ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2010. Вип. 73. С.85-113 *Ser. Mech-Mat. 2010. Vol. 73. P.85-113*

УДК 517.95

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ ЕВОЛЮЦІЙНИМИ СИСТЕМАМИ БЕЗ ПОЧАТКОВИХ УМОВ

Микола БОКАЛО

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Розглянуто задачу оптимального керування системами, що описуються еволюційними рівняннями, заданими на часовому промені $(-\infty,0]$. Отримано достатні умови існування єдиного розв'язку цієї задачі.

Ключові слова: еволюційне рівняння, оптимальне керування, задачі без початкових умов.

Теорія оптимального керування детермінованими системами опирається на такі вихідні положення:

1) керування $\boldsymbol{v}$ вибирають з деякої множини $\boldsymbol{U}_\partial$ (множина допустимих керувань), що є підмножиною простору $\boldsymbol{U}$ (простору керувань);

2) стан $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{v})$ керованої системи визначається для вибраного керування $\boldsymbol{v}$ як розв'язок рівняння

$$\Lambda \boldsymbol{y}(\boldsymbol{v}) = \Theta(\boldsymbol{v}), \tag{0.1}$$

де Λ – заданий оператор, який визначається керованою системою (Λ – "модель" системи), $\Theta(\boldsymbol{v})$ – задана функція;

3) спостереження $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{v})$ визначається як певна функція стану $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{v})$;

4) функція вартості $\boldsymbol{J} : \boldsymbol{U} \to \mathbb{R}$ задається за допомогою деякої числової функції $(\boldsymbol{z},\boldsymbol{v}) \to \Phi(\boldsymbol{z},\boldsymbol{v}) \geq 0$ на "просторі спостережень" та просторі (множині) допустимих керувань за законом

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{v}) = \Phi(\boldsymbol{z}(\boldsymbol{v}),\boldsymbol{v}), \quad \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{U}(\boldsymbol{U}_\partial). \tag{0.2}$$

Задача оптимального керування детермінованими системами полягає у відшуканні керування $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}_\partial$ такого, що

$$\inf_{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{U}_\partial} \boldsymbol{J}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{u}) \tag{0.3}$$

(варіаційна задача). Будь-яке таке значення $\boldsymbol{u}$ називається *оптимальним керуванням.*

В теорії оптимального керування вирішують такі проблеми:

(i) отримати умови існування глобального мінімуму функціонала $\boldsymbol{J}$;

(ii) вивчити структуру і властивості рівнянь, які виражають ці умови (в них повинна брати участь "модель" Λ);

(iii) скласти конструктивний алгоритм чисельного знаходження апроксимацій оптимального керування $\boldsymbol{u}$.

Побудова теорії оптимального керування детермінованими системами залежить від моделі Λ. В багатьох прикладних задачах через складність керованих систем як Λ розглядають оператор з частинними похідними. Іншими словами, досліджують системи, для яких стан $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{v})$ визначається як розв'язок диференціального рівняння з частинними похідними типу (1), що задовольняє певні крайові умови, а у випадку еволюційних рівнянь - ще і початкову умову [1].

Ми розглядаємо проблему оптимального керування еволюційними системами, стан яких визначається диференціальними рівняннями параболічного типу, які задані на нескінченному часовому проміжку $(-\infty, 0]$. Тоді початковий момент збігається з $-\infty$ і стандартну початкову умову ставити не можна, а треба її замінити, наприклад, на обмеження поведінки розв'язку при $\boldsymbol{t} \to -\infty$. Тому ми кажемо, що розглядаються еволюційні системи без початкових умов.

1. **Коректність задачі без початкових умов для еволюційних рівнянь**.

Нехай $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{H}$ – гільбертові простори над полем дійсних чисел з відповідно скалярними добутками $(\cdot,\cdot)_{\boldsymbol{V}}$ і $(\cdot,\cdot)$ та нормами $\|\cdot\|$ і $|\cdot|$. Припустимо, що простір $\boldsymbol{V}$ неперервно і щільно вкладається в $\boldsymbol{H}$, тобто; $\boldsymbol{V}$ є підмножиною $\boldsymbol{H}$, замикання $\boldsymbol{V}$ за нормою $\boldsymbol{H}$ збігається з $\boldsymbol{H}$ та існує стала $\lambda > 0$ така, що

$$\lambda\, |\, \boldsymbol{v}\, |^2 \leq \|\, \boldsymbol{v}\, \|^2 \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}. \tag{1.1}$$

Нехай $\boldsymbol{V}'$, $\boldsymbol{H}'$ спряжені відповідно до $\boldsymbol{V}$ та $\boldsymbol{H}$ простори і вважатимемо (провівши відповідне ототожнення функціоналів), що простір $\boldsymbol{H}'$ є підпростором простору $\boldsymbol{V}'$. Ототожнивши (на підставі теореми Ріса) простори $\boldsymbol{H}$ та $\boldsymbol{H}'$, у підсумку отримаємо неперервні та щільні вкладення

$$\boldsymbol{V} \subset \boldsymbol{H} \subset \boldsymbol{V}'. \tag{1.2}$$

Зауважимо, що в цьому випадку $\langle \boldsymbol{g}, \boldsymbol{v}\rangle_{\boldsymbol{V}} = (\boldsymbol{g}, \boldsymbol{v})$ для будь-яких $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}, \boldsymbol{g} \in \boldsymbol{H} \subset \boldsymbol{V}'$, де $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\boldsymbol{V}}$ – означає дію елемента з простору $\boldsymbol{V}'$ на елемент простору $\boldsymbol{V}$ (канонічний добуток на $\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V}'$). Тому надалі вживатимемо позначення $(\cdot,\cdot)$ замість $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\boldsymbol{V}}$. Також використовуватимемо позначення $(\cdot,\cdot)_{\boldsymbol{V}'}, \|\cdot\|_*$ для відповідно скалярного добутку і норми в $\boldsymbol{V}'$. Зауважимо, що

$$\lambda\, \|\, \boldsymbol{h}\, \|_*^2 \leq |\, \boldsymbol{h}\, |^2 \quad \forall \boldsymbol{h} \in \boldsymbol{H}, \tag{1.3}$$

де λ – стала з нерівності (1.1). Справді, на підставі (1.1) одержуємо

$$\|\, \boldsymbol{h}\, \|^* = \sup_{\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}, \|\boldsymbol{v}\|=1} |\, (\boldsymbol{h}, \boldsymbol{v})\, | \leq \sup_{\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}, \|\boldsymbol{v}\|=1} |\, \boldsymbol{h}\, \|\, \boldsymbol{v}\, | \leq \lambda^{-1/2}\, |\, \boldsymbol{h}\, |\, .$$

Нехай $S := (-\infty, 0]$. Введемо ще потрібні нам далі простори функцій і розподілів, визначених на S.

Нехай X – довільний гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_X$ і нормою $\|\cdot\|_X$. Під $L^2_{\mathrm{loc}}(S;X)$ розумітимемо лінійний простір визначених на S зі значеннями в X функцій, які є вимірними і для будь-якого відрізка $[a,b] \subset X$ їхні звуження на цей відрізок належать простору $L^2(a,b;X)$.

Якщо $\omega \in \mathbb{R}$ – довільне число і $\gamma : S \to (0,+\infty)$ – яка-небудь вимірна функція, що є обмеженою на будь-якій обмеженій підмножині множини S, то позначимо

$$L^2_{\omega,\gamma}(S;X) := \{f \in L^2_{\mathrm{loc}}(S;X) : \int_S \gamma(t) e^{2\omega\int_0^t \alpha(s)ds} \| f(t) \|^2_X \, dt < \infty\}.$$

Лінійний простір $L^2_{\omega,\gamma}(S;X)$ є гільбертовим зі скалярним добутком

$$(f,g)_{\omega,\gamma,X} = \int_S \gamma(t) e^{2\omega\int_0^t \alpha(s)ds} (f(t),g(t))_X \, dt. \tag{1.4}$$

Якщо $\gamma(t) = 1$ при $t \in S$, то простір $L^2_{\omega,\gamma}(S;X)$ позначатимемо $L^2_{\omega,1}(S;X)$.

Під $D'(S;V')$ розумітимемо простір визначених на $D(\mathrm{int}S)$ ($\mathrm{int}S := (-\infty, 0)$) зі значеннями в V' розподілів, тобто простір лінійних функціоналів на $D(\mathrm{int}S)$ зі значеннями в V' ($D(\mathrm{int}S)$ – простір нескінченно диференційовних і фінітних на $\mathrm{int}S$ функцій. Легко переконатися (враховуючи (1.2)), що простори $L^2_{\mathrm{loc}}(S;V)$, $L^2_{\mathrm{loc}}(S;V')$ (зокрема, $L^2_{\omega,\alpha}(S;V)$, $L^2_{\omega,1/\alpha}(S;V')$), можна ототожнити з підпросторами простору розподілів $D'(-\infty,0;V')$. Це, зокрема, дає підстави говорити про похідні функцій з $L^2_{\mathrm{loc}}(S;V)$ (відповідно $L^2_{\omega,\alpha}(S;V)$) в сенсі розподілів $D'(-\infty,0;V')$ і належність таких похідних до $L^2_{\mathrm{loc}}(S;V')$ (відповідно $L^2_{\omega,1/\alpha}(S;V')$). З відомих результатів (див., наприклад, [12], 177-179) легко випливає такий факт: якщо функція y з $L^2_{\mathrm{loc}}(S;V)$ має похідну y' з $L^2_{\mathrm{loc}}(S;V')$, то y належить (можливо, після її зміни на множині міри нуль) простору $C(S;H)$ і функція $t \to |y(t)|^2$ є абсолютно неперервною на будь-якому відрізку променя S, причому виконується рівність

$$\frac{d}{dt} | y(t) |^2 = 2(y'(t),y(t)) \text{ для майже всіх } t \in S. \tag{1.5}$$

Введемо простір

$$W_\omega(S) := \{y \in L^2_{\omega,\alpha}(S;V) : y' \in L^2_{\omega,1/\alpha}(S;V')\},$$

який є гільбертовим зі скалярним добутком $(y,z)_{W_\omega(S)} := (y,z)_{\omega,\alpha,V} + (y',z')_{\omega,1/\alpha,V'}$, де y',z' - похідні функції відповідно y,z в сенсі розподілів $D'(-\infty,0;V')$.

Зі сказаного випливає, що

$$W_\omega(S) \subset C(S;H). \tag{1.6}$$

Лема 1. Нехай $y \in W_\omega(S)$, де $\omega \in \mathbb{R}$ – довільне число. Тоді існує $y_0 \ge 0$ таке, що

$$\lim_{t\to-\infty} e^{\omega\int_0^t \alpha(s)ds} \,|\, y(t) \,|= y_0, \tag{1.7}$$

причому, коли

$$\inf_{t\in S}\alpha(t) > 0, \tag{1.8}$$

то (обов'язково) $y_0 = 0$.

Крім того, правильною є така оцінка:

$$\begin{gathered} e^{2\omega\int_0^t \alpha(s)ds} \,|\, y(t) \,|^2 \le \\ \le y_0^2 + (2\omega\lambda^{-1}+1)\int_{-\infty}^t e^{2\omega\int_0^\theta \alpha(s)ds} (\alpha(\theta)\,|\, y(\theta)\,|^2 + [\alpha(\theta)]^{-1}\,|\, y'(\theta)\,|^2)d\theta,\ t \in S. \end{gathered} \tag{1.9}$$

Доведення. Приймемо $z(t) := e^{2\omega\int_0^t \alpha(s)ds} \,|\, y(t)\,|^2, t \in S,$ і покажемо існування $z_0 \ge 0$ такого, що $\lim\limits_{t\to-\infty} z(t) = z_0$. Для цього використаємо критерій Коші існування границі функцій. Спочатку зауважимо, що для довільних $t_1,t_2 \in S$ на підставі (5), (1) та нерівності Коші одержуємо

$$\begin{gathered} |\, z(t_1) - z(t_2)\,| = \Big|\int_{t_1}^{t_2} z'(t)dt\,\Big| \le 2\omega\int_{t_1}^{t_2}\alpha(t) e^{2\omega\int_0^t \alpha(s)ds} \,|\, y(t)\,|^2 dt + \\ +2\int_{t_1}^{t_2} e^{2\omega\int_0^t \alpha(s)ds} \,|\,(y'(t),y(t))\,|dt \le 2\omega\lambda^{-1}\int_{t_1}^{t_2}\alpha(t) e^{2\omega\int_0^t \alpha(s)ds} \,\|\, y(t)\,\|^2 dt + \\ +\int_{t_1}^{t_2}\alpha(t) e^{2\omega\int_0^t \alpha(s)ds} \,\|\, y(t)\,\|^2 dt + \int_{t_1}^{t_2}[\alpha(t)]^{-1} e^{2\omega\int_0^t \alpha(s)ds} \,\|\, y'(t)\,\|_*^2 dt. \end{gathered}$$

Оскільки $y \in W_\omega(S)$, то випливає, що для довільного, як завгодно малого, значення $\varepsilon > 0$ знайдеться число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що при $t_1, t_2 < -1/\delta$ матимемо $| z(t_2) - z(t_1) | < \varepsilon$. Отже, на підставі критерію Коші робимо висновок про існування числа $z_0 \geq 0$ такого, що $\lim\limits_{t \to -\infty} z(t) = z_0$, звідки отримаємо рівність (7) з $y_0 = \sqrt{z_0}$.

