

УДК 539.3

РОЗРАХУНОК ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ ШАРУВАТОЇ АНІЗОТРОПНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ПРИ ЛОКАЛЬНОМУ НАГРІВАННІ ДЖЕРЕЛАМИ ТЕПЛА

Уляна ЖИДИК¹, Мирон НИКОЛИШИН², Володимир ФЛЯЧОК³

¹Національний університет „Львівська політехніка”,
вул. Ст. Бандери, 12 79013 Львів, Україна

²Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С.Підстригача НАН України, вул. Наукова, 36 79053 Львів, Україна,

³Українська академія друкарства,
вул. Підголоско, 19 79020 Львів, Україна

Для неоднорідних анізотропних циліндричних оболонок записано нестационарні рівняння термопружності й теплопровідності з відповідними крайовими умовами. Методами інтегральних перетворень Фур'є і Лапласа знайдено розв'язок динамічної задачі термопружності для скінченної шарнірно опертої ортогонально армованої оболонки антисиметричної структури при локальному нагріванні.

Ключові слова: оболонка, циліндрична, анізотропна, шарувата, термопружність, джерела тепла.

Композитні циліндричні оболонки як важливі елементи сучасних конструкцій часто піддаються дії швидкозмінних температурних полів. Тому розрахунок таких конструкцій є важливою науковою задачею. Дослідження у цьому напрямі здебільшого стосувались однорідних оболонок із ізотропного або слабо анізотропного матеріалу [1-3]. Однак використання композитних матеріалів з високою анізотропією фізико-механічних характеристик потребує використання розширених моделей розрахунку оболонок.

Мета статті – дослідити термопружний стан ортогонально армованих шаруватих анізотропних кругових циліндричних оболонок скінченної довжини, які нагріваються локально розподіленими температурними джерелами. Для дослідження використали модель неоднорідних анізотропних оболонок [4], яка враховує фізико-механічні характеристики анізотропного матеріалу у трансверсальному напрямі.

Формулювання задачі та метод розв'язування. Розглянемо багат шарову кругову циліндричну оболонку сталої товщини $2h$, складену зі скінченної кількості ідеально скріплених між собою тонких композитних шарів з однаковою товщиною, які армовані волокнами в одному напрямі. Матеріал шарів вважатимемо однорідним і ортотропним, що характеризується ефективними модулями. Осі ортотропії кожного шару (напрями волокон) орієнтовані під кутом 0° або 90° до осі оболонки (ортогонально армована оболонка). Точки простору оболонки віднесемо до ортогональної системи координат x, θ, z , де x – осьова; θ – кругова; z – радіальна координати.

Початок координат помістимо у середній поверхні з радіусом R . Цим координатам надалі відповідатимуть індекси 1, 2, 3, а кома перед індексами 1, 2 позначатиме частинні похідні за аргументами \mathbf{x} і θ , відповідно.

Нехай оболонка перебуває під дією зовнішнього силового навантаження, а також нагрівається джерелами тепла і зовнішнім середовищем через конвективний теплообмін. Термопружну поведінку такої оболонки дослідимо на підставі рівнянь руху в узагальнених переміщеннях \mathbf{u}_i, γ_i ($i = 1, 2, 3$), які запишемо в операторній формі

$$\sum_p^6 L_{sp} y_p = \mathbf{h}_s \quad (s, p = 1, 2, \dots, 6), \quad (1)$$

де $y_i = \mathbf{u}_i, y_{3+i} = \gamma_i$ ($i = 1, 2, 3$); $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ - переміщення серединної поверхні; γ_1, γ_2 - кути повороту нормалі; γ_3 - нормальна деформація; диференціальні оператори L_{rk} ($L_{rk} = L_{kr}$) і вільні члени \mathbf{h}_r набувають вигляду:

