ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат. 2010. Вип. 73. С.63-70 Ser. Mech-Mat. 2010. Vol. 73. P.63-70

УДК 539.3

ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТРИВИМІРНОЇ ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ НЕОДНОРІДНОГО ПРОСТОРУ

Юрій ТОКОВИЙ
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3б 79053 Львів, Україна

Запропоновано методику зведення тривимірної задачі термопружності для неоднорідного в одному з координатних напрямів простору до інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду.

Ключові слова: тривимірна задача термопружності, неоднорідний простір, інтегральні рівняння.

Вступ. Відомі на сьогодні методи розв'язування задач теорії пружності й термопружності для неоднорідних тіл здебільшого полягають у застосуванні наближених чи варіаційних підходів; використанні лінеаризаційних алгоритмів; моделюванні неперервно-неоднорідного тіла багатошаровим композитом; розвитку методів, які ефективні лише для деяких конкретних способів задавання розподілів неоднорідності; застосуванні числових методів тощо [1,2]. Проте наведені підходи не можуть задовольнити сучасні потреби у цій галузі, позаяк визначення напружено-деформованого стану не є кінцевою метою досліджень, а лише проміжним етапом, який повинен надати зручний для аналізу розв'язок прямої задачі.

Більшість відомих на сьогодні методів розв'язування тривимірних задач теорії пружності та термопружності для неоднорідних тіл зорієнтовані на постановку у переміщеннях [3,4]. У [5] вихідні рівняння задачі теорії пружності для неоднорідного в одному з просторових напрямів простору зведено до визначальних інтегродиференціальних рівнянь у деформаціях, на підставі яких проаналізовано деякі часткові випадки неоднорідності. Низку підходів щодо розв'язання тривимірних задач для неоднорідного простору, півпростору та шару запропоновано та розвинуто у працях [6-9 та ін.].

Наша праця присвячена розвитку методу прямого інтегрування, який запропонував В.М. Вігак [10] щодо побудови загальних розв'язків тривимірних задач теорії пружності й термопружності в напруженнях для простору, що є неоднорідним за одним із просторових напрямів. Метод ґрунтується на зведенні цих задач до інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду. Для їхнього розв'язання пропонують застосовувати метод резольвенти, внаслідок чого розв'язки вихідних задач знаходять у явному вигляді [11].

Формулювання задачі. У тривимірному формулюванні квазістатична задача термопружності для неоднорідного простору $\boldsymbol{D} = \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in (-\infty,\infty)^3\}$ у системі безрозмірних декартових координат

$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ полягає у визначенні компонент вектора переміщень $\boldsymbol{u}_\eta$, тензора деформації $\boldsymbol{e}_\eta, \boldsymbol{e}_{\eta\xi}$ та напружень $\sigma_\eta, \sigma_{\eta\xi}$ $(\eta,\xi = \{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\},\ \ \eta \neq \xi)$ на підставі [12] рівнянь рівноваги

$$\frac{\partial\sigma_{\boldsymbol{x}}}{\partial\boldsymbol{x}} + \frac{\partial\sigma_{\boldsymbol{xy}}}{\partial\boldsymbol{y}} + \frac{\partial\sigma_{\boldsymbol{xz}}}{\partial\boldsymbol{z}} + \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{x}} = 0 \text{ і т.д.,} \tag{1}$$

співвідношень Коші

$$\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}} = \frac{\partial\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{x}}}{\partial\boldsymbol{x}} \quad \text{і т.д.} \qquad \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{xy}} = \frac{\partial\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{x}}}{\partial\boldsymbol{y}} + \frac{\partial\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{y}}}{\partial\boldsymbol{x}} \quad \text{і т.д.} \tag{2}$$

та фізичних співвідношень

$$\boldsymbol{E}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}} = \sigma_{\boldsymbol{x}} - \nu(\sigma_{\boldsymbol{y}} + \sigma_{\boldsymbol{z}}) + \alpha\boldsymbol{E}\boldsymbol{T} \ \text{ і т.д.,}\ \boldsymbol{G}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{xy}} = \sigma_{\boldsymbol{xy}} \ \text{ і т.д.} \tag{3}$$