Тепер доведемо, що для виконання умови (8) в (7) обов'язково $y_0 = 0$. Справді, оскільки $\int_S \alpha(t) e^{2\omega \int_0^t \alpha(s)ds} \|y(t)\|^2 dt < \infty$, то існує послідовність $\{t_j\} \subset S$ така, що $t_j \to -\infty$ і $\alpha(t_j) e^{2\omega \int_0^{t_j} \alpha(s)ds} \| y(t_j) \|^2 \to 0$ при $j \to +\infty$. Звідси, оскільки $\lambda | y(t_j) |^2 \leq \| y(t_j) \|^2 \; (j \in \mathbb{N})$ та $e^{2\omega \int_0^{t_j} \alpha(s)ds} | y(t_j) |^2 \to y_0^2$ при $j \to +\infty$, то випливає, що $y_0 = 0$.

Тепер доведемо оцінку (9). Як вже було сказано, для функції $y \in W_\omega(S)$ виконується рівність (5). Домножимо її для майже кожного $t \in S$ на $e^{2\omega \int_0^t \alpha(s)ds}$ і проінтегруємо отриману рівність за t від ν до $\tau, -\infty < \nu < \tau \leq 0$

$$\int_\nu^\tau e^{2\omega \int_0^t \alpha(s)ds} \frac{d}{dt} | y(t) |^2 dt = 2\int_\nu^\tau e^{2\omega \int_0^t \alpha(s)ds} (y'(t), y(t)) dt.$$

З цієї рівності, інтегруючи частинами її ліву частину, отримаємо

$$e^{2\omega \int_0^\tau \alpha(s)ds} | y(\tau) |^2 = e^{2\omega \int_0^\nu \alpha(s)ds} | y(\nu) |^2 +$$

$$+2\omega \int_\nu^\tau \alpha(t) e^{\int_0^t \alpha(s)ds} | y(t) |^2 \, dt + 2\int_\nu^\tau e^{2\omega \int_0^t \alpha(s)ds} (y'(t), y(t)) dt. \qquad (1.10)$$

Використавши нерівність Коші ($ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$), оцінимо

$$\left| \int_\nu^\tau e^{2\omega \int_0^t \alpha(s)ds} (y'(t), y(t)) dt \right| \leq \int_\nu^\tau e^{2\omega \int_0^t \alpha(s)ds} \| y'(t) \|_* \| y(t) \| dt =$$

$$= \int_\nu^\tau (\alpha(t))^{1/2} e^{\omega \int_0^t \alpha(s)ds} \| y(t) \| \, (\alpha(t))^{-1/2} e^{\omega \int_0^t \alpha(s)ds} \| y'(t) \|_* \, dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_{\nu}^{\tau}\alpha(t)e^{2\omega\int_0^t \alpha(s)ds}\,\|\,y(t)\,\|^2\,dt + \frac{1}{2}\int_{\nu}^{\tau}[\alpha(t)]^{-1}e^{2\omega\int_0^t \alpha(s)ds}\,\|\,y(t)\,\|_*^2\,dt. \quad (1.11)$$

З (1.10), врахувавши (1.11) і (1.1), одержимо

$$e^{2\omega\int_0^{\tau}\alpha(s)ds}\,|\,y(\tau)\,|^2 \leq e^{2\omega\int_0^{\nu}\alpha(s)ds}\,|\,y(\nu)\,|^2 +$$

$$+(2\omega\lambda^{-1}+1)\int_{\nu}^{\tau}\alpha(t)e^{\int_0^t \alpha(s)ds}\,\|\,y(t)\,\|^2\,dt + \int_{\nu}^{\tau}[\alpha(t)]^{-1}e^{\int_0^t \alpha(s)ds}\,\|\,y'(t)\,\|_*^2\,dt. \quad (1.12)$$

Зафіксувавши в (1.12) довільно вибране $\tau \in S$ і спрямувавши ν до $-\infty$, на підставі (1.7) отримаємо (1.9).

Зауваження 1. Умова (1.8) суттєва для гарантування рівності нулю границі (1.7). Справді, нехай $V = H = V' =$ ¡ $,\omega = 0, \alpha(t) = (t^2+1)^{-1}, y(t) = 1$ при $t \in S$. Очевидно, що $y \in W_0(S)$ і в (7) $y_0 = 1$.

Нехай задана сім'я операторів $A(t): V \to V', t \in S$ така, що:

$\mathbf{A}_1$: функція $t \to (A(t)v, w)$ вимірна на S для будь-яких $v, w \in V$;

$\mathbf{A}_2$: існує вимірна функція $\alpha : S \to (0,+\infty)$ така, що

$$0 < \inf_{t\in[\tau,0]}\alpha(t) \leq \sup_{t\in[\tau,0]}\alpha(t) < \infty \quad \forall \tau < 0$$

і для будь-яких $v \in V, t \in S,$ виконується нерівність

$$(A(t)v, v) \geq \alpha(t)\,\|\,v\,\|^2, \quad v \in V; \quad (1.13)$$

$\mathbf{A}_3$: існує вимірна функція $\beta : S \to (0,+\infty)$ така, що

$$\sup_{t\in[\tau,0]}\beta(t) < \infty \quad \forall \tau < 0$$

і для будь-яких $v, w \in V, t \in S$ виконується нерівність

$$\|\,A(t)v\,\|_* \leq \beta(t)\,\|\,v\,\|, \quad v \in V. \quad (1.14)$$

Очевидно, що $\alpha(t) \leq \beta(t), t \in S$.

З властивостей $\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_3$ випливає, що для кожного $t \in S$ форма

$$a(t; v, w) := (A(t)v, w), \quad v, w \in V, \quad (1.15)$$

є білінійною і задовольняє умови:

- функція $t \to a(t; v, w)$ є вимірною на S для будь-яких $v, w \in V$;

- $a(t;v,v) \geq \alpha(t) \| v \|^2$;
- $| a(t;v,w) | \leq \beta(t) \| v \| \| w \|$.

Навпаки, якщо для кожного $t \in S$ визначена дійснозначна білінійна форма

$$v,w \to a(t;v,w), \quad v,w \in V,$$

і сім'я цих форм має зазначені властивості, то задано сім'ю лінійних операторів $A(t) : V \to V'$, яка задовольняє умови $\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_3$.

Розглянемо рівняння

$$\frac{dy(t)}{dt} + A(t)y(t) = f(t), \quad t \in S, \tag{1.16}$$

де $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(S;V')$ – задана функція.

Під *розв'язком рівняння* (1.16) розумітимемо функцію $y \in L^2_{\mathrm{loc}}(S;V)$, яка має похідну в сенсі розподілів $D'(-\infty,0;V')$ з простору $L^2_{\mathrm{loc}}(S;V')$ і задовольняє рівняння (1.16) в сенсі простору $L^2_{\mathrm{loc}}(S;V')$.

Для рівняння (1.16) розглянемо задачу: знайти його розв'язок, який задовольняє умову

$$e^{\omega\int_0^t \alpha(s)ds} | y(t) | \to 0 \qquad t \to -\infty, \tag{1.17}$$

де $\omega \in \mathbb{R}$ – задане число.

Таку задачу називають *задачею без початкових умов для еволюційного рівняння*, оскільки початковий момент у цій ситуації збігається з $-\infty$, тому ставити стандартну початкову умову не можна. Фактично умова (1.17) є аналогом початкової умови. Далі цю задачу коротко називатимемо задачею (1.16),(1.17).

Зауваження 2. Якщо $\omega_1 < \omega_2$, то з виконання умови (1.17) при $\omega = \omega_1$ випливає виконання цієї ж умови при $\omega = \omega_2$. Справді, одержимо

$$e^{\omega_2\int_0^t \alpha(s)ds} | y(t) | = e^{\omega_1\int_0^t \alpha(s)ds} e^{(\omega_2-\omega_1)\int_0^t \alpha(s)ds} | y(t) | \leq e^{\omega_1\int_0^t \alpha(s)ds} | y(t) |, \quad t \leq 0.$$

Теорема 1. Правильні такі два твердження.

(i) Задача (1.16),(1.17) має не більше одного розв'язку, якщо $\omega \leq \lambda$.

(ii) Нехай $\omega < \lambda$ – яке-небудь число, $f \in L^2_{\omega,1/\alpha}(S;V')$. Крім того, припустимо, що існує стала $K \geq 1$ така, що

$$\beta(t) \leq K\alpha(t), \quad t \in S. \tag{1.18}$$

Тоді існує (єдиний) розв'язок задачі (1.16),(1.17), він належить $W_\omega(S)$ і задовольняє оцінки

$$e^{2\omega\int_0^t \alpha(s)ds} | y(t) |^2 \le C_1 \int_{-\infty}^t [\alpha(\theta)]^{-1} e^{2\omega\int_0^\theta \alpha(s)ds} \| f(\theta) \|_*^2 d\theta, \quad t \in S, \tag{1.19}$$

$$\| y \|_{W_\omega(S)} \le C_2 \| f \|_{\omega,1/\alpha,V'}, \tag{1.20}$$

де $C_1, C_2 > 0$ – сталі, які залежать тільки від ω, λ, K .

Доведення. Спочатку доведемо твердження (і). Припустимо протилежне. Нехай y_1, y_2 – які-небудь два розв'язки задачі (1.16), (1.17). Тоді, підставивши їх по черзі в рівняння (1.16) та віднявши отримані рівності, для різниці $z := y_1 - y_2$ отримаємо рівність

$$\frac{d}{dt} z(t) + A(t)z(t) = 0 \text{ в } L^2_{\text{loc}}(S;V'). \tag{1.21}$$

Легко також переконатися, що виконується умова

$$e^{\omega\int_0^t \alpha(s)ds} | z(t) | \to 0 \text{ при } t \to -\infty. \tag{1.22}$$

Для майже кожного $t \in S$ скалярно домножимо рівність (21) на $z(t)$ і врахуємо рівність (1.5) та нерівність (1.13)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} | z(t) |^2 + \alpha(t) \| z(t) \|^2 \le 0, \quad t \in S.$$

Звідси, врахувавши нерівність (1.1) та умову $\omega \le \lambda$, отримаємо

$$\frac{d}{dt} | z(t) |^2 + 2\omega\alpha(t) | z(t) |^2 \le 0, \quad t \in S. \tag{1.23}$$

Домножимо нерівність (1.23) для майже кожного $t \in S$ на $e^{2\omega\int_0^t \alpha(s)ds}$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{2\omega\int_0^t \alpha(s)ds} | z(t) |^2\right) \le 0, \quad t \in S,$$

і проінтегруємо отриману нерівність за t від t_1 до t_2 , $-\infty < t_1 < t_2 \le 0$. У підсумку одержимо

$$e^{2\omega\int_0^{t_2} \alpha(s)ds} | z(t_2) |^2 \le e^{2\omega\int_0^{t_1} \alpha(s)ds} | z(t_1) |^2 . \tag{1.24}$$

Зафіксуємо в (1.24) довільно вибране значення $t_2 \in S$ і спрямуємо t_1 до $-\infty$. Звідси, врахувавши умову (1.22) і довільність t_2, отримаємо, що $z(t) = 0$ для кожного $t \in S$. Отримане протиріччя доводить твердження (i).

Тепер доведемо твердження (ii). Для кожного $m \in N$ приймемо

$$f_m(t) := \begin{cases} f(t), & -m < t \leq 0, \\ 0, & t \leq -m \end{cases}$$

і розглянемо задачу: знайти функцію $y_m \in L^2(-m,0;V), dy_m/dt \in L^2(-m,0;V')$, яка є розв'язком рівняння

$$\frac{dy_m(t)}{dt} + A(t)y_m(t) = f_m(t), \quad t \in (-m,0], \tag{1.25}$$

і задовольняє початкову умову

$$y_m(-m) = 0. \tag{1.26}$$

Існування та єдиність розв'язку задачі (1.25), (1.26) легко випливає з відомих результатів (див., наприклад, [11], с. 111-112).