$$\begin{aligned} L_{11} &= (A_{11} + B_{11}/R) 0_{,11} + (A_{66} + D_{66}/R^2)/R^2 0_{,22} - \rho_1 \mathcal{G}, \\ L_{12} &= (A_{12} + A_{66})/R 0_{,12}; \quad L_{13} = A_{12}/R 0_{,1}; \quad L_{16} = (A_{13} + B_{13}/R) 0_{,1}; \\ L_{14} &= (B_{11} + D_{11}/R) 0_{,11} - D_{66}/R^3 0_{,22} - \rho_2 \mathcal{G}, \quad L_{15} = 0; \quad L_{24} = 0; \\ L_{22} &= A_{66} 0_{,11} + (A_{22} - B_{22}/R + D_{22}/R^2)/R^2 0_{,22} - \\ &\quad - k'(A_{44} - B_{44}/R + D_{44}/R^2)/R^2 0 - \rho_1 \mathcal{G}, \\ L_{23} &= (A_{22} + k'A_{44} - (B_{22} + k'B_{44})/R + (D_{22} + k'D_{44})/R^2)/R^2 0_{,2}; \\ L_{25} &= D_{66}/R 0_{,11} + (B_{22} - D_{22}/R)/R^2 0_{,22} + \frac{k'}{R}(A_{44} - B_{44}/R + D_{44}/R^2) 0 - \rho_2 \mathcal{G}, \\ L_{26} &= (A_{23} + (B_{22} + k'B_{44})/R - (D_{22} + k'D_{44})/R^2)/R 0_{,2}; \\ L_{33} &= -k'(A_{55} + B_{55}/R) 0_{,11} - k'(A_{44} - B_{44}/R + D_{44}/R^2)/R^2 0_{,22} + \\ &\quad + (A_{22} - B_{22}/R + D_{22}/R^2)/R^2 0 + \rho_1 \mathcal{G}, \quad L_{34} = -(k'A_{55} + k'B_{55}/R) 0_{,1}; \\ L_{35} &= -(k'A_{44} - (k'B_{44} + B_{22})/R + (k'D_{44} + D_{22})/R^2)/R 0_{,2}; \\ L_{36} &= -k'(B_{55} + D_{55}/R) 0_{,11} - k'(B_{44} - D_{44}/R)/R^2 0_{,22} + \\ &\quad + (A_{23} + B_{22}/R - D_{22}/R^2)/R 0 + \rho_2 \mathcal{G}, \quad L_{45} = (D_{12} + D_{66})/R 0_{,12}; \\ L_{44} &= D_{11} 0_{,11} + D_{66}/R^2 0_{,22} - k'(A_{55} + B_{55}/R) 0 - \rho_3 \mathcal{G}, \\ L_{46} &= (B_{13} - k'B_{55} + (D_{12} + D_{13} - k'D_{55})/R) 0_{,1}; \\ L_{66} &= -k'D_{55} 0_{,11} - k'D_{44}/R^2 0_{,22} + (A_{33} + (B_{33} + 2B_{23})/R + D_{22}/R^2) 0 + \rho_3 \mathcal{G}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_1 &= (\mathbf{A}_{11}^t + \mathbf{B}_{11}^t/\mathbf{R})\mathbf{T}_{1,1} + (\mathbf{B}_{11}^t + \mathbf{D}_{11}^t/\mathbf{R})\mathbf{T}_{2,1}/\mathbf{h} - \mathbf{q}_1; \\
\mathbf{b}_2 &= \mathbf{A}_{22}^t \mathbf{T}_{1,2}/\mathbf{R} + \mathbf{B}_{22}^t \mathbf{T}_{2,2}/(\mathbf{R}\mathbf{h}) - \mathbf{q}_2; \\
\mathbf{b}_3 &= \mathbf{A}_{22}^t \mathbf{T}_1/\mathbf{R} + \mathbf{B}_{22}^t \mathbf{T}_2/(\mathbf{R}\mathbf{h}) + \mathbf{q}_3; \\
\mathbf{b}_4 &= (\mathbf{B}_{11}^t + \mathbf{D}_{11}^t/\mathbf{R})\mathbf{T}_{1,1} + (\mathbf{D}_{11}^t + \mathbf{F}_{11}^t/\mathbf{R})\mathbf{T}_{2,1}/\mathbf{h} - \mathbf{m}_1; \\
\mathbf{b}_5 &= \mathbf{B}_{22}^t \mathbf{T}_{1,2}/\mathbf{R} + \mathbf{D}_{22}^t \mathbf{T}_{2,2}/(\mathbf{R}\mathbf{h}) - \mathbf{m}_2; \\
\mathbf{b}_6 &= (\mathbf{A}_{33}^t + \mathbf{B}_{22}^t/\mathbf{R})\mathbf{T}_1 + (\mathbf{D}_{33}^t/\mathbf{R} + \mathbf{D}_{22}^t/\mathbf{R})\mathbf{T}_2/\mathbf{h} + \mathbf{m}_3.
\end{aligned}$$

Тут і далі позначення відповідають праці [5].