Тут $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{z}), \nu = \nu(\boldsymbol{z}),\ \boldsymbol{G} = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{z}), \alpha = \alpha(\boldsymbol{z})$ – відповідно аналоги модуля Юнга, коефіцієнта Пуассона, модуля зсуву та коефіцієнта лінійного температурного видовження; $\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{y}}, \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{z}}$ – проекції масових сил у розмірності напружень на осі координат x, y, z; $\boldsymbol{T}$ – задане квазістаціонарне температурне поле. Тут і надалі помітка "і т.д." означає отримання аналогічних рівнянь за допомогою циклічної перестановки індексів. Ми розглядатимемо такі масові сили й температурне поле, які згасають під час прямування до безмежності за кожним з координатних напрямів. Вважатимемо, що характеристики матеріалу не виходять за межі, визначені у теорії пружності.

Рівняння суцільності в деформаціях, які отримав Сен-Венан у 1864 р., набувають вигляду

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{y}}}{\partial\boldsymbol{x}^2} + \frac{\partial^2\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}}}{\partial\boldsymbol{y}^2} = \frac{\partial^2\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{xy}}}{\partial\boldsymbol{x}\partial\boldsymbol{y}} \ \text{ і т.д.} \tag{4}$$

та

$$2\frac{\partial^2\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{z}}}{\partial\boldsymbol{x}\partial\boldsymbol{y}} = \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{z}}\left(\frac{\partial\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{yz}}}{\partial\boldsymbol{x}} + \frac{\partial\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{zx}}}{\partial\boldsymbol{y}} - \frac{\partial\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{xy}}}{\partial\boldsymbol{z}}\right) \text{ і т.д.} \tag{5}$$

Р.В. Саусвелл показав [13], що за використання функцій Максвелла застосування варіаційного принципу Кастільяно призводить до отримання лише рівнянь (4). Якщо ж використати функції Морери, то аналогічно отримують рівняння (5). Коментуючи цей результат, названий "парадоксом Саусвелла", Дж.І. Тейлор виявив, що для однозначного визначення переміщень в однозв'язному тілі необхідно і достатньо лише рівнянь (4) або лише рівнянь (5) без жодних додаткових умов [13, с. 212]. У відповідь на це Саусвелл навів доведення того, що усі шість рівнянь (4), (5) є необхідними, використовуючи комбінації функцій Максвелла та Морери. Проте окремі елементи його доведення були недостатньо переконливими [14], що спонукало до подальших досліджень цього питання. У [14] з використанням тотожностей Біанкі показано таке: якщо в обмеженому однозв'язному тілі V з межею S рівняння (4) виконуються в об'ємі V, а рівняння (5) на межі S, то рівняння (5) виконуються і в об'ємі V. І навпаки, якщо рівняння (5) виконуються в об'ємі V, а рівняння (4) на межі S, то (4) виконуються і в об'ємі V. У підсумку К. Вашіцу висловив тезу про те, що в обмежених тілах одна з груп рівнянь, наприклад (4), повинна слугувати за визначальні рівняння, тоді як іншу групу, (5), приймають як додаткові умови на межі тіла. У [15] на підставі інтегрування рівнянь (2) визначено кількість способів виведення рівнянь суцільності в деформаціях. Аналогічні дослідження проведено у [16], де також подано огляд праць, присвячених цьому питанню. Оскільки у нашому випадку простір $\boldsymbol{D}$ є необмеженою областю, то ми можемо обмежитися будь-якою з груп рівнянь (4), (5). Для нашого підходу зручнішим є використання рівнянь (4) [10].