Для кожного $m \in N$ продовжимо y_m нулем на весь промінь $(-\infty, 0]$ і за цим продовженням залишимо те ж саме позначення y_m.

Зробимо деякі оцінки членів послідовності $\{y_m\}$. Найперше зауважимо, що для кожного $m \in N$ функція y_m належить $W_\omega(S)$ і є розв'язком рівняння (1.16) з заміною f та f_m, тобто виконується рівність

$$\frac{dy_m(t)}{dt} + A(t)y_m(t) = f_m(t), \quad t \in S. \tag{1.27}$$

Помножимо скалярно рівність (1.27) для майже кожного $t \in S$ на $y_m(t)$ і врахуємо рівність (1.5). Внаслідок отримаємо

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} | y_m(t) |^2 + (A(t)y_m(t), y_m(t)) = (f_m(t), y_m(t)), \quad t \in S, m \in \text{¥}. \tag{1.28}$$

З рівності (1.28), оцінивши її праву частину та використавши умову (1.13), одержимо нерівність

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} | y_m(t) |^2 + \alpha(t) \| y_m(t) \|^2 \leq \| f_m(t) \|_* \| y_m(t) \|, \quad t \in S, m \in \text{¥}. \tag{1.29}$$

На підставі нерівності Коші отримаємо для м.в. $t \in S$

$$\| f(t) \|_* \| y_m(t) \| \leq \frac{\varepsilon\alpha(t)}{2} \| y_m(t) \|^2 + \frac{1}{2\varepsilon\alpha(t)} \| f(t) \|_*, \tag{1.30}$$

де $\boldsymbol{m} \in$ ¥ і $\varepsilon > 0$ – довільні числа.

Помножимо нерівність (1.29) на $2\boldsymbol{e}^{2\omega\int_0^{\boldsymbol{t}}\alpha(\boldsymbol{s})\boldsymbol{ds}}$ і врахуємо (1.30). Внаслідок простих перетворень одержимо для м.в. $\boldsymbol{t} \in \boldsymbol{S}$

$$\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}(\boldsymbol{e}^{2\omega\int_0^{\boldsymbol{t}}\alpha(\boldsymbol{s})\boldsymbol{ds}} \,|\, \boldsymbol{y_m}(\boldsymbol{t}) \,|^2) - 2\omega\alpha(\boldsymbol{t})\boldsymbol{e}^{2\omega\int_0^{\boldsymbol{t}}\alpha(\boldsymbol{s})\boldsymbol{ds}} \,|\, \boldsymbol{y_m}(\boldsymbol{t}) \,|^2 +$$
$$+(2-\varepsilon)\alpha(\boldsymbol{t})\boldsymbol{e}^{2\omega\int_0^{\boldsymbol{t}}\alpha(\boldsymbol{s})\boldsymbol{ds}} \,||\, \boldsymbol{y_m}(\boldsymbol{t}) \,||^2 \leq [\varepsilon\alpha(\boldsymbol{t})]^{-1}\boldsymbol{e}^{2\omega\int_0^{\boldsymbol{t}}\alpha(\boldsymbol{s})\boldsymbol{ds}} \,||\, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}) \,||_*^2 . \qquad (1.31)$$

На підставі (1.1) отримаємо

$$\begin{aligned}&(2-\varepsilon) \,||\, \boldsymbol{y_m}(\boldsymbol{t}) \,||^2 \geq \varepsilon(2-\varepsilon) \,||\, \boldsymbol{y_m}(\boldsymbol{t}) \,||^2 + \\ &+(1-\varepsilon)(2-\varepsilon)\lambda \,|\, \boldsymbol{y_m}(\boldsymbol{t}) \,|^2, \boldsymbol{t} \in \boldsymbol{S}, \varepsilon \in (0;1].\end{aligned} \qquad (1.32)$$

Якщо $\omega \leq 0$, то візьмемо $\varepsilon = 1$, якщо $0 < \omega < \lambda$, то виберемо $\varepsilon \in (0,1)$ з умови

$$(1-\varepsilon)(2-\varepsilon)\lambda = 2\omega, \qquad (1.33)$$

а саме $\varepsilon = (3 - \sqrt{1 + 8\omega\lambda^{-1}})/2$.

Звідси та з (1.31) на підставі (1.32) і (1.33) отримаємо

$$\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}(\boldsymbol{e}^{2\omega\int_0^{\boldsymbol{t}}\alpha(\boldsymbol{s})\boldsymbol{ds}} \,|\, \boldsymbol{y_m}(\boldsymbol{t}) \,|^2) + \boldsymbol{K}_1\alpha(\boldsymbol{t})\boldsymbol{e}^{2\omega\int_0^{\boldsymbol{t}}\alpha(\boldsymbol{s})\boldsymbol{ds}} \,||\, \boldsymbol{y_m}(\boldsymbol{t}) \,||^2 \leq$$
$$\leq \boldsymbol{K}_2[\alpha(\boldsymbol{t})]^{-1}\boldsymbol{e}^{2\omega\int_0^{\boldsymbol{t}}\alpha(\boldsymbol{s})\boldsymbol{ds}} \,||\, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}) \,||_*^2, \quad \boldsymbol{t} \in \boldsymbol{S}, \qquad (1.34)$$

де $\boldsymbol{K}_1, \boldsymbol{K}_2 > 0$ –- сталі, які залежать тільки від λ і ω.

Проінтегруємо нерівність (1.34) за $\boldsymbol{t}$ від ν до τ, де ν, τ – довільні числа, $\nu < \tau \leq 0$. У підсумку отримаємо

$$\boldsymbol{e}^{2\omega\int_0^{\tau}\alpha(\boldsymbol{s})\boldsymbol{ds}} \,|\, \boldsymbol{y_m}(\tau) \,|^2 - \boldsymbol{e}^{2\omega\int_0^{\nu}\alpha(\boldsymbol{s})\boldsymbol{ds}} \,|\, \boldsymbol{y_m}(\nu) \,|^2 +$$
$$+\boldsymbol{K}_1\int_\nu^\tau \alpha(\boldsymbol{t})\boldsymbol{e}^{2\omega\int_0^{\boldsymbol{t}}\alpha(\boldsymbol{s})\boldsymbol{ds}} \,||\, \boldsymbol{y_m}(\boldsymbol{t}) \,||^2\boldsymbol{dt} \leq \boldsymbol{K}_2\int_\nu^\tau [\alpha(\boldsymbol{t})]^{-1}\boldsymbol{e}^{2\omega\int_0^{\boldsymbol{t}}\alpha(\boldsymbol{s})\boldsymbol{ds}} \,||\, \boldsymbol{f_m}(\boldsymbol{t}) \,||_*^2\boldsymbol{dt}.$$

Спрямуємо в цій нерівності ν до $-\infty$, врахувавши означення $\boldsymbol{y_m}$ і $\boldsymbol{f_m}$

$$\boldsymbol{e}^{2\omega\int_0^{\tau}\alpha(\boldsymbol{s})\boldsymbol{ds}} \,|\, \boldsymbol{y_m}(\tau) \,|^2 + \boldsymbol{K}_1\int_{-\infty}^\tau \alpha(\boldsymbol{t})\boldsymbol{e}^{2\omega\int_0^{\boldsymbol{t}}\alpha(\boldsymbol{s})\boldsymbol{ds}} \,||\, \boldsymbol{y_m}(\boldsymbol{t}) \,||^2\boldsymbol{dt} \leq$$

$$\leq K_2 \int_{-\infty}^{\tau} [\alpha(t)]^{-1} e^{2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} \| f_m(t) \|_*^2 dt, \quad \tau \leq 0. \tag{1.35}$$

Тепер зауважимо, що з (1.27) та (1.14) легко випливає оцінка

$$\| y_m'(t) \|_*^2 \leq 2(\| A(t) y_m(t) \|_*^2 + \| f_m(t) \|_*^2) \leq 2(\beta^2(t) \| y_m(t) \|^2 + \| f_m(t) \|_*^2) \tag{1.36}$$

для майже кожного $t \in S$.

Домножимо нерівність (1.36) на $[\alpha(t)]^{-1} e^{2\omega \int_0^t \alpha(s) ds}$ і проінтегруємо за t від $-\infty$ до $\tau \leq 0$, врахувавши умову (1.18) і те, що $y_m(t) = 0, f_m(t) = 0$ при $t < -m$. Отримаємо оцінку

$$\int_{-\infty}^{\tau} [\alpha(t)]^{-1} e^{2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} \| y_m'(t) \|_*^2 dt \leq 2K^2 \int_{-\infty}^{\tau} \alpha(t) e^{2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} \| y_m(t) \|^2 dt +$$

$$+2 \int_{-\infty}^{\tau} [\alpha(t)]^{-1} e^{2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} \| f_m(t) \|_*^2 dt, \quad \tau \in S. \tag{1.37}$$

Врахувавши означення f_m, з (1.35) і (1.37) одержимо оцінки

$$e^{2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} | y_m(t) |^2 \leq C_1 \int_{-\infty}^{t} [\alpha(\theta)]^{-1} e^{2\omega \int_0^\theta \alpha(s) ds} \| f(\theta) \|_*^2 d\theta, \quad t \in S, \tag{1.38}$$

$$\| y_m \|_{W_\omega(S)} \leq C_2 \| f \|_{\omega, 1/\alpha, V'}, \tag{1.39}$$

де $C_1, C_2 > 0$ – сталі, які залежать тільки від ω, λ і K.

З оцінки (1.39), зокрема, випливає, що послідовність $\{y_m\}$ обмежена в $L^2_{\omega,\alpha}(S;V)$, а послідовність $\{y_m'\}$ обмежена в $L^2_{\omega,1/\alpha}(S;V')$. Це разом з оцінкою (1.38) і тим, що $L^2_{\omega,\alpha}(S;V)$, $L^2_{\omega,1/\alpha}(S;V')$, $W_\omega(S)$ – гільбертові простори, дає змогу зробити висновок про існування функцій $y \in L^2_{\omega,\alpha}(S;V)$, $\mathring{y} \in L^2_{\omega,1/\alpha}(S;V')$, $z \in W_\omega(S)$ і підпослідовності $\{y_{m_j}\}_{j=1}^{\infty}$ послідовності $\{y_m\}_{m=1}^{\infty}$ таких, що

$$y_{m_j} \underset{j \to \infty}{\longrightarrow} y \text{ слабко в } L^2_{\omega,\alpha}(S;V), \tag{1.40}$$

$$y_{m_j}' \underset{j \to \infty}{\longrightarrow} \mathring{y} \text{ слабко в } L^2_{\omega,1/\alpha}(S;V'), \tag{1.41}$$

$$y_{m_j} \underset{j \to \infty}{\longrightarrow} z \text{ слабко в } W_\omega(S), \tag{1.42}$$

$$y_{m_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \overset{\circ}{z} \quad * - \text{слабко в} \quad L^{\infty}_{loc}(S;H). \tag{1.43}$$

Зауважимо, що співвідношення (1.43) означає, що для будь-яких $t_1, t_2 \in S\,(t_1 < t_2)$ і довільного $g \in L^1(t_1, t_2; H)$ одержуємо

$$\int_{t_1}^{t_2} (y_{m_j}(t), g(t))dt \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \int_{t_1}^{t_2} (\overset{\circ}{z}(t), g(t))dt. \tag{1.44}$$

Покажемо, що

$$\overset{\circ}{y} = y', \quad z = y, \quad \overset{\circ}{z} = y. \tag{1.45}$$

Справді, нехай $v \in V, \varphi \in D(-\infty, 0)$ – довільні. Одержали

$$\int_S (y'_{m_j}(t), v)\varphi(t)dt = -\int_S (y_{m_j}(t), v)\varphi'(t)dt, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{1.46}$$

Згідно з (1.40) отримаємо

$$\int_S (y_{m_j}(t), v)\varphi'(t)dt = \int_S \alpha(t) e^{2\omega\int_0^t \alpha(s)ds} (y_{m_j}(t), [\alpha(t)]^{-1} e^{-2\omega\int_0^t \alpha(s)ds} \varphi'(t)v) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow}$$

$$\underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \int \alpha(t) e^{2\omega\int_0^t \alpha(s)ds} (y(t), [\alpha(t)]^{-1} e^{-2\omega\int_0^t \alpha(s)ds} \varphi'(t)v) = \int_S (y(t), v)\varphi'(t)dt. \tag{1.47}$$

Аналогічно, використавши (41), можна довести, що

$$\int_S (y'_{m_j}(t), v)\varphi(t)dt \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \int_S (\overset{\circ}{y}(t), v)\varphi(t)dt. \tag{1.48}$$

На підставі (1.47) і (1.48) перейдемо в (1.46) до границі при $j \to \infty$. У підсумку отримаємо

$$\int_S (y'(t), v)\varphi(t)dt = -\int_S (y(t), v)\varphi'(t)dt$$

для довільних $v \in V$ і $\varphi \in D(-\infty, 0)$, звідки одержуємо першу з рівностей (1.45).

