta) d\eta}{\int_0^1 |F_\tau(\eta)| d\eta}, \quad (5)$$

де $F_\tau(t) = t^{\frac{\alpha}{\pi}-1} (t-1)^{-\frac{\alpha}{\pi}} (t-t_F)^{-\frac{1}{2}} (t-t_0)^{-\frac{1}{2}}$; t_F – параметр, що може набувати довільного дійсного значення; t_0 – від’ємне дійсне число, яке знайдемо з умови існування відображення $\tau(t)$. Під $(t-q)^p$ (q – дійсне число) тут і далі розумітимемо аналітичну в області \mathbf{H} функцію, що набуває дійсних додатних значень, якщо $t-q$ додатне дійсне число.

Величину t_0 , що входить у формулу (5), знайдемо, забезпечивши потрібні метричні співвідношення у фігурі \mathbf{G} . Вимагаючи, щоб відношення сторін CE і EF дорівнювало $k_0 / (k_1 \sin \alpha - k_0 \cos \alpha)$, отримуємо рівняння для обчислення t_0

$$(k_1 \sin \alpha - k_0 \cos \alpha) \int_0^1 |F_\tau(\eta)| d\eta = k_0 \int_{t_0}^0 |F_\tau(\eta)| d\eta. \quad (6)$$

Для вибраного t_F розв'язок рівняння (6) можна отримати за допомогою такого рекурсивного алгоритму:

$$t_0^{(j+1)} = t_0^{(j)} \left(1 + \frac{k_0 EC^{(j)} - (k_1 \sin \alpha - k_0 \cos \alpha) EF^{(j)}}{k_0 (EC^{(j)} + EF^{(j)})} \right) \quad (j = 0, 1, \dots), \quad (7)$$

де $t_0^{(0)} = -1$, $EC^{(j)} = \int_0^1 |F_\tau^{(j)}(\eta)| d\eta$, $EF^{(j)} = \int_1^{t_0^{(j)}} |F_\tau^{(j)}(\eta)| d\eta$; функції $F_\tau^{(j)}(\eta)$

відрізняються від $F_\tau(\eta)$ тільки заміною параметра t_0 на $t_0^{(j)}$.

Функцію $\zeta = \zeta(\mathbf{t})$, яка однозначно визначається, коли прообрази трьох точок межі області \mathbf{D} вибрати фіксованими, також визначатимемо за допомогою інтеграла Крістофеля-Шварца. Координати двох точок, а саме C , E вже знайдені під час побудови відображення $\tau = \tau(\mathbf{t})$. Тому довільно можна вибирати тільки одну точку. Зафіксуємо в площині \mathbf{t} точку B , вважаючи, що її афікс дорівнює -1 . Тоді

$$\zeta(\mathbf{t}) = ih - \frac{ib}{t_G} \frac{\int_0^t F_\zeta(\eta) d\eta}{\int_1^0 |F_\zeta(\eta)| d\eta}, \quad (8)$$

де $F_\zeta(\mathbf{t}) = (t+1)^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{\alpha}{\pi} - \frac{1}{2}} (t-t_D)(t-t_G)^{-\frac{1}{2}}$. Невідомі дійсні параметри t_D , t_G , що задовольняють умови $0 < t_D < 1$, $t_G > t_F$, визначають на підставі метричних співвідношень у фігурі \mathbf{D} : рівності берегів CD і DE розрізу

$$\int_0^{t_D} |F_\zeta(\eta)| d\eta = \int_{t_D}^1 |F_\zeta(\eta)| d\eta \quad (9)$$

та відомого відношення довжини включення до висоти шару

$$b \int_{-1}^0 |F_\zeta(\eta)| d\eta = (h-b) \int_1^{t_G^{(j)}} |F_\zeta(\eta)| d\eta. \quad (10)$$

Знайдемо шукані параметри, розв'язавши систему рівняння (9), (10) методом послідовних наближень за допомогою схеми:

$$\mathbf{t}_D^{(j+1)} = \frac{2\mathbf{CD}^{(j)}}{\mathbf{CD}^{(j)} + \mathbf{DE}^{(j)}} \mathbf{t}_D^{(j)}, \quad \mathbf{t}_G^{(j+1)} = \frac{(\mathbf{BC}^{(j)} + \mathbf{EG}^{(j)})\mathbf{b} - \mathbf{hEG}^{(j)}}{(\mathbf{BC}^{(j)} + \mathbf{EG}^{(j)})\mathbf{b} + \mathbf{hEG}^{(j)}} \mathbf{t}_G^{(j)}, \quad (11)$$