Інтегральні характеристики температури $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2$, що входять у вільні члени системи (1), повинні бути визначені з рівнянь теплопровідності, які запишемо для випадку однакових умов теплообміну на поверхнях $\mathbf{z} = \pm\mathbf{h}$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{(2)}^2 \mathbf{T}_1 + \mathbf{P}_{(3)}^2 \mathbf{T}_2 - \lambda_{33}^{(1)} \mathbf{T}_2/\mathbf{h}^2 + \lambda_{33}^{(2)} \mathbf{T}_2/(\mathbf{R}\mathbf{h}) - \mathbf{C}^{(2)} \mathbf{T}_1^t - \mathbf{C}^{(3)} \mathbf{T}_2^t - \mathbf{T}_2 \varepsilon_1^t = -\mathbf{W}_2^t; \\
\mathbf{P}_{(1)}^2 \mathbf{T}_1 + \mathbf{P}_{(2)}^2 \mathbf{T}_2 + \lambda_{33}^{(1)} \mathbf{T}_2/(\mathbf{R}\mathbf{h}) - \mathbf{C}^{(1)} \mathbf{T}_1^t - \mathbf{C}^{(2)} \mathbf{T}_2^t - (\mathbf{T}_1 - \mathbf{t}_1^t) \varepsilon_1^t = -\mathbf{W}_1^t. \quad (2)
\end{aligned}$$

Для однозначності розв'язку систем рівнянь руху (1) і теплопровідності (2) задамо такі граничні умови на краях $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ і $\mathbf{x} = \mathbf{l}$:

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_2 = \mathbf{0}; \quad \gamma_3 = \gamma_2 = \mathbf{0}; \quad \mathbf{N}_{11} = \mathbf{M}_{11} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2 = \mathbf{0} \quad (3)$$

й однорідні початкові умови. Починаючи з часу $\tau > \mathbf{0}$, оболонка нагрівається джерелами тепла, які експоненціально розподілені по області $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leq \mathbf{d}, |\theta| \leq \eta$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{W}_1^t \\ \mathbf{W}_2^t \end{Bmatrix} (\mathbf{x}, \theta, \tau) = \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_t^* \\ \bar{\mathbf{w}}_t^* \end{Bmatrix} \frac{\mathbf{a}^* + \mathbf{b}^* e^{-k^* \tau}}{4\mathbf{d}\eta\mathbf{R}} e^{-\mathbf{r}_1 |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} e^{-\mathbf{r}_2 |\theta|} \mathbf{N}(\mathbf{x}) \mathbf{N}(\theta), \quad (4)$$

де $\mathbf{N}(\mathbf{x}) = \mathbf{S}_-(\mathbf{x} - (\mathbf{x}_0 - \mathbf{d})) - \mathbf{S}_+(\mathbf{x} - (\mathbf{x}_0 + \mathbf{d}))$; $\mathbf{N}(\theta) = \mathbf{S}_-(\theta + \eta) - \mathbf{S}_+(\theta - \eta)$; $\mathbf{S}_{\pm}(\mathbf{x})$ – асиметричні одиничні функції; $\mathbf{w}_t^*, \bar{\mathbf{w}}_t^*$ – потужності теплових джерел, причому \mathbf{w}_t^* – відповідає рівномірному розподілу по товщині ("плоске" джерело), а $\bar{\mathbf{w}}_t^*$ – лінійному розподілу ("згинне" джерело); \mathbf{x}_0 – осьова координата середини області нагрівання; $2\mathbf{d}$ – її ширина; 2η – кут області нагрівання; $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ і $\mathbf{a}^*, \mathbf{b}^*, \mathbf{k}^*$ – параметри, від яких залежить розподіл джерел тепла по координатах і в часі відповідно.

Розв'язок систем диференціальних рівнянь (1) і (2) з урахуванням функцій розподілу джерел тепла (4) знаходимо методом скінчених інтегральних перетворень Фур'є за координатами і методом інтегрального

перетворення Лапласа за часом відповідно до граничних умов (3) і однорідних початкових умов.