На підставі першої з рівностей (1.45) і співвідношень (1.40) - (1.42) отримаємо для довільного елемента $g \in W_\omega(S)$

$$(y_{m_j}, g)_{\omega,\alpha,V} + (y_{m_j}', g')_{\omega,1/\alpha,V'} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} (z, g)_{\omega,\alpha,V} + (z', g')_{\omega,1/\alpha,V'} = (y, g)_{\omega,\alpha,V} + (y', g')_{\omega,1/\alpha,V'}.$$

Звідси отримаємо другу з рівностей (1.45). Ми також з'ясували, що $y \in W_\omega(S)$ і виконується оцінка (1.20).

Тепер доведемо правильність третьої з рівностей (1.45). Нехай $t_1, t_2 \in S\ (t_1 < t_2)$ – довільні числа і g – будь-який елемент з $L^2(t_1, t_2; H) \subset L^1(t_1, t_2; H)$. Продовжимо g нулем на весь промінь S, залишивши за цим продовженням те саме позначення g. Очевидно, що виконується (1.44). З іншого боку, на підставі (1.40) одержуємо

$$\int_{t_1}^{t_2} (y_{m_j}(t), g(t))dt = \int_{t_1}^{t_2} (y_{m_j}(t), \Lambda_V^{-1} g(t))_V\, dt =$$

$$= \int_S \alpha(t) e^{2\omega \int_0^t \alpha(s)ds} (y_{m_j}(t), [\alpha(t)]^{-1} e^{-2\omega \int_0^t \alpha(s)ds} \Lambda_V^{-1} g(t))_V\, dt \underset{j\to\infty}{\to}$$

$$\underset{j\to\infty}{\to} \int_S \alpha(t) e^{2\omega \int_0^t \alpha(s)ds} (y(t), [\alpha(t)]^{-1} e^{-2\omega \int_0^t \alpha(s)ds} \Lambda_V^{-1} g(t))_V\, dt = \int_{t_1}^{t_2} (y(t), g(t))dt,$$

де $\Lambda_V : V \to V'$ – канонічний ізоморфізм Ріса. Звідси і (1.44) легко випливає третя з рівностей (1.45).

Доведемо правильність оцінки (1.19). Зауважимо, що з оцінки (1.38) випливає оцінка

$$|\, y_m(t) \,| \le h(t), \quad t \in S, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{1.49}$$

де

$$h(t) := C_1 e^{-2\omega \int_0^t \alpha(s)ds} \int_{-\infty}^{t} [\alpha(\theta)]^{-1} e^{2\omega \int_0^\theta \alpha(s)ds} \| f(\theta) \|_*^2\, d\theta \ge 0, \quad t \in S \quad (h \in C(S)).$$

Нехай $\tau \in S, \delta > 0$ – які-небудь числа. Тоді з (1.49) отримаємо

$$|\, y_{m_j}(t) \,| \le \max_{s \in [\tau-\delta, \tau]} h(s), \quad t \in [\tau - \delta, \tau], \quad j \in \mathbb{N}. \tag{1.50}$$

З (1.43), (1.45), (1.50) і того, що $y \in C(S; H)$, випливає оцінка

$$|\, y(t) \,| \le \max_{s \in [\tau-\delta, \tau]} h(s), \quad t \in [\tau - \delta, \tau].$$

Звідси отримаємо нерівність $|\, y(\tau) \,| \le \max_{s \in [\tau-\delta, \tau]} h(s)$ для будь-яких $\delta > 0$, а це означає, що $|\, y(\tau) \,| \le h(\tau)$. Отож, оцінка (1.19) правильна.

Тепер доведемо, що y – розв'язок задачі (1.16),(1.17). Спочатку зауважимо, що для будь-яких $t_1, t_2 \in S(t_1 < t_2)$ і довільних $g \in L^2(t_1, t_2; V), \overset{\circ}{g} \in L^2(t_1, t_2; V')$ одержуємо

$$\int_{t_1}^{t_2} (y_{m_j}(t), \overset{\circ}{g}(t))dt \underset{j\to\infty}{\to} \int_{t_1}^{t_2} (y(t), \overset{\circ}{g}(t))dt, \tag{1.51}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (y'_{m_j}(t), g(t))\,dt \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \int_{t_1}^{t_2} (y'(t), g(t))\,dt. \tag{1.52}$$

Доведемо правильність (1.51). Для цього продовжимо $\overset{\circ}{g}$ нулем на весь промінь S, залишивши за цим продовженням те саме позначення $\overset{\circ}{g}$. Використавши (1.40), отримаємо

$$\int_{t_1}^{t_2} (y_{m_j}(t), \overset{\circ}{g}(t))\,dt = \int_S (y_{m_j}(t), \overset{\circ}{g}(t))\,dt =$$

$$= \int_S \alpha(t) e^{2\omega\int_0^t \alpha(s)ds} (y_{m_j}(t), [\alpha(t)]^{-1} e^{-2\omega\int_0^t \alpha(s)ds} \Lambda_V^{-1} \overset{\circ}{g}(t))_V\, dt \underset{j\to\infty}{\longrightarrow}$$

$$\underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \int_S \alpha(t) e^{2\omega\int_0^t \alpha(s)ds} (y(t), [\alpha(t)]^{-1} e^{-2\omega\int_0^t \alpha(s)ds} \Lambda_V^{-1} \overset{\circ}{g}(t))_V\, dt = \int_{t_1}^{t_2} (y(t), \overset{\circ}{g}(t))\,dt,$$

тобто, співвідношення (1.51) правильне. Аналогічно доводиться правильність (1.52).

Нехай $g \in L^2_{loc}(S;V), t_1, t_2 \in S\ (t_1 < t_2), m \in \mathbb{N}$ – довільні. Для майже кожного $t \in S$ домножимо скалярно (1.27) на $g(t)$ і проінтегруємо отриману рівність за t від t_1 до t_2

$$\int_{t_1}^{t_2} (y'_m(t), g(t))\,dt + \int_{t_1}^{t_2} (A(t)y_m(t), g(t))\,dt = \int_{t_1}^{t_2} (f_m(t), g(t))\,dt. \tag{1.53}$$

Тепер зауважимо, що на підставі співвідношення (1.51) отримуємо

$$\int_{t_1}^{t_2} (A(t)y_{m_j}(t), g(t))\,dt = \int_{t_1}^{t_2} (y_{m_j}(t), A^*(t)g(t))\,dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} (y(t), A^*(t)g(t))\,dt = \int_{t_1}^{t_2} (A(t)y(t), g(t))\,dt, \tag{1.54}$$

де для кожного $t \in S$ $A^*(t)$ – спряжений до $A(t)$ оператор.

Приймемо в (1.53) $m = m_j\ (j \in \mathbb{N})$ і перейдемо до границі при $j \to \infty$, враховуючи (1.52), (1.54) та означення $f_m\ (m \in \mathbb{N})$. Внаслідок отримаємо рівність

$$\int_{t_1}^{t_2} (y'(t) + A(t)y(t) - f(t), g(t))\,dt = 0 \tag{1.55}$$

для довільних $g \in L^2_{loc}(S;V), t_1, t_2 \in S\ (t_1 < t_2)$. Звідси випливає рівність

$$y'(t) + A(t)y(t) = f(t) \ \text{для м.в.}\ t \in S, \tag{1.56}$$

тобто, функція $\boldsymbol{y}$ є розв'язком рівняння (1.16).

З оцінки (1.19) і того, що $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}_{\omega,1/\alpha}(\boldsymbol{S};\boldsymbol{V}')$, легко випливає умова (1.17). Отож, ми довели, що функція $\boldsymbol{y}$ є розв'язком задачі (1.16), (1.17), належить простору $\boldsymbol{W}_{\omega}(\boldsymbol{S})$ і задовольняє оцінки (1.19) і (1.20).

2. **Формулювання задачі оптимального керування та її однозначна розв'язність**. Нехай $\boldsymbol{U}$ – гільбертів простір керувань; ω – деяке число; $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{t}) : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}', \boldsymbol{t} \in \boldsymbol{S}$, – сім'я операторів, яка описана в попередньому пункті; $\boldsymbol{B} \in L(\boldsymbol{U};\boldsymbol{L}^2_{\omega,1/\alpha}(\boldsymbol{S};\boldsymbol{V}'))$ – деякий оператор; $\boldsymbol{g}$ – який-небудь елемент простору $\boldsymbol{L}^2_{\omega,1/\alpha}(\boldsymbol{S};\boldsymbol{V}')$.

Стан досліджуваної еволюційної системи $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{y}(\cdot;\boldsymbol{v})$ при заданому керуванні $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{U}$ визначатимемо як функцію з простору $\boldsymbol{W}_{\omega}(\boldsymbol{S})$, що є розв'язком рівняння

$$\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t};\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{A}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t};\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{t}) + (\boldsymbol{Bv})(\boldsymbol{t}), \quad \boldsymbol{t} \in \boldsymbol{S}, \tag{2.1}$$

і задовольняє умову

$$\boldsymbol{e}^{\omega\int_0^{\boldsymbol{t}}\alpha(\boldsymbol{s})\boldsymbol{ds}} \mid \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t};\boldsymbol{v}) \mid \to 0 \qquad \boldsymbol{t} \to -\infty. \tag{2.2}$$

Нехай H – деякий гільбертів простір спостережень; $\boldsymbol{C} \in L(\boldsymbol{W}_{\omega}(\boldsymbol{S}); H)$ – заданий оператор, який визначає спостереження $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{v}) := \boldsymbol{Cy}(\boldsymbol{v})$ при керуванні $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{U}$.

Позначимо через $\boldsymbol{N}$ симетричний оператор з простору $L(\boldsymbol{U})$ ($L(\boldsymbol{U})$ – банахів простір лінійних обмежених операторів на $\boldsymbol{U}$), який задовольняє умову

$$(\boldsymbol{Nv},\boldsymbol{v})_{\boldsymbol{U}} \geq \nu \, \| \boldsymbol{v} \|^2_{\boldsymbol{U}}, \quad \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{U}, \tag{2.3}$$

де $\nu = \mathrm{const} > 0$.

Нехай $\Phi(\boldsymbol{z},\boldsymbol{v}) := \| \boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}_0 \|^2_H + (\boldsymbol{Nv},\boldsymbol{v}), (\boldsymbol{z},\boldsymbol{v}) \in H \times \boldsymbol{U}$, – деяка функція і введемо в розгляд функцію вартості $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{v}) := \Phi(\boldsymbol{z}(\boldsymbol{v}),\boldsymbol{v}), \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{U}$, тобто

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{v}) = \| \boldsymbol{Cy}(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{z}_0 \|^2_H + (\boldsymbol{Nv},\boldsymbol{v})_{\boldsymbol{U}}, \quad \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{U}, \tag{2.4}$$

де $\boldsymbol{z}_0 \in H$ – заданий елемент.

Нехай $\boldsymbol{U}_\partial$ – опукла замкнена множина в $\boldsymbol{U}$. Задача, яку ми розглядаємо, полягає у знаходженні елементів $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}_\partial$ таких, що

$$\inf_{\boldsymbol{v}\in \boldsymbol{U}_\partial} \boldsymbol{J}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{u}) \tag{2.5}$$

($\boldsymbol{u}$ – оптимальне керування). Далі цю задачу коротко називатимемо задачею (2.5).

Нас цікавить питання існування єдиного розв’язку задачі (2.5).

Теорема 2. Нехай простори $\boldsymbol{V},\boldsymbol{H}$ та сім’я операторів $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{t}) : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}', \boldsymbol{t} \in \boldsymbol{S},$ з пункту 1 і виконуються зазначені в цьому пункті припущення. Крім того, вважаємо, що $\omega < \lambda$. Тоді задача (2.5) має єдиний розв’язок.

Для доведення цієї теореми будемо використовувати таке відоме (див. [1]) твердження.