де

$$\mathbf{CD}^{(j)} = \int_0^{t_D^{(j)}} |\mathbf{F}_\zeta^{(j)}(\eta)| d\eta, \quad \mathbf{DE}^{(j)} = \int_{t_D^{(j)}}^1 |\mathbf{F}_\zeta^{(j)}(\eta)| d\eta,$$

$$\mathbf{BC}^{(j)} = \int_{-1}^0 |\mathbf{F}_\zeta^{(j)}(\eta)| d\eta, \quad \mathbf{EG}^{(j)} = \int_1^{t_G^{(j)}} |\mathbf{F}_\zeta^{(j)}(\eta)| d\eta,$$

а функції $\mathbf{F}_\zeta^{(j)}(\eta)$ відрізняються від $\mathbf{F}_\zeta(\eta)$ лише заміною параметрів \mathbf{t}_D і \mathbf{t}_G на $\mathbf{t}_D^{(j)}$ і $\mathbf{t}_G^{(j)}$.

3. Дослідження розвитку пластичних смуг. Довжину \mathbf{d}_1 смуги на межі включення-матриці і косої смуги \mathbf{d}_2 просто визначають із виразу функції $\zeta = \zeta(\mathbf{t})$:

$$\mathbf{d}_1 = \mathbf{b} - |\zeta(\mathbf{t}_F)|, \quad \mathbf{d}_1 = |\zeta(\mathbf{t}_D) - \zeta(0)|,$$

або на підставі формули (8), яка дає змогу запропонувати залежності

$$\mathbf{d}_1 = \mathbf{b} \frac{\int_1^{t_F} |\mathbf{F}_\zeta(\eta)| d\eta}{\int_1^{t_G} |\mathbf{F}_\zeta(\eta)| d\eta}, \quad \mathbf{d}_2 = \mathbf{b} \frac{\int_1^{t_D} |\mathbf{F}_\zeta(\eta)| d\eta}{\int_1^{t_G} |\mathbf{F}_\zeta(\eta)| d\eta}. \quad (12)$$

Обчислимо тепер тангенціальне переміщення \mathbf{g}_1 початкової точки смуги на межі включення-середовище і \mathbf{g}_2 – відносне зміщення початкових точок на берегах косої смуги. З формул (5), (8) та останньої формули (3) отримуємо

$$\mathbf{g}_1 = \mathbf{K} \int_0^1 \mathbf{f}(t) dt, \quad \mathbf{g}_2 = \mathbf{K} \int_1^{t_F} \mathbf{f}(t) dt,$$

$$\mathbf{K} = \frac{\mathbf{k}_0(1 - \cos \alpha)}{\mu \sin \alpha \int_0^1 |\mathbf{F}_\tau(\eta)| d\eta}, \quad \mathbf{f}(t) = (t+1)^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{\alpha}{\pi} - \frac{1}{2}} |t - \mathbf{t}_D| |t - \mathbf{t}_G|^{-\frac{1}{2}} \left| \int_0^t \mathbf{F}_\tau(\eta) d\eta \right|.$$

Подібним способом визначають і спричинене пружною деформацією переміщення верхньої грані шару стосовно включення g_0

$$g_0 = K \int_{-1}^0 f(t) dt.$$

Відносне зміщення граней стосовно серединної площини шару дорівнює сумі трьох переміщень

$$w_0 = g_0 + g_1 + g_2. \tag{13}$$

Формули (5), (8) та (12), (13) дають повий розв'язок сформульованої задачі та можливість досліджувати розвиток пластичних смуг під час квазістатичного сталого зміщення граней шару.