Зведення задачі до ключових рівнянь. З використанням рівнянь (1), (3) та формули $\sigma = \sigma_{\boldsymbol{x}} + \sigma_{\boldsymbol{y}} + \sigma_{\boldsymbol{z}}$, подамо рівняння суцільності (4) у напруженнях

$$\begin{gathered}\Delta\sigma_{\boldsymbol{z}} = \frac{1}{1+\nu}\Delta_{\boldsymbol{xy}}(\sigma + \alpha\boldsymbol{E}\boldsymbol{T}) - \frac{\partial \boldsymbol{F_z}}{\partial \boldsymbol{z}} - \frac{\partial \boldsymbol{F_x}}{\partial \boldsymbol{x}} - \frac{\partial \boldsymbol{F_y}}{\partial \boldsymbol{y}},\\ \Delta\left(\frac{\sigma_\eta}{2\boldsymbol{G}}\right) = \Delta\left(\frac{\nu\sigma}{\boldsymbol{E}} - \alpha\boldsymbol{T}\right) - \frac{1}{\boldsymbol{E}}\frac{\partial^2\sigma}{\partial\eta^2} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{z}}\left(\frac{1}{\boldsymbol{G}}\right)\frac{\partial\sigma_{\eta\boldsymbol{z}}}{\partial\eta} - \frac{1}{\boldsymbol{G}}\frac{\partial \boldsymbol{F}_\eta}{\partial\eta} - \alpha\frac{\partial^2\boldsymbol{T}}{\partial\eta^2}, \quad \eta = \{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\},\end{gathered} \tag{6}$$

де $\Delta = \partial^2/\partial\boldsymbol{x}^2 + \partial^2/\partial\boldsymbol{y}^2 + \partial^2/\partial\boldsymbol{z}^2$, $\sigma = \sigma_{\boldsymbol{x}} + \sigma_{\boldsymbol{y}} + \sigma_{\boldsymbol{z}}$,

$\Delta_{\boldsymbol{xy}} = \partial^2/\partial\boldsymbol{x}^2 + \partial^2/\partial\boldsymbol{y}^2$.

Рівняння (6) визначають нормальні компоненти тензора напружень $\sigma_{\boldsymbol{x}}, \sigma_{\boldsymbol{y}}$ і $\sigma_{\boldsymbol{z}}$ у термінах першого інваріанта σ та відповідних дотичних напружень. Додавши ці рівняння, отримаємо ще одне –

$$\Delta\left(\frac{1-\nu}{\boldsymbol{E}}\sigma + 2\alpha\boldsymbol{T}\right) = \frac{\sigma_{\boldsymbol{z}}}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\boldsymbol{z}^2}\left(\frac{1}{\boldsymbol{G}}\right) - \boldsymbol{F_z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{z}}\left(\frac{1}{\boldsymbol{G}}\right) - \frac{1}{2\boldsymbol{G}}\left(\frac{\partial\boldsymbol{F_x}}{\partial\boldsymbol{x}} + \frac{\partial\boldsymbol{F_y}}{\partial\boldsymbol{y}} + \frac{\partial\boldsymbol{F_z}}{\partial\boldsymbol{z}}\right), \tag{7}$$

яке виражає перший інваріант тензора напружень через $\sigma_{\boldsymbol{z}}$.

Легко переконатися, що для однорідного матеріалу, тобто, коли пружні властивості не залежать від координати z, рівняння (6), (7) зводяться до отриманих у [10].

Зведення ключових рівнянь до інтегральних рівнянь Вольтерра. Застосуємо до рівнянь (6), (7) інтегральне перетворення Фур'є [10]

$$\overline{\varphi}(\boldsymbol{z}) \equiv \overline{\varphi}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{p};\boldsymbol{z}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}(sx+py)}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{i}^2 = -1, \tag{8}$$