Твердження 1. Нехай $\boldsymbol{v} \to \boldsymbol{J}(\boldsymbol{v}) : \boldsymbol{U} \to \mathbb{R}$ – строго опуклий, диференційовний функціонал, який у випадку, коли $\boldsymbol{U}_\partial$ – необмежена множина, задовольняє умову

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{v}) \to +\infty \ \text{ при } \|\boldsymbol{v}\|_U \to +\infty, \ \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{U}_\partial. \tag{2.6}$$

Тоді існує єдиний розв’язок (оптимальне керування) задачі (2.5) і він характеризується варіаційною нерівністю

$$\boldsymbol{J}'(\boldsymbol{u}) \cdot (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) \ge 0 \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{U}_\partial. \tag{2.7}$$

Доведення теореми 1. Нам достатньо показати, що в нашому випадку виконуються всі умови Твердження 1.

Нехай $\boldsymbol{W}_\omega^*(\boldsymbol{S})$ – лінійний підпростір простору $\boldsymbol{W}_\omega(\boldsymbol{S})$, який складається з функцій, які задовольняють умову (1.17). Легко переконатися, використовуючи лему 1, що $\boldsymbol{W}_\omega^*(\boldsymbol{S})$ з нормою простору $\boldsymbol{W}_\omega(\boldsymbol{S})$ є банаховим простором.

Зауважимо, що відображення $\boldsymbol{y}(\cdot) \to \boldsymbol{A}(\cdot)\boldsymbol{y}(\cdot)$ переводить простір $\boldsymbol{L}^2_{\omega,\alpha}(\boldsymbol{S};\boldsymbol{V})$ в простір $\boldsymbol{L}^2_{\omega,1/\alpha}(\boldsymbol{S};\boldsymbol{V}')$. Справді, для довільного $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{L}^2_{\omega,\alpha}(\boldsymbol{S};\boldsymbol{V})$ на підставі (1.14) і (1.18) отримаємо

$$\begin{aligned}&[\alpha(\boldsymbol{t})]^{-1} \boldsymbol{e}^{2\int_0^{\boldsymbol{t}} \alpha(\boldsymbol{s})\boldsymbol{ds}} \,\|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})\|_*^2 \le \\ &\le [\alpha(\boldsymbol{t})]^{-1}\beta^2(\boldsymbol{t})\boldsymbol{e}^{2\int_0^{\boldsymbol{t}} \alpha(\boldsymbol{s})\boldsymbol{ds}} \,\|\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})\|^2 \le \boldsymbol{K}^2\alpha(\boldsymbol{t})\boldsymbol{e}^{2\int_0^{\boldsymbol{t}} \alpha(\boldsymbol{s})\boldsymbol{ds}} \,\|\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})\|^2, \quad \boldsymbol{t} \in \boldsymbol{S}.\end{aligned} \tag{2.8}$$

Оскільки права частина нерівності (8) інтегровна по $\boldsymbol{S}$, то з цієї нерівності випливає, що функція $\boldsymbol{t} \to \boldsymbol{A}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})$ належить простору $\boldsymbol{L}^2_{\omega,1/\alpha}(\boldsymbol{S};\boldsymbol{V}')$. Отож, на підставі сказаного коректно визначенй оператор

$$\boldsymbol{L} : \boldsymbol{W}_\omega^*(\boldsymbol{S}) \to \boldsymbol{L}^2_{\omega,1/\alpha}(\boldsymbol{S};\boldsymbol{V}') \tag{2.9}$$

за правилом

$$(\boldsymbol{L}\boldsymbol{y})(\boldsymbol{t}) := \frac{\boldsymbol{dy}(\boldsymbol{t})}{\boldsymbol{dt}} + \boldsymbol{A}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}),\ \ \boldsymbol{t} \in \boldsymbol{S}, \tag{2.10}$$

для кожного $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{W}_{\omega}^{*}(\boldsymbol{S})$.

Оскільки ми припустили, що $\omega < \lambda$, то з теореми 1 випливає бієктивність відображення $\boldsymbol{L}$, причому оператор $\boldsymbol{L}$ і обернений до нього $\boldsymbol{L}^{-1} : \boldsymbol{L}^{2}_{\omega,1/\alpha}(\boldsymbol{S};\boldsymbol{V}') \to \boldsymbol{W}_{\omega}^{*}(\boldsymbol{S})$ є неперервними. Справді, для $\boldsymbol{L}$ це легко перевіряється з використанням нерівності (2.8), а для $\boldsymbol{L}^{-1}$ випливає з оцінки (1.20), якщо прийняти $\boldsymbol{y} := \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{f}$. Отже, оператор $\boldsymbol{L}$ виконує ізоморфізм між просторами $\boldsymbol{W}_{\omega}^{*}(\boldsymbol{S})$ і $\boldsymbol{L}^{2}_{\omega,1/\alpha}(\boldsymbol{S};\boldsymbol{V}')$.

З (2.1),(2.2) випливає, що для кожного $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{U}$ стан $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{v})$ системи визначається за правилом

$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{L}^{-1}(\boldsymbol{g} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{v}). \tag{2.11}$$

Звідки, зокрема, випливає, що відображення $\boldsymbol{v} \to \boldsymbol{y}(\boldsymbol{v}) : \boldsymbol{U} \to \boldsymbol{W}_{\omega}^{*}(\boldsymbol{S})$ є афінним і неперервним. Згідно з цим і нашими припущеннями отримаємо, що функціонал $\boldsymbol{J}$ строго монотонний і неперервний. Покажемо, що він є диференційовний, і знайдемо його диференціал.

Нехай $\boldsymbol{v},\boldsymbol{h}$ – довільні елементи простору $\boldsymbol{U}$. Зауважимо, що

$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{L}^{-1}(\boldsymbol{g} + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{h})) = \boldsymbol{L}^{-1}(\boldsymbol{g} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{h} = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{h}. \tag{2.12}$$

Використовуючи рівність (12) та властивості скалярного добутку, отримаємо

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{h}) - \boldsymbol{J}(\boldsymbol{v}) = \|\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{h}) - \boldsymbol{z}_0\|_H^2 + (\boldsymbol{N}(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{h}),\boldsymbol{v}+\boldsymbol{h})_U - \|\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{z}_0\|_H^2 -$$
$$-(\boldsymbol{N}\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})_U = \|\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{z}_0 + \boldsymbol{C}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{h}\|_H^2 + (\boldsymbol{N}\boldsymbol{v},\boldsymbol{h})_U + (\boldsymbol{N}\boldsymbol{h},\boldsymbol{v})_U + (\boldsymbol{N}\boldsymbol{h},\boldsymbol{h})_U -$$
$$- \|\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{z}_0\|_H^2 = 2(\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{z}_0, \boldsymbol{C}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{h})_H + 2(\boldsymbol{N}\boldsymbol{v},\boldsymbol{h})_U + \|\boldsymbol{C}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{h}\|_H^2 + (\boldsymbol{N}\boldsymbol{h},\boldsymbol{h})_U. \tag{2.13}$$

Звідси випливає, що функціонал $\boldsymbol{J}$ диференційовний і його диференціал набуває вигляду

$$\boldsymbol{J}'(\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{h} = 2(\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{z}_0, \boldsymbol{C}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{h})_H + 2(\boldsymbol{N}\boldsymbol{v},\boldsymbol{h})_U, \quad \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{U}, \boldsymbol{h} \in \boldsymbol{U}. \tag{2.14}$$

Умова (6) виконується, оскільки на підставі (3) отримаємо

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{v}) = \|\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{z}_0\|_{\boldsymbol{H}}^2 + (\boldsymbol{N}\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})_{\boldsymbol{U}} \geq \nu \|\boldsymbol{v}\|^2, \quad \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{U}. \tag{2.15}$$

Зі сказаного і твердження 1 випливає, що задача (2.5) має єдиний розв'язок і він характеризується варіаційною нерівністю (2.7). □

Дещо "розшифруємо" нерівність (2.7). Для цього зауважимо, що ця нерівність, враховуючи (2.14) і те, що $\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{v})-\boldsymbol{y}(\boldsymbol{u})$ (див. (2.11)), набуде вигляду

$$(\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}(\boldsymbol{u})-\boldsymbol{z}_0,\boldsymbol{C}(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{v})-\boldsymbol{y}(\boldsymbol{u})))_H + (\boldsymbol{N}\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})_U \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{v}\in \boldsymbol{U}_\partial. \tag{2.16}$$

Для подальшої конкретизації співвідношень, що характеризують оптимальне керування, треба уточняти типи спостережень. Ми розглянемо два типи спостереження – *фінальне* і *розподілене.*

3. **Сукупність співвідношень, які характеризують оптимальне керування у випадку фінального спостереження**. Розглянемо випадок *фінального спостереження*, тобто виконання умови

$$\mathbf{F}: H = \boldsymbol{H},\ \boldsymbol{C} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{P},\ \text{де}\ \boldsymbol{P}\in L(\boldsymbol{W}_\omega(\boldsymbol{S});\boldsymbol{H}),\ \boldsymbol{P}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}(0)\ \ \forall \boldsymbol{z}\in \boldsymbol{W}_\omega(\boldsymbol{S}),\ \boldsymbol{D}\in L(\boldsymbol{H}).$$

У цьому випадку нерівність (2.16) набуде вигляду

$$(\boldsymbol{D}\boldsymbol{y}(0;\boldsymbol{u})-\boldsymbol{z}_0,\boldsymbol{D}(\boldsymbol{y}(0;\boldsymbol{v})-\boldsymbol{y}(0;\boldsymbol{u})))_{\boldsymbol{H}} + (\boldsymbol{N}\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})_U \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{v}\in \boldsymbol{U}_\partial. \tag{3.1}$$

Оскільки $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}'$, то з (3.1) одержуємо

$$(\boldsymbol{D}^*(\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(0;\boldsymbol{u})-\boldsymbol{z}_0),\boldsymbol{y}(0;\boldsymbol{v})-\boldsymbol{y}(0;\boldsymbol{u}))_{\boldsymbol{H}} + (\boldsymbol{N}\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})_U \geq 0 \ \ \forall \boldsymbol{v}\in \boldsymbol{U}_\partial, \tag{3.2}$$

де $\boldsymbol{D}^*$ – спряжений до $\boldsymbol{D}$ оператор, тобто $\boldsymbol{D}^*$ – оператор з $L(\boldsymbol{H})$ такий, що

$$(\boldsymbol{D}\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{v},\boldsymbol{D}^*\boldsymbol{w})\ \ \forall \boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in \boldsymbol{H}.$$

Для кожного $\boldsymbol{t}\in \boldsymbol{S}$ через $\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{t}):\boldsymbol{V}\to \boldsymbol{V}'$ позначимо спряжений до $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{t})$ оператор, тобто $\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{t})\in L(\boldsymbol{V};\boldsymbol{V}')$ такий, що

$$(\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{t})\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{A}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in \boldsymbol{V}. \tag{3.3}$$

Легко переконатися, що

$$(\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{t})\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) \geq \alpha(\boldsymbol{t})\,||\,\boldsymbol{v}\,||^2 \quad \forall \boldsymbol{v}\in \boldsymbol{V}, \tag{3.4}$$

$$||\,\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{t})\boldsymbol{v}\,||_* \leq \beta(\boldsymbol{t})\,||\,\boldsymbol{v}\,|| \quad \forall \boldsymbol{v}\in \boldsymbol{V}, \tag{3.5}$$

де α і β ті, що в умовах $\mathbf{A}_2$ і $\mathbf{A}_3$.

Справді, з (3.3) і $\mathbf{A}_2$ одержуємо

$$(\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{t})\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{A}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) \geq \alpha(\boldsymbol{t})\,||\,\boldsymbol{v}\,||^2 \quad \forall \boldsymbol{t}\in \boldsymbol{S},\boldsymbol{v}\in \boldsymbol{V},$$

звідки отримуємо (3.4).

Тепер зауважимо, що з (3) і $\mathbf{A}_3$ випливає

$$|(\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{t})\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})| = |(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{w},\boldsymbol{v})| \le \beta(\boldsymbol{t}) \|\boldsymbol{w}\| \|\boldsymbol{v}\| \quad \forall \boldsymbol{t} \in \boldsymbol{S}, \boldsymbol{v},\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{V},$$

звідки легко отримаємо (3.5).