Залежності довжин пластичних смуг від переміщення граней шару для

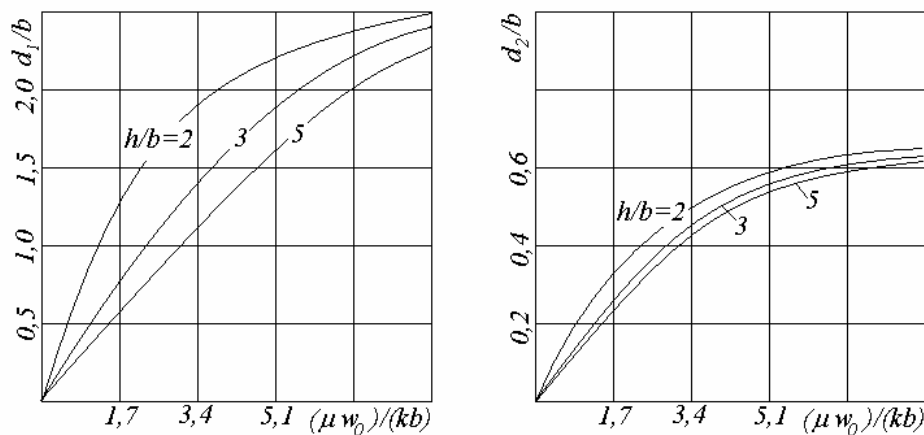


Рис. 4.

випадку $k_1 = \sqrt{2}k_0$, коли коса смуга розвивається перпендикулярно до включення, зображені на рис. 4. Доки смуги малі щодо розміру включення спостерігається суттєвий вплив його висоти на величину смуг. Коли довжина косої смуги перевищує розмір включення, цей вплив ослаблюється. Довжина вертикальних смуг, вздовж яких відбувається відшарування включення, на початковій стадії свого розвитку росте пропорційно з переміщенням граней, але згодом, охопивши приблизно 2/3 поверхні включення, їхній ріст практично зупиняється. Аналогічна картина простежується в ідеально пружно-пластичному тілі для просторового розподілу пластичних деформацій [8].

1. *Надаи А.* Пластичность и разрушение твердых тел. – М., 1954.
2. *Пресняков Л.А.* Локализация пластической деформации // М., 1983.
3. *Криштал М.М.* Неустойчивость и мезоскопическая неоднородность пластической деформации (аналитический обзор) Часть 1. Феноменология зуба текучести и прерывистой текучести // Физическая мезомеханика (ФММ). – 2004. – Т. 7. – Вып. 5. – С. 5-29.
4. *Коттрелл А.Х.* Прерывистая текучесть // Структура и механические свойства металлов. – М., 1967.
5. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. – М., 1987.
6. *Иванов В.И., Попов В.Ю.* Конформные отображения и их приложения. – М., 2002.
7. Heorhiy Sulym, Marta Kryweń Odseparowywanie plastyczne cienkiej sztywnej inkluzji w ośrodku z dużym zatrzymaniem płynięcia pod czas antypłaskiego stanu odkształcenia // Materiały III Symp. Mechaniki Zniszczenia Materiałów i Konstrukcji (Augustów, 1-4 czerwca 2005), Białystok, 2005. S. 397-400.
8. *Кривень В.А.* Двоперіодична пружнопластична задача поздовжнього зсуву тіла з жорсткими ромбічними включеннями // Математичні методи і фіз.- мех. поля. – 2001. – Т. 44, № 1. – С. 109-113.

**КОНТАКТНАЯ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СЛОЯ С
ТОНКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ ПРИ НАЛИЧИИ ЗАДЕРЖКИ ТЕКУЧЕСТИ****Георгий СУЛИМ, Марта КРЫВЕНЬ***Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1 79000 Львов Украина*

Исследовано развитие пластических деформаций в окрестности жесткого тонкого включения, расположенного в слое перпендикулярно и симметрично его граням. Материал слоя упруго-пластический со значительным перепадом предела текучести. Деформация обусловлена тангенциальным смещением граней слоя. Найдено соотношение между верхним и нижним порогами текучести, при котором включение отслаивается и развиваются по две косые полосы у вершин включения. Исследовано развитие пластических полос при поступательном квазистатическом смещении граней слоя.

Ключевые слова: контактная задача, включения, текучесть.

**CONTACT ELASTO-PLASTIC PROBLEM FOR A LAYER WITH A THIN
INCLUSION UNDER CONDITION OF DELAYED YIELD****Georgij SULYM, Marta KRYVEN***Ivan Franco National University of Lviv,
Universitetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine*

Propagation of plastic deformations in the neighborhood of a rigid thin inclusion, located centrally inside a layer perpendicularly to its surface, was investigated. The layer's body is elastoplastic with a significant delayed yield. Deformation is induced by tangential shear force acting on the layer's surface. Relation between upper and lower yield points was found, reaching which will result in plastic separation of the inclusion and development of two plastic strips starting from its vertexes. Propagation of plastic strips during quasistatic shear on the layer's surface was studied.

Key words: Contact problem, inclusion, yield

Стаття надійшла до редколегії 26.01.2010

Прийнята до друку 22.12.2010