де $\boldsymbol{s},\boldsymbol{p}$ – відповідно, параметри перетворення за змінною x та y. У підсумку отримаємо

$$
\begin{aligned}
\bar{\Delta}\bar{\sigma}_{\boldsymbol{z}} &= -\frac{\boldsymbol{k}^2}{1+\nu}\left[\bar{\sigma} + \alpha\boldsymbol{E}\bar{\boldsymbol{T}}\right] + \Phi, \bar{\Delta}\left[\frac{1-\nu}{\boldsymbol{E}}\bar{\sigma} + 2\alpha\bar{\boldsymbol{T}}\right] = \frac{\bar{\sigma}_{\boldsymbol{z}}}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\boldsymbol{z}^2}\left(\frac{1}{\boldsymbol{G}}\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{z}}\left(\frac{\bar{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{z}}}{\boldsymbol{G}}\right) - \frac{\Phi}{2\boldsymbol{G}},\\
\bar{\Delta}\left[\frac{\bar{\sigma}_{\boldsymbol{y}}}{2\boldsymbol{G}}\right] &= \bar{\Delta}\left[\frac{\nu\bar{\sigma}}{\boldsymbol{E}} - \alpha\bar{\boldsymbol{T}}\right] + \boldsymbol{p}^2\left(\frac{\bar{\sigma}}{\boldsymbol{E}} + \alpha\bar{\boldsymbol{T}}\right) + \boldsymbol{ip}\bar{\sigma}_{\boldsymbol{yz}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{z}}\left(\frac{1}{\boldsymbol{G}}\right) - \frac{\boldsymbol{ip}}{\boldsymbol{G}}\bar{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{y}},\\
\bar{\Delta}\left[\frac{\bar{\sigma}_{\boldsymbol{x}}}{2\boldsymbol{G}}\right] &= \bar{\Delta}\left[\frac{\nu\bar{\sigma}}{\boldsymbol{E}} - \alpha\bar{\boldsymbol{T}}\right] + \boldsymbol{s}^2\left(\frac{\bar{\sigma}}{\boldsymbol{E}} + \alpha\bar{\boldsymbol{T}}\right) + \boldsymbol{is}\bar{\sigma}_{\boldsymbol{xz}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{z}}\left(\frac{1}{\boldsymbol{G}}\right) - \frac{\boldsymbol{is}}{\boldsymbol{G}}\bar{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{x}}.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Тут $\boldsymbol{k}^2 = \boldsymbol{s}^2 + \boldsymbol{p}^2$; $\bar{\Delta} = \mathrm{d}^2/\mathrm{d}z^2 - k^2$; $\Phi = i\left(s\bar{F}_x + p\bar{F}_y\right) - \mathrm{d}\bar{F}_z/\mathrm{d}\,z$.

Перше та друге рівняння системи (9) містять лише дві з шуканих функцій, а саме $\bar{\sigma}_{\boldsymbol{z}}$ та $\bar{\sigma}$. Загальні розв'язки цих двох рівнянь нескладно знайти у вигляді

$$
\begin{aligned}
\bar{\sigma}(\boldsymbol{z}) = \frac{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{z})}{1-\nu(\boldsymbol{z})}\Bigg[&-2\alpha(\boldsymbol{z})\bar{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{z}) + \frac{1}{2|\boldsymbol{k}|}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\frac{\bar{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{z}}(\xi)}{\boldsymbol{G}(\xi)}\right)\boldsymbol{e}^{-|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{z}-\xi|}\mathrm{d}\xi + \\
&+\frac{1}{4|\boldsymbol{k}|}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\Phi(\xi)}{\boldsymbol{G}(\xi)} - \bar{\sigma}_{\boldsymbol{z}}(\xi)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2}\left(\frac{1}{\boldsymbol{G}(\xi)}\right)\right]\boldsymbol{e}^{-|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{z}-\xi|}\mathrm{d}\xi\Bigg],
\end{aligned}
\tag{10}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{z}) = &\frac{|\boldsymbol{k}|}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha(\eta)\boldsymbol{E}(\eta)}{1+\nu(\eta)}\bar{\boldsymbol{T}}(\eta)\boldsymbol{e}^{-|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{z}-\eta|}\mathrm{d}\eta - \\
&-\frac{1}{2|\boldsymbol{k}|}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\eta)\boldsymbol{e}^{-|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{z}-\eta|}\mathrm{d}\eta + \frac{|\boldsymbol{k}|}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\bar{\sigma}(\eta)\boldsymbol{e}^{-|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{z}-\eta|}}{1+\nu(\eta)}\mathrm{d}\eta.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Підставивши (10) в (11), отримаємо інтегральне рівняння для $\bar{\sigma}_{\boldsymbol{z}}$ у вигляді