Введемо в розгляд спряжений стан $\boldsymbol{t} \to \boldsymbol{p}(\boldsymbol{t};\boldsymbol{u}) \in \boldsymbol{L}^2_{\boldsymbol{loc}}(\boldsymbol{S};\boldsymbol{V}) \cap \boldsymbol{C}(\boldsymbol{S};\boldsymbol{H})$ як розв'язок задачі Коші

$$-\frac{\boldsymbol{dp}(\boldsymbol{t};\boldsymbol{u})}{\boldsymbol{dt}} + \boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{t})\boldsymbol{p}(\boldsymbol{t};\boldsymbol{u}) = 0 \qquad \boldsymbol{D}'(\boldsymbol{S};\boldsymbol{V}'), \tag{3.6}$$

$$\boldsymbol{p}(0;\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{D}^*(\boldsymbol{D}\boldsymbol{y}(0;\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{z}_0). \tag{3.7}$$

Існування розв'язку цієї задачі випливає з відомих результатів, якщо зробити в (3.6) заміну $\boldsymbol{t}$ на $-\boldsymbol{t}$. Очевидно (див.(3.5)), що функція $\boldsymbol{t} \to \boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{t})\boldsymbol{p}(\boldsymbol{t};\boldsymbol{u})$ є елементом простору $\boldsymbol{L}^2_{\boldsymbol{loc}}(\boldsymbol{S};\boldsymbol{V}')$, а отже, функція $\boldsymbol{t} \to \dfrac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}\boldsymbol{p}(\boldsymbol{t};\boldsymbol{u})$ належить $\boldsymbol{L}^2_{\boldsymbol{loc}}(\boldsymbol{S};\boldsymbol{V}')$.

Одержимо деякі оцінки розв'язку задачі (3.6),(3.7). Для зручності і спрощення викладення позначимо

$$\boldsymbol{p}_0 := \boldsymbol{D}^*(\boldsymbol{D}\boldsymbol{y}(0;\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{z}_0) \tag{3.8}$$

і писатимемо $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{p}$ замість відповідно $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{t};\boldsymbol{u}), \boldsymbol{p}(\boldsymbol{u})$ $(\boldsymbol{t} \in \boldsymbol{S})$.

Для майже кожного $\boldsymbol{t} \in \boldsymbol{S}$ домножимо скалярно рівність (3.6) на $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{e}^{-2\omega\int_0^{\boldsymbol{t}}\alpha(\boldsymbol{s})\boldsymbol{ds}}$ і отриману рівність проінтегруємо за $\boldsymbol{t}$ від $\tau < 0$ до 0. У підсумку, врахувавши рівність

$$(\boldsymbol{p}'(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{p}(\boldsymbol{t})) = \frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}|\boldsymbol{p}(\boldsymbol{t})|^2 \qquad \text{О лСс о КМХ} \quad \boldsymbol{t} \in \boldsymbol{S},$$

отримаємо

$$-\frac{1}{2}\int_\tau^0 \boldsymbol{e}^{-2\omega\int_0^{\boldsymbol{t}}\alpha(\boldsymbol{s})\boldsymbol{ds}} \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}|\boldsymbol{p}(\boldsymbol{t})|^2\,\boldsymbol{dt} + \int_\tau^0 \boldsymbol{e}^{-2\omega\int_0^{\boldsymbol{t}}\alpha(\boldsymbol{s})\boldsymbol{ds}} (\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{t})\boldsymbol{p}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{p}(\boldsymbol{t}))\boldsymbol{dt} = 0. \tag{3.9}$$

Перший член лівої частини цієї рівності проінтегруємо частинами, врахуємо умову (3.7) і позначення (3.8). Одержимо

$$-\frac{1}{2}\int_\tau^0 \boldsymbol{e}^{-2\omega\int_0^{\boldsymbol{t}}\alpha(\boldsymbol{s})\boldsymbol{ds}} \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}|\boldsymbol{p}(\boldsymbol{t})|^2\boldsymbol{dt} = -\frac{1}{2}|\boldsymbol{p}_0|^2 + \frac{1}{2}|\boldsymbol{p}(\tau)|^2\,\boldsymbol{e}^{-2\omega\int_0^{\tau}\alpha(\boldsymbol{s})\boldsymbol{ds}} -$$

$$-\omega\int_\tau^0 \alpha(\boldsymbol{t})\boldsymbol{e}^{-2\omega\int_0^{\boldsymbol{t}}\alpha(\boldsymbol{s})\boldsymbol{ds}}\,|\boldsymbol{p}(\boldsymbol{t})|^2\,\boldsymbol{dt}. \tag{3.10}$$

Врахувавши умову (3.4), отримаємо

$$\int_{\tau}^{0} e^{-2\omega\int_0^t \alpha(s)ds} (A^*(t)p(t), p(t))dt \ge \int_{\tau}^{0} \alpha(t) e^{-2\omega\int_0^t \alpha(s)ds} \| p(t) \|^2 \, dt. \quad (3.11)$$

З (3.9), врахувавши (3.10),(3.11), отримаємо

$$| p(\tau) |^2 \, e^{-2\omega\int_0^\tau \alpha(s)ds} - 2\omega\int_{\tau}^{0} \alpha(t) e^{-2\omega\int_0^t \alpha(s)ds} | p(t) |^2 \, dt +$$

$$+2\int_{\tau}^{0} \alpha(t) e^{-2\omega\int_0^t \alpha(s)ds} \| p(t) \|^2 \, dt \le | p_0^2 |, \quad \tau \in S.$$

Звідси, розглядаючи окремо два випадки: $\omega < 0$ і $0 \le \omega < \lambda$ та застосовуючи у другому випадку нерівність (1.1), одержимо

$$\begin{aligned} &| p(\tau) |^2 \, e^{-2\omega\int_0^\tau \alpha(s)ds} + \\ &+2\min\{1;1-\lambda^{-1}\omega\}\int_{\tau}^{0} \alpha(t) e^{-2\omega\int_0^t \alpha(s)ds} \| p(t) \|^2 \, dt \le | p_0 |^2, \ \ \tau \in S. \end{aligned} \quad (3.12)$$

З (3.12) випливають оцінки

$$| p(t) | \le | p_0 | \, e^{\omega\int_0^t \alpha(s)ds}, \ \ t \in S, \quad (3.13)$$

$$\int_{S} \alpha(t) e^{-2\omega\int_0^t \alpha(s)ds} \| p(t) \|^2 \, dt \le (2\min\{1;1-\lambda^{-1}\omega\})^{-1} | p_0 |^2 \,. \quad (3.14)$$

Тоді, врахувавши (1.18) і (3.5), з (3.6) отримаємо

$$\| p'(t) \|_*^2 = \| A^*(t)p(t) \|_*^2 \le \beta^2(t) \| p(t) \|^2 \le K^2\alpha^2(t) \| p(t) \|^2, \ \ t \in S. \quad (3.15)$$

Для кожного $t \in S$ помножимо (3.15) скалярно на $[\alpha(t)]^{-1} e^{-2\omega\int_0^t \alpha(s)ds}$ і проінтегруємо за t від $\tau < 0$ до 0

$$\int_{\tau}^{0} [\alpha(t)]^{-1} e^{-2\omega\int_0^t \alpha(s)ds} \| p'(t) \|_*^2 dt \le K^2 \int_{\tau}^{0} \alpha(t) e^{-2\omega\int_0^t \alpha(s)ds} \| p(t) \|^2 dt, \ \ t \in S. \quad (3.16)$$

З (3.16) і (3.14) одержуємо

$$\int_{S} [\alpha(t)]^{-1} e^{-2\omega\int_0^t \alpha(s)ds} \| p'(t) \|_*^2 \, dt \le K^2 (2\min\{1;1-\lambda^{-1}\omega\})^{-1} \, | p_0 |^2 \,. \quad (3.17)$$

Зауважимо, що для довільних чисел $t_1, t_2 \in S\,(t_1 < t_2)$ і будь-яких функцій $x, y \in W(t_1, t_2) := \{z \in L^2(t_1, t_2; V) : z' \in L^2(t_1, t_2; V')\}$ маємо таку формулу інтегрування частинами:

$$\int_{t_1}^{t_2} (x', y)dt = (x, y)\,|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} (y', x)dt. \tag{3.18}$$

Справді, як відомо, для функцій $z \in W(t_1, t_2)$ отримаємо рівність

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,|\,z(t)\,|^2 = (z'(t), z(t)) \qquad \text{О .К} \quad t \in (t_1, t_2). \tag{3.19}$$

Проінтегрувавши (3.19) за t від t_1 до t_2, отримаємо

$$\int_{t_1}^{t_2} (z'(t), z(t))dt = \frac{1}{2}\,|\,z(t)\,|^2|_{t_1}^{t_2}\ . \tag{3.20}$$

Приймемо в цій рівності $z = x + y$, де $x, y \in W(t_1, t_2)$. У підсумку одержимо

$$\int_{t_1}^{t_2} (x' + y', x + y)dt = \frac{1}{2}\,|\,x + y\,|^2|_{t_1}^{t_2},$$

звідки, врахувавши (3.20), отримаємо

$$\int_{t_1}^{t_2} [(x', y) + (y', x)]dt = (x, y)\,|_{t_1}^{t_2},$$

що і треба було довести.

Тепер для майже кожного $t \in S$ скалярно домножимо (3.6) на $y(t;v) - y(t;u), v \in V,$ і проінтегруємо отриману рівність за t від $\tau < 0$ до 0

$$-\int_{\tau}^{0} (\frac{d}{dt} p(t;u), y(t;v) - y(t;u))dt + \int_{\tau}^{0} (A^*(t)p(t;u), y(t;v) - y(t;u))dt = 0. \tag{3.21}$$

Використовуючи співвідношення (3.18), одержимо

$$-\int_{\tau}^{0} (\frac{d}{dt} p(t;u), y(t;v) - y(t;u))dt = -(p(t;u), y(t;v) - y(t;u))\,|_{\tau}^{0} +$$
$$+\int_{\tau}^{0} (p(t;u), \frac{d}{dt}(y(t;v) - y(t;u)))dt = -(p(0;u), y(0;v) - y(0;u)) +$$
$$+(p(\tau;u), y(\tau;v) - y(\tau;u)) + \int_{\tau}^{0} (p(t;u), \frac{d}{dt}(y(t;v) - y(t;u)))dt. \tag{3.22}$$

На підставі означення спряженого оператора отримаємо

$$\int_{\tau}^{0} (A^*(t)p(t;u), y(t;v) - y(t;u))dt =$$

$$= \int_{\tau}^{0} (\boldsymbol{p}(\boldsymbol{t};\boldsymbol{u}), \boldsymbol{A}(\boldsymbol{t})(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t};\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t};\boldsymbol{u})))\boldsymbol{dt}. \tag{3.23}$$

З (3.21)-(3.23) легко виведемо

$$(\boldsymbol{p}(0;\boldsymbol{u}),\boldsymbol{y}(0;\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{y}(0;\boldsymbol{u})) = (\boldsymbol{p}(\tau;\boldsymbol{u}),\boldsymbol{y}(\tau;\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{y}(\tau;\boldsymbol{u})) + \int_{\tau}^{0} (\boldsymbol{p}(\boldsymbol{t};\boldsymbol{u}),(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}))(\boldsymbol{t}))\boldsymbol{dt}. \tag{3.24}$$

Покажемо, що в (3.24) можна перейти до границі при $\tau \to -\infty$.

На підставі (2.2) і (3.13)

$$| (\boldsymbol{p}(\tau;\boldsymbol{u}),\boldsymbol{y}(\tau;\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{y}(\tau;\boldsymbol{u})) | \le | \boldsymbol{p}(\tau;\boldsymbol{u}) | \cdot | \boldsymbol{y}(\tau;\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{y}(\tau;\boldsymbol{u}) | \le$$

$$\le | \boldsymbol{p}(0;\boldsymbol{u}) | \, \boldsymbol{e}^{\omega \int_0^{\tau} \alpha(\boldsymbol{s})\boldsymbol{ds}} \cdot \gamma(\tau) \boldsymbol{e}^{-\omega \int_0^{\tau} \alpha(\boldsymbol{s})\boldsymbol{ds}} = | \boldsymbol{p}(0;\boldsymbol{u}) | \, \gamma(\tau), \tag{3.25}$$

де $\gamma(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{t} \in \boldsymbol{S},$ – функція така, що $\gamma(\boldsymbol{t}) \to 0$ при $\boldsymbol{t} \to -\infty$.