Аналіз числових результатів і висновки. Числові дослідження проводили для шаруватих циліндричних оболонок антисиметричної структури двох типів: двошарової ($0/90^\circ$) і чотиришарової ($0/90^\circ/0/90^\circ$), а також однорідної (нескінчена кількість шарів) за таких значень параметрів: $\nu_{21} = \nu_{31} = 0,25$; $G_{23} = 0,2E_2$; $E_2 = E_3 = 0,05E_1$; $G_{12} = G_{13} = 0,5E_2$; $\alpha_{22}^f = \alpha_{33}^f = 5\alpha_{11}^f$; $\lambda_{22} = \lambda_{33} = 0,5\lambda_{11}$; $h/R = 0,05$; $a^* = 1$; $b^* = 0$; $r_1 = r_2 = 0$; $I/R = 3$; $d/I = 0,05$; $\eta = \pi/2$; $x_0 = I/2$.

Обчислено максимальні значення безрозмірних прогинів, нормальних зусиль і згинних моментів залежно від колової координати θ при значенні поздовжньої координати $x = I/2$ (рис. 1-5). Суцільні лінії на рисунках відповідають двошаровій оболонці, штрихпунктирні – чотиришаровій, а штрихові – однорідній оболонці.

Із аналізу числових результатів і рисунків видно, що неоднорідність матеріалу може змінювати не лише кількісну картину напружено-деформованого стану (наприклад, для w' , N'_1 ,

N'_2 , M'_2), а й якісну (наприклад, для M'_1).

Прогини найбільші в центрі зони нагрівання, а потім плавно зменшуються до нуля в напрямі твірної і змінюють знак при переході від нагрітої зони до ненагрітої в напрямі напрямної.

Збільшення кількості шарів призводить до зменшення величини максимального прогину, тобто до збільшення ефективної жорсткості

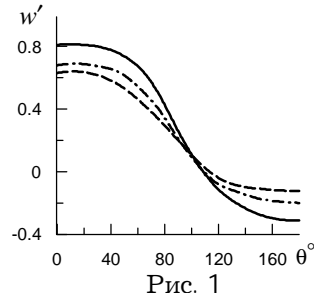


Рис. 1

оболонки. Прогини також зменшуються зі збільшенням тепловіддачі. Зусилля N'_1 розтягувальне всюди вздовж твірної $\theta = 0$, але коливається між розтягувальним і стискувальним вздовж напрямної $x = I/2$. Варто

зауважити, що зусилля N'_1 порівняно з іншими параметрами напруженого стану має характерну особливість, яка полягає в тому, що в пограничній зоні між нагрітою і ненагрітою областями досягаються однакові за величиною максимальні стискувальні і максимальні розтягувальні значення.

Зусилля N'_2 також має коливний характер від максимальних стискувальних в області дії теплових джерел до максимальних розтягувальних поза цією зоною, але стискувальні зусилля значно більші, ніж розтягувальні. Характер поведінки згинних моментів також коливний. Максимум необов'язково досягається в центрі дії теплового джерела. Вплив неоднорідності на напружено-деформований стан оболонки суттєво залежить від ступеня анізотропії матеріалу шарів.