$$
\bar{\sigma}_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{z}) = \Theta_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{z}) + \Psi_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{z}) + \int_{-\infty}^{\infty}\bar{\sigma}_{\boldsymbol{z}}(\xi)\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{z},\xi)\mathrm{d}\xi,
\tag{12}
$$

де

$$
\begin{aligned}
\Theta_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{z}) &= -\frac{|\boldsymbol{k}|}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha(\eta)\boldsymbol{E}(\eta)\bar{\boldsymbol{T}}(\eta)\boldsymbol{e}^{-|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{z}-\eta|}}{1-\nu(\eta)}\mathrm{d}\eta,\\
\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{z},\xi) &= -\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2}\left(\frac{1}{\boldsymbol{G}(\xi)}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\boldsymbol{G}(\eta)\boldsymbol{e}^{-|\boldsymbol{k}|(|\boldsymbol{z}-\eta|+|\eta-\xi|)}}{1-\nu(\eta)}\mathrm{d}\eta,\\
\Psi_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{z}) &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\boldsymbol{G}(\eta)\boldsymbol{e}^{-|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{z}-\eta|}}{1-\nu(\eta)}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\frac{\bar{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{z}}(\xi)}{\boldsymbol{G}(\xi)}\right) + \frac{\Phi(\xi)}{2\boldsymbol{G}(\xi)}\right]\boldsymbol{e}^{-|\boldsymbol{k}||\eta-\xi|}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta.
\end{aligned}
$$

Підстановка (11) у (10) дає змогу визначити інтегральне рівняння

$$
\bar{\sigma}(\boldsymbol{z}) = \Theta(\boldsymbol{z}) + \Psi(\boldsymbol{z}) + \int_{-\infty}^{\infty}\bar{\sigma}(\eta)\boldsymbol{K}(\boldsymbol{z},\eta)\mathrm{d}\eta,
\tag{13}
$$

де

$$\Theta(\boldsymbol{z}) = -\frac{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{z})}{1-\nu(\boldsymbol{z})}\left[2\alpha(\boldsymbol{z})\bar{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{z}) + \frac{1}{4}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2}\left(\frac{1}{\boldsymbol{G}(\xi)}\right)\boldsymbol{e}^{-|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{z}-\xi|}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\alpha(\eta)\boldsymbol{G}(\eta)\bar{\boldsymbol{T}}(\eta)\boldsymbol{e}^{-|\boldsymbol{k}||\xi-\eta|}\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\xi\right],$$

$$\Psi(\boldsymbol{z}) = \frac{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{z})}{2\mid\boldsymbol{k}\mid(1-\nu(\boldsymbol{z}))}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\frac{\bar{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{z}}(\xi)}{\boldsymbol{G}(\xi)}\right) + \frac{\Phi(\xi)}{2\boldsymbol{G}(\xi)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4\mid\boldsymbol{k}\mid}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2}\left(\frac{1}{\boldsymbol{G}(\xi)}\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi(\eta)\boldsymbol{e}^{-|\boldsymbol{k}||\xi-\eta|}\mathrm{d}\eta\right)\boldsymbol{e}^{-|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{z}-\xi|}\mathrm{d}\xi,$$

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{z},\xi) = -\frac{1}{8\mid\boldsymbol{k}\mid}\frac{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{z})}{(1-\nu(\boldsymbol{z}))(1+\nu(\eta))}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2}\left(\frac{1}{\boldsymbol{G}(\xi)}\right)\boldsymbol{e}^{-|\boldsymbol{k}|(|\boldsymbol{z}-\xi|+|\xi-\eta|)}\mathrm{d}\xi.$$

Побудову розв'язків рівнянь Вольтерра (12) та (13) можна проводити різним способом [1,2]. Застосування з цією метою методу резольвенти дає змогу знайти їхні розв'язки у явному вигляді [1,11], тому вважатимемо надалі функції $\bar{\sigma}_{\boldsymbol{z}}$ та $\bar{\sigma}$ відомими.