Легко бачити, що

$$\int_{\tau}^{0} | (\boldsymbol{p}(\boldsymbol{t};\boldsymbol{u}),(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}))(\boldsymbol{t})) | \, \boldsymbol{dt} \le \int_{\tau}^{0} || (\boldsymbol{p}(\boldsymbol{t};\boldsymbol{u}) || \cdot || (\boldsymbol{B}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}))(\boldsymbol{t}) ||_* \, \boldsymbol{dt} =$$

$$= \int_{\tau}^{0} [\alpha(\boldsymbol{t})]^{1/2} \boldsymbol{e}^{-\omega \int_0^{\tau} \alpha(\boldsymbol{s})\boldsymbol{ds}} || (\boldsymbol{p}(\boldsymbol{t};\boldsymbol{u}) || \cdot [\alpha(\boldsymbol{t})]^{-1/2} \boldsymbol{e}^{\omega \int_0^{\tau} \alpha(\boldsymbol{s})\boldsymbol{ds}} || (\boldsymbol{B}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}))(\boldsymbol{t})) ||_* \, \boldsymbol{dt}. \tag{3.26}$$

На підставі (3.14) і того, що $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) \in \boldsymbol{L}^2_{\omega,1/\alpha}(\boldsymbol{S};\boldsymbol{V}'),$ можна зробити висновок про інтегровність на $\boldsymbol{S}$ підінтегральної функції в інтегралі правої частини нерівності (3.26). Врахувавши це, а також (3.25), перейдемо в (3.24) до границі при $\tau \to -\infty$

$$(\boldsymbol{p}(0;\boldsymbol{u}),\boldsymbol{y}(0;\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{y}(0;\boldsymbol{u})) = \int_{\boldsymbol{S}} (\boldsymbol{p}(\boldsymbol{t};\boldsymbol{u}),(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}))(\boldsymbol{t}))\boldsymbol{dt}. \tag{3.27}$$

Приймемо

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{t};\boldsymbol{u}) := \boldsymbol{p}(\boldsymbol{t};\boldsymbol{u}) \boldsymbol{e}^{-2\omega \int_0^{\boldsymbol{t}} \alpha(\boldsymbol{s})\boldsymbol{ds}}, \ \boldsymbol{t} \in \boldsymbol{S}.$$

На підставі (3.14) можемо зробити висновок, що $\overset{\circ}{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{u}) \in \boldsymbol{L}_{\omega,\alpha}(\boldsymbol{S};\boldsymbol{V}).$ Очевидно, що правильною є рівність

$$\int_{\boldsymbol{S}} (\boldsymbol{p}(\boldsymbol{t};\boldsymbol{u}),(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}))(\boldsymbol{t}))\boldsymbol{dt} = \int_{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{e}^{2\omega \int_0^{\boldsymbol{t}} \alpha(\boldsymbol{s})\boldsymbol{ds}} ((\boldsymbol{B}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}))(\boldsymbol{t}), \overset{\circ}{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{t};\boldsymbol{u}))\boldsymbol{dt}. \tag{3.28}$$

Нехай

$$\inf_{\boldsymbol{t} \in \boldsymbol{S}} \alpha(\boldsymbol{t}) = \alpha_0 > 0. \tag{3.29}$$

Приймемо

$$\mathbf{V}_\omega := \boldsymbol{L}_{\omega,\alpha}(\boldsymbol{S};\boldsymbol{V}),\ \mathbf{H}_\omega := \boldsymbol{L}^2_{\omega,1}(\boldsymbol{S};\boldsymbol{H}),\ \mathbf{V}'_\omega := \boldsymbol{L}^2_{\omega,1/\alpha}(\boldsymbol{S};\boldsymbol{V}').$$

Як було сказано раніше, простори $\mathbf{V}_\omega, \mathbf{H}_\omega, \mathbf{V}'_\omega$ - гільбертові. Зауважимо, що в припущенні (3.29) правильним є ланцюжок неперервних і щільних включень

$$\mathbf{V}_\omega \subset \mathbf{H}_\omega \subset \mathbf{V}'_\omega. \tag{3.30}$$

Справді, на підставі співвідношень (1.1) – (1.3) й умови (3.29) одержуємо

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{v}\|^2_{\mathbf{H}_\omega} &= \int_{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{e}^{2\omega\int_0^{\boldsymbol{t}}\alpha(\boldsymbol{s})\boldsymbol{ds}} |\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t})|^2 \boldsymbol{dt} \le \lambda^{-1}\alpha_0^{-1}\int_{\boldsymbol{S}}\alpha(\boldsymbol{t})\boldsymbol{e}^{2\omega\int_0^{\boldsymbol{t}}\alpha(\boldsymbol{s})\boldsymbol{ds}} \|\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t})\|^2\, \boldsymbol{dt} = \\ &= \lambda^{-1}\alpha_0^{-1}\,\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{V}_\omega},\ \boldsymbol{v}\in\mathbf{V}_\omega; \end{aligned} \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{w}\|^2_{\mathbf{V}'_\omega} &= \int_{\boldsymbol{S}}[\alpha(\boldsymbol{t})]^{-1}\boldsymbol{e}^{2\omega\int_0^{\boldsymbol{t}}\alpha(\boldsymbol{s})\boldsymbol{ds}} \|\boldsymbol{w}(\boldsymbol{t})\|^2_*\, \boldsymbol{dt} \le \\ &\le \lambda^{-1}\alpha_0^{-1}\int_{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{e}^{2\omega\int_0^{\boldsymbol{t}}\alpha(\boldsymbol{s})\boldsymbol{ds}} |\boldsymbol{w}(\boldsymbol{t})|^2\boldsymbol{dt} = \lambda^{-1}\alpha_0^{-1}\,\|\boldsymbol{w}\|^2_{\mathbf{H}_\omega}, \\ &\boldsymbol{w}\in\mathbf{H}_\omega. \end{aligned} \tag{3.32}$$

На підставі (3.31) і (3.32) матимемо ланцюжок неперервних вкладень (30). Щільність вкладень (3.30) неважко перевірити, використовуючи щільність вкладень в (1.2).

Ототожнимо спряжений до $\mathbf{H}_\omega$ простір з ним самим. Тоді спряжений до $\mathbf{V}_\omega$ простір ототожнюється з $\mathbf{V}'_\omega$ і дія елемента $\boldsymbol{f}\in\mathbf{V}'_\omega$ на елемент $\boldsymbol{v}\in\mathbf{V}_\omega$ визначається так:

$$((\boldsymbol{f},\boldsymbol{v})) = \int_{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{e}^{2\omega\int_0^{\boldsymbol{t}}\alpha(\boldsymbol{s})\boldsymbol{ds}}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t}))\boldsymbol{dt}. \tag{3.33}$$

На підставі (3.33) бачимо, що (3.28) можна записати у вигляді

$$\int_{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{t};\boldsymbol{u}),(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}))(\boldsymbol{t}))\boldsymbol{dt} = ((\mathring{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{B}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}))) = \langle\boldsymbol{B}^*\mathring{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}\rangle_{\boldsymbol{U}}. \tag{3.34}$$

Отже, на підставі (3.7),(3.27),(3.34) співвідношення (3.2) рівносильне нерівності

$$(\Lambda_{\boldsymbol{U}}^{-1}\boldsymbol{B}^*\mathring{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{N}\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})_{\boldsymbol{U}} \ge 0 \quad \forall\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{U}_\partial, \tag{3.35}$$

де $\Lambda_{\boldsymbol{U}}:\boldsymbol{U}\to\boldsymbol{U}'$ канонічний ізоморфізм Ріса.

Отже, ми довели таке твердження.

Теорема 3. Нехай виконуються накладені в п. 1 умови на простори V, H та сім'ю операторів $A(t) : V \to V'$, $t \in S$, а оператори B, N, C визначені в п. 2. Крім того, припустимо, що $g \in L_{\omega,1/\alpha}(S;V')$, і виконуються умови $\mathbf{F}$ та (3.29). Тоді оптимальне керування u в задачі (2.5) характеризується співвідношеннями

$$\frac{dy(t;u)}{dt} + A(t)y(t;u) = g(t) + (Bu)(t), \ \ t \in S,$$

$$t \to y(t;u) \in L^2_{\omega,\alpha}(S;V),$$

$$-\frac{dp(t;u)}{dt} + A^*(t)p(t;u) = 0, \ \ t \in S,$$

$$p(0;u) = D^*(Dy(0;u) - z_0),$$

$$t \to \overset{\circ}{p}(t;u) := p(t;u)e^{-2\omega\int_0^t \alpha(s)ds} \in L_{\omega,\alpha}(S;V),$$

$$(\Lambda_U^{-1}B^* \overset{\circ}{p}(u) + Nu, v - u)_U \geq 0 \ \forall v \in U_\partial.$$

4. **Сукупність співвідношень**, **які характеризують оптимальне керування у випадку розподіленного спостереження**. В цьому пункті розглянемо випадок *розподіленого спостереження*, тобто виконання умови

$$\mathbf{R}: \qquad C \in L(L^2_{\omega,\alpha}(S;V); H) \subset L(W_\omega(S); H)$$

і знайдемо співвідношення, які характеризують оптимальне керування у цьому випадку.

Вважаємо, що виконується умова (3.29), а отже, включення (3.30) правильне.

У цьому випадку нерівність (2.16) можна записати у вигляді

$$\langle C^*\Lambda(Cy(u) - z_0), y(v) - y(u)\rangle_{\mathbf{V}_\omega} + (Nu, v - u)_U \geq 0 \quad \forall v \in U_\partial, \tag{4.1}$$

де $\Lambda : H \to H'$ – канонічний ізоморфізм Ріса; $C^* : H' \to \mathbf{V}'_\omega$ – спряжений до C оператор.

Введемо в розгляд спряжений стан $t \to p(t;u) \in \mathbf{V}_\omega \equiv L^2_{loc}(S,V)$ як розв'язок задачі Коші

$$-\frac{dp(t;u)}{dt} + A^*(t)p(t;u) = (C^*\Lambda(Cy(u) - z_0))(t) \quad \text{â} \quad \in \mathbf{V}_{\omega'} \equiv L^2_{loc}(S,V'), \tag{4.2}$$

$$p(0;u) = 0, \tag{4.3}$$

$$p(u) \in L_{\omega,\alpha}(S;V) \cap C_b(S;H), \tag{4.4}$$

де $\boldsymbol{C_b}(\boldsymbol{S};\boldsymbol{H})$ – підпростір простору $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{S};\boldsymbol{H})$, що складається з обмежених на $\boldsymbol{S}$ функцій.

Існування єдиного розв'язку $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{u}) \in \boldsymbol{L}^2_{\boldsymbol{loc}}(\boldsymbol{S};\boldsymbol{V})$, $\boldsymbol{p}'(\boldsymbol{u}) \in \boldsymbol{L}^2_{\boldsymbol{loc}}(\boldsymbol{S};\boldsymbol{V}')$, рівняння (4.2), який задовольняє умову (4.3), легко випливає з відомих результатів (див.,наприклад,[11], с. 111-112)), якщо зробити в рівнянні (4.2) заміну $\boldsymbol{t}$ на $-\boldsymbol{t}$. Покажемо, що виконується умова (4.4). У цьому разі для спрощення викладення писатимемо $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{p}$ замість відповідно $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{t};\boldsymbol{u}),\boldsymbol{p}(\boldsymbol{u})$ і використовуватимемо позначення

$$\boldsymbol{h} := \boldsymbol{C}^*\Lambda(\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{z}_0). \tag{4.5}$$

Отже, нехай функція $\boldsymbol{t} \to \boldsymbol{p}(\boldsymbol{t}) \in \boldsymbol{L}^2_{\boldsymbol{loc}}(\boldsymbol{S};\boldsymbol{V})$ перетворює рівняння (4.2) в рівність майже скрізь на $\boldsymbol{S}$ і задовольняє умову (4.3). Для майже кожного $\boldsymbol{t} \in \boldsymbol{S}$ домножимо скалярно рівність (4.2) на $\boldsymbol{e}^{2\omega\int_0^{\boldsymbol{t}}\alpha(\boldsymbol{s})\boldsymbol{ds}}\boldsymbol{p}(\boldsymbol{t})$ й отриману рівність проінтегруємо за $\boldsymbol{t}$ від τ до 0 ($\tau < 0$ – довільне число)

$$-\int_\tau^0 \boldsymbol{e}^{2\omega\int_0^{\boldsymbol{t}}\alpha(\boldsymbol{s})\boldsymbol{ds}}(\boldsymbol{p}'(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{p}(\boldsymbol{t}))\boldsymbol{dt} + \int_\tau^0 \boldsymbol{e}^{2\omega\int_0^{\boldsymbol{t}}\alpha(\boldsymbol{s})\boldsymbol{ds}}(\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{t})\boldsymbol{p}(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{p}(\boldsymbol{t}))\boldsymbol{dt} =$$

$$= \int_\tau^0 \boldsymbol{e}^{2\omega\int_0^{\boldsymbol{t}}\alpha(\boldsymbol{s})\boldsymbol{ds}}(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{p}(\boldsymbol{t}))\boldsymbol{dt}. \tag{4.6}$$