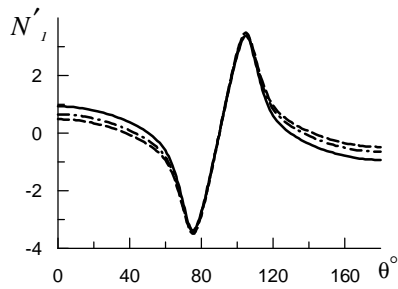


Рис. 2

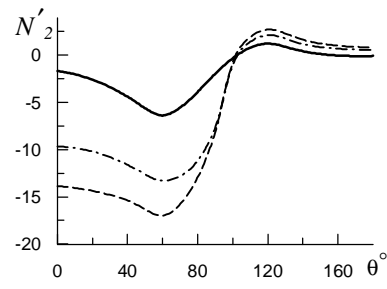


Рис. 3

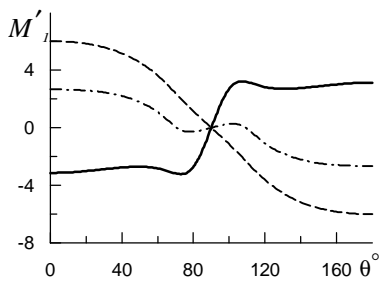


Рис. 4

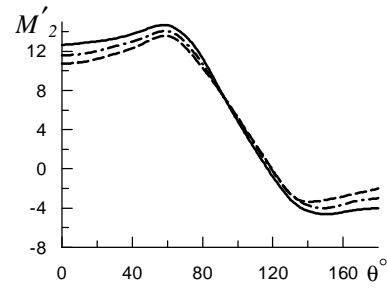


Рис. 5

Наприклад, значення прогинів w' , обчислених в центрі дії теплового джерела для двошарової оболонки, порівняно з однорідною, збільшуються: при $E_1/E_3 = 20$, $\alpha_{33}^t/\alpha_{11}^t = 5$ на 22%, а при $E_1/E_3 = 20$, $\alpha_{33}^t/\alpha_{11}^t = 10$ — уже на 40%. Вплив неоднорідності також збільшується зі збільшенням ширини смуги нагрівання тепловими джерелами.

1. Подстригач Я. С. Термоупругость тонких оболочек / Я. С. Подстригач, Р. Н. Швец. — К., 1978.
2. Василенко А. Т. К определению температурных напряжений в слоистых анизотропных оболочках по уточненной теории / А. Т. Василенко, Г. П. Голуб, Я. М. Григоренко / Докл. АН УССР. Сер. А. — 1977. — № 4. — С. 327-330.
3. Shirakawa K. Dynamic response of an orthotropic cylindrical shell to rapid heating / K. Shirakawa // J. Sound and Vibr. — 1982. — 83, No. 1 — P. 27-35.
4. Жидик У. В. Математичне моделювання термомеханічної поведінки неоднорідних анізотропних оболонок / У. В. Жидик // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. — 2000. — Вип. 57. — С. 72-75.
5. Жидик У. В. Дослідження температурних напружень в ортогонально армованих шаруватих анізотропних циліндричних оболонках / У. В. Жидик // Прикл. проблеми механіки і математики. — 2006. — Вип. 4. — С. 139-145.

**РАСЧЕТ ТЕРМОУПРУГОГО СОСТОЯНИЯ СЛОИСТОЙ
АНИЗОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ
ЛОКАЛЬНОМ НАГРЕВЕ ИСТОЧНИКАМИ ТЕПЛА**

Уляна ЖЫДИК¹, Мирон НИКОЛЬШИН², Владимир ФЛЯЧОК³

¹Национальный университет „Львовская политехника“,
ул. Ст. Бандеры, 12 79013 Львов, Украина

²Институт прикладных проблем механики и математики
и.м. Я.С.Подстригача НАН Украины, ул. Наукова, 3б 79053 Львов, Украина,

³Украинская академия печати,
ул. Пидголоско, 19, 79020 Львов, Украина

Методами интегральных преобразований Фурье и Лапласа найдено решение динамической задачи термоупругости для конечной шарнирно опертой оболочки антисимметрической структуры при локальном нагреве.

Ключевые слова: оболочка, термоупругость, анизотропия, источники тепла.

ANALYSIS OF THERMOELASTIC STATE OF LAMINATED ANISOTROPIC
CYLINDRICAL SHELL UNDER LOCALIZED HEAD SOURCES

Myron NYKOLYSHYN¹, Ulyana ZHYDYK², Volodymyr FLYACHOK³

¹Lviv Polytechnic National University,
12 St. Bandera St., 79013 Lviv, Ukraine

²Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics,
Naukova Str., 3b, 79053 Lviv, Ukraine

³Ukrainian Academy of Printing,
Pidgolosko Str., 19, 79020 Lviv, Ukraine

For heterogeneous anisotropic cylindrical shells the non-stationary equations of thermoelasticity and heat conduction with appropriate boundary conditions are written down. By the integral Fourier and Laplace transformations the solution to dynamic thermoelastic problem for finite freely supported shell possessing antisymmetric cross-ply laminates under local heating is obtained.

Key words: shell, cylindrical, anisotropic, laminated, thermoelasticity, head sources.

Стаття надійшла до редколегії 12.11.2009

Прийнята до друку 22.12.2010