Тепер варто знайти загальні розв'язки двох останніх рівнянь (9), визначивши з них нормальні компоненти $\bar{\sigma}_{\boldsymbol{x}}$ та $\bar{\sigma}_{\boldsymbol{y}}$. З цією метою спершу вилучимо з цих рівнянь дотичні напруження. За допомогою інтегрування за координатою y формули

$$2\frac{\partial^2\sigma_{\boldsymbol{yz}}}{\partial\boldsymbol{y}\partial\boldsymbol{z}} = \frac{\partial^2\sigma_{\boldsymbol{x}}}{\partial\boldsymbol{x}^2} - \frac{\partial^2\sigma_{\boldsymbol{y}}}{\partial\boldsymbol{y}^2} - \frac{\partial^2\sigma_{\boldsymbol{z}}}{\partial\boldsymbol{z}^2} + \frac{\partial\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{x}}}{\partial\boldsymbol{x}} - \frac{\partial\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{y}}}{\partial\boldsymbol{y}} - \frac{\partial\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{z}}}{\partial\boldsymbol{z}},$$

отриманої з рівнянь рівноваги (1), та застосування до результату інтегрального перетворення (8) із використанням співвідношення $\sigma = \sigma_{\boldsymbol{x}} + \sigma_{\boldsymbol{y}} + \sigma_{\boldsymbol{z}}$ отримаємо рівність

$$\boldsymbol{ip}\bar{\sigma}_{\boldsymbol{yz}}(\boldsymbol{z}) = -\frac{\boldsymbol{s}^2}{4}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\bar{\sigma}(\xi)-\bar{\sigma}_{\boldsymbol{z}}(\xi))\operatorname{sgn}(\boldsymbol{z}-\xi)\mathrm{d}\xi + \frac{\boldsymbol{k}^2}{4}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\bar{\sigma}_{\boldsymbol{y}}(\xi)\operatorname{sgn}(\boldsymbol{z}-\xi)\mathrm{d}\xi -$$

$$-\frac{\mathrm{d}\bar{\sigma}_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{z})}{\mathrm{d}\boldsymbol{z}} + \frac{\boldsymbol{i}}{4}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\boldsymbol{s}\bar{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{x}}(\xi) - \boldsymbol{p}\bar{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{y}}(\xi)\right)\operatorname{sgn}(\boldsymbol{z}-\xi)\mathrm{d}\xi - \frac{\bar{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{z})}{2}, \qquad (14)$$

яка виражає дотичні напруження, наявні в третьому рівнянні (9), через знайдені функції $\bar{\sigma}_{\boldsymbol{z}}$, $\bar{\sigma}$ та шукані у цьому рівнянні напруження $\bar{\sigma}_{\boldsymbol{y}}$. Отож, підстановка (14) у третє рівняння (9) дає змогу визначити інтегральне рівняння для $\bar{\sigma}_{\boldsymbol{y}}$ у вигляді

$$\bar{\sigma}_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{z}) = \Theta_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{z}) + \Psi_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{z}) + \Phi_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{z}) + \int\limits_{-\infty}^{\infty}\bar{\sigma}_{\boldsymbol{y}}(\xi)\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{z},\xi)\mathrm{d}\xi, \qquad (15)$$