Враховуючи умову (4.3), отримаємо

$$-\int_\tau^0 \boldsymbol{e}^{2\omega\int_0^{\boldsymbol{t}}\alpha(\boldsymbol{s})\boldsymbol{ds}}(\boldsymbol{p}'(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{p}(\boldsymbol{t}))\boldsymbol{dt} = -\frac{1}{2}\int_\tau^0 \boldsymbol{e}^{2\omega\int_0^{\boldsymbol{t}}\alpha(\boldsymbol{s})\boldsymbol{ds}}\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}|\,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{t})\,|^2\boldsymbol{dt} =$$

$$= \frac{1}{2}\boldsymbol{e}^{2\omega\int_0^{\tau}\alpha(\boldsymbol{s})\boldsymbol{ds}}|\,\boldsymbol{p}(\tau)\,|^2 + \omega\int_\tau^0 \alpha(\boldsymbol{t})\boldsymbol{e}^{2\omega\int_0^{\boldsymbol{t}}\alpha(\boldsymbol{s})\boldsymbol{ds}}|\,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{t})\,|^2\boldsymbol{dt}. \tag{4.7}$$

За умовою (3.4) отримаємо

$$\int_\tau^0 \boldsymbol{e}^{2\omega\int_0^{\boldsymbol{t}}\alpha(\boldsymbol{s})\boldsymbol{ds}}(\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{t})\boldsymbol{p}(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{p}(\boldsymbol{t}))\boldsymbol{dt} \geq \int_\tau^0 \alpha(\boldsymbol{t})\boldsymbol{e}^{2\omega\int_0^{\boldsymbol{t}}\alpha(\boldsymbol{s})\boldsymbol{ds}}\|\,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{t})\,\|^2\boldsymbol{dt}. \tag{4.8}$$

На підставі нерівності Коші ($\boldsymbol{ab} \leq \frac{\varepsilon}{2}\boldsymbol{a}^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\boldsymbol{b}^2,\ \varepsilon > 0, \boldsymbol{a},\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$) виведемо

$$\int_\tau^0 \boldsymbol{e}^{2\omega\int_0^{\boldsymbol{t}}\alpha(\boldsymbol{s})\boldsymbol{ds}}(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{p}(\boldsymbol{t}))\boldsymbol{dt} \leq \int_\tau^0 [\alpha(\boldsymbol{t})]^{1/2}[\alpha(\boldsymbol{t})]^{-1/2}\boldsymbol{e}^{2\omega\int_0^{\boldsymbol{t}}\alpha(\boldsymbol{s})\boldsymbol{ds}}\|\,\boldsymbol{h}(\boldsymbol{t})\,\|_*\|\,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{t})\,\|\boldsymbol{dt} \leq$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2}\int_{\tau}^{0}\alpha(t)e^{2\omega\int_0^t \alpha(s)ds} \| p(t) \|^2 dt + \frac{1}{2\varepsilon}\int_{\tau}^{0}[\alpha(t)]^{-1}e^{2\omega\int_0^t \alpha(s)ds} \| h(t) \|_*^2 dt, \quad (4.9)$$

де $\varepsilon > 0$ – довільне число.

З (4.6) на підставі (4.7)-(4.9) одержимо

$$e^{2\omega\int_0^{\tau} \alpha(s)ds} | p(\tau) |^2 + (2-\varepsilon)\int_{\tau}^{0}\alpha(t)e^{2\omega\int_0^t \alpha(s)ds} \| p(t) \|^2 dt +$$

$$+2\omega\int_{\tau}^{0}\alpha(t)e^{2\omega\int_0^t \alpha(s)ds} | p(t) |^2 dt \le \frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{0}[\alpha(t)]^{-1}e^{2\omega\int_0^t \alpha(s)ds} \| h(t) \|_*^2 dt. \quad (4.10)$$

Покажемо, що звідси за умови $\omega > -\lambda$ випливають оцінки

$$\sup_{t\in S} e^{2\omega\int_0^t \alpha(s)ds} | p(t) |^2 \le \max\{1;(1+\lambda^{-1}\omega)^{-1}\}\int_S [\alpha(s)]^{-1}e^{2\omega\int_0^t \alpha(s)ds} \| h(t) \|_*^2 dt, \quad (4.11)$$

$$\int_S \alpha(t)e^{2\omega\int_0^t \alpha(s)ds} \| p(t) \|^2 dt \le \max\{1;(1+\lambda^{-1}\omega)^{-2}\}\int_S [\alpha(t)]^{-1}e^{2\omega\int_0^t \alpha(s)ds} \| h(t) \|_*^2 dt. \quad (4.12)$$

Для цього розглянемо два випадки: 1) $\omega \ge 0$; 2) $\omega < 0$.

У першому випадку приймемо $\varepsilon = 1$ в (4.10) і легко отримаємо оцінки (4.11), (4.12). У другому випадку спочатку оцінимо третій член лівої частини нерівності (4.10), використовуючи (1.1):

$$2\omega\int_{\tau}^{0}\alpha(t)e^{2\omega\int_0^t \alpha(s)ds} | p(t) |^2 dt \ge 2\lambda^{-1}\omega\int_{\tau}^{0}\alpha(t)e^{2\omega\int_0^t \alpha(s)ds} \| p(t) \|^2 dt. \quad (4.13)$$

З (4.10) і (4.13) отримаємо

$$e^{2\omega\int_0^{\tau} \alpha(s)ds} | p(\tau) |^2 + (2(1+\lambda^{-1}\omega)-\varepsilon)\int_{\tau}^{0}\alpha(t)e^{2\omega\int_0^t \alpha(s)ds} \| p(t) \|^2 dt \le$$

$$\le \frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{0}[\alpha(t)]^{-1}e^{2\omega\int_0^t \alpha(s)ds} \| h(t) \|_*^2 dt. \quad (4.14)$$

Припустимо, що $\omega > -\lambda$. Тоді, прийнявши $\varepsilon = 1 + \lambda^{-1}\omega > 0$, з (4.14), одержимо (4.11),(4.12). Звідси робимо висновок, що умова (4.4) виконується.

Тепер повернемося до нерівності (4.1). Перетворимо її, використовуючи спряжений стан, описаний співввідношеннями (4.2) – (4.4).

Для майже кожного $t \in S$ домножимо рівність (4.2) на $y(t;v) - y(t;u)$ і проінтегруємо отриману рівність за t від τ до 0 ($\tau < 0$ – довільне число)

$$-\int_{\tau}^{0}\left(\frac{dp(t;u)}{dt},\ y(t;v)-y(t;u)\right)dt+\int_{\tau}^{0}(A^{*}(t)p(t;u),y(t;v)-y(t;u))dt=$$
$$=\int_{\tau}^{0}(C^{*}\Lambda(Cy(u)-z_{0}),y(v)-y(u))dt. \tag{4.15}$$

Перетворимо ліву частину рівності (4.15), використовуючи умову(4.3), формулу інтегрування частинами і означення спряженого оператора. У підсумку отримаємо

$$(p(\tau;u),y(\tau;v)-y(\tau;u))+\int_{\tau}^{0}(p(t;u),(B(v-u))(t))dt=$$
$$=\int_{\tau}^{0}(C^{*}\Lambda(Cy(u)-z_{0}),y(v)-y(u))dt. \tag{4.16}$$

Припустимо, що

$$-\lambda<\omega\leq 0. \tag{4.17}$$

В цьому випадку, врахувавши (4.11) і (2.2), одержуємо

$$|\,y(\tau;u)\,|\to 0,\quad |\,y(\tau;v)\,|\to 0\quad \text{ЬТх}\quad \tau\to-\infty, \tag{4.18}$$

$$|\,p(\tau;u)\,|\leq C,\quad \tau\in S, \tag{4.19}$$

де $C>0$ – стала, що не залежить від τ.

Врахувавши це, перейдемо до границі в (4.16) при $\tau\to-\infty$. Отримаємо

$$\langle C^{*}\Lambda(Cy(u)-z_{0}),y(v)-y(u)\rangle_{\mathbf{V}_{\omega}}=\langle p(u),B(v-u)\rangle_{\mathbf{V}_{\omega}}. \tag{4.20}$$

Очевидно, що

$$\langle p(u),B(v-u)\rangle_{\mathbf{V}_{\omega}}=\langle B^{*}p(u),v-u\rangle_{U}=(\Lambda_{U}^{-1}B^{*}p(u),v-u)_{U}, \tag{4.21}$$

де $\Lambda_{U}:U\to U'$ – канонічний ізоморфізм Ріса.

На підставі (4.20), (4.21) отримаємо, що нерівність (4.6) рівносильна нерівності

$$(\Lambda_{U}^{-1}B^{*}p(u)+Nu,v-u)_{U}\geq 0\quad \forall v\in U_{\partial}. \tag{4.22}$$

Отже, ми довели таке твердження.

Теорема 4. Нехай виконуються накладені в п. 1 умови на простори V,H та сім'ю операторів $A(t):V\to V'$, $t\in S$, а оператори B,N,C визначені в п. 2. Крім того, припустимо, що $g\in L^{2}_{\omega,1/\alpha}(S;V')$, $-\lambda<\omega\leq 0$, і виконуються умови **R** та (3.29). Тоді оптимальне керування u в задачі (2.5) характеризується співвідношеннями

$$\frac{dy(t;u)}{dt} + A(t)y(t;u) = y(t) + (Bu)(t), \quad t \in S, \tag{4.23}$$

$$e^{\omega \int_0^t \alpha(s)ds} \mid y(t) \mid \to 0 \quad \text{ЬТх} \quad t \to -\infty, \tag{4.24}$$

$$-\frac{dp(t;u)}{dt} + A^*(t)p(t;u) = (C^*\Lambda(Cy(u) - z_0))(t), \ t \in S, \tag{4.25}$$

$$p(0;u) = 0, \tag{4.26}$$

$$(\Lambda_u^{-1}B^*p(u) + Nu, v - u) \geq 0 \ \ \forall v \in U_\partial, \tag{4.27}$$

$$y(u) \in L^2_{\omega,\alpha}(S : V), \ \ p(u) \in L^2_{\omega,\alpha}(S;V) \cap C_b(S;H). \tag{4.28}$$

---

1. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными/ Ж.-Л. Лионс. – М., 1972.
2. *Болтянский В.Г.* Математические методы оптимального управления/ Болтянский В.Г. – М., 1969.
3. *Hestenes M.R.* Calculus of variations and optimal control theory/ Hestenes M.R. – Wiley, 1966.
4. *Balakrishnan V.* Semigroup theory and control theory/ Balakrishnan V. – Washington, 1965.
5. *Бутковский А.Г.* Методы управления системами с распределёнными параметрами / Бутковский А.Г. – М., 1975.
6. *Згуровский М.З.* Нелинейный анализ и управления бесконечномерными системами/ М.З. Згуровский, В.С. Мельник - К., 1999.
7. *Згуровский М.З.* Прикладные методы анализа и управления нелинейными процессами и полями / Згуровский М.З., Мельник В.С., Новиков А.Н. - К., 2004.
8. *Бокало Н.М.* О задаче без начальных умов для некоторых классов нелинейных параболических уравнений/Бокало Н.М. // Труды семинара им. И.Г.Петровского (М.: Изд-во Моск. ун-та). – 1989. – Вып. 14. – С.3-32.
9. *Bokalo M.* Linear evolution first-order problems without initial conditions / Mykola Bokalo and Alfredo Lorenzi // Milan Journal of Mathematics. - 2009. - Vol. 77. - 437-494.
10. *Shovalter R.E.* Hilbert space methods for partial differential equations/ R.E. Shovalter. - Monographs and studies in mathematics (Monographs in differential equations), Vol. 1, Pitman, London, 1977.

11. *Shovalter R.E.* Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations /R.E.Shovalter. - American Mathematical Soiety: Mathematical surveys and monographs, Vol. 49. 1997.

12. *Х. Гаевский, К. Грёгер, К. Захариас.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.,1978.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЭВОЛИЦИОННЫМИ СИСТЕМАМИ БЕЗ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ

Николай БОКАЛО

Львовский национальный университет имени Ивана Франко, ул. Университетская, 1 79000 Львов, Украина

Рассмотрено задачу оптимального управления системами, которые описываются эволюционными уравнениями , заданными на полуоси $(-\infty, 0]$. Получено достаточные условия существования единственного решения этой задачи.

Ключевые слова: эволюционное уравнение, оптимальное управление, задачи без начальных условий.

THE OPTIMAL CONTROL PROBLEM OF EVOLUTION SYSTEMS WITHOUT INITIAL CONDITIONS

Mykola BOKALO

Ivan Franko National University of L'viv, Universytetska Str., 1 79000 L'viv, Ukraine

Considered problem of the optimal control of systems governed by evolution equations, defined on time interval $(-\infty, 0]$. Obtained enough conditions for the existence of a unique solution of this problem.

Key words: evolution equation, optimal control, problems without initial conditions.

Стаття надійшла до редколегії 16.03.2010
Прийнята до друку 22.12.2010