де

$$\Theta_y(z) = -2G(z)\left[\alpha(z)\bar{T}(z) + \frac{1}{2\,|\,k\,|}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \alpha(\eta)\bar{T}(\eta)e^{-|k||z-\eta|}d\eta\right],$$

$$\Psi_y(z) = 2G(z)\left[\frac{\nu(z)\bar{\sigma}(z)}{E(z)} - \frac{p^2}{2\,|\,k\,|}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\bar{\sigma}(\eta)}{E(\eta)}e^{-|k||z-\eta|}d\eta + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4\,|\,k\,|}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1}{G(\eta)}\right)\left\{\frac{d\bar{\sigma}_z(\eta)}{d\eta} + \frac{s^2}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\bar{\sigma}(\xi) - \bar{\sigma}_z(\xi)\right)\operatorname{sgn}(\eta-\xi)d\xi\right\}e^{-|k||z-\eta|}d\eta\right],$$

$$\Phi_y(z) = 2G(z)\left[\frac{ip}{2\,|\,k\,|}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\bar{F}_y(\eta)}{G(\eta)}e^{-|k||z-\eta|}d\eta + \frac{1}{4\,|\,k\,|}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1}{G(\eta)}\right)\left\{\bar{F}_z(\eta) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{i}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(s\bar{F}_x(\xi) - p\bar{F}_y(\xi)\right)\operatorname{sgn}(z-\xi)d\xi\right\}e^{-|k||z-\eta|}d\eta\right],$$

$$K_y(z,\xi) = -G(z)\frac{|\,k\,|}{4}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1}{G(\eta)}\right)e^{-|k||z-\eta|}\operatorname{sgn}(\eta-\xi)d\eta.$$

Рівняння (15) є інтегральним рівнянням Вольтерра, яке аналогічне до (12), (13). Для його розв'язання та визначення $\bar{\sigma}_y$ можна застосувати методику [11].

Аналогічно виконують пошук напружень $\bar{\sigma}_x$ на підставі останнього рівняння (9) або ж за допомогою рівності $\bar{\sigma}_x = \bar{\sigma} - \bar{\sigma}_y - \bar{\sigma}_z$.

Роботу виконано за фінансової підтримки згідно з ґрантом № 0109U007351 Національної Академії наук України

---

1. *Tokovyy Y.V., Ma C.-C.* Thermal stresses in anisotropic and radially inhomogeneous annular domains // J. Thermal Stresses. – 2008. – 31, № 9. – P. 892-913.

2. *Tokovyy Y.V., Ma C.-C.* Analytical solutions to the planar non-axisymmetric elasticity and thermoelasticity problems for homogeneous and inhomogeneous annular domains // Int. J. Engng. Science. – 2009. – 47, № 3. – P. 325-486.

3. *Колчин Г.Б.* Расчет элементов конструкций из упругих неоднородных материалов. – Кишинев, 1971.

4. *Плевако В. П.* Общие решения в задачах теории упругости неоднородных сред. – Харьков, 1997.

5. *Маковенко С.Я.* Об одном методе решения задач неоднородной теории упругости в деформациях // Прикл. механика. – 1986. – 22, № 1. – С. 40-45.

6. *Пуро А.Э.* Напряженное состояние неоднородного по глубине полупространства // Прикл. механика. – 1988. – 24, № 11. – С. 3-9.

7. *Бородачев А.Н.* Упругое равновесие неоднородного по толщине слоя // Прикл. механика. – 1988. – 24, № 8. – С. 30-36.

8. *Жгенти В.С.* К расчету неоднородных по толщине плит, лежащих на упругом полупространстве // Прикл. механика. – 1988. – 24, № 12. – С. 17-23.

9. *Kashtalyan M., Rushchitsky, J.J.* Revisiting displacement functions in three-dimensional elasticity of inhomogeneous media // Int. J. Solids Struct. – 2009. – 46, № 18-19. – P. 3463-3470.

10. *Вигак В.М., Рычагивский А.В.* Метод прямого интегрирования уравнений трехмерных задач упругости и термоупругости для пространства и полупространства // Прикл. механика. – 2000. – 36, №11. – С. 74–81.

11. *Tokovyy Y., Ma C.-C.* An explicit-form solution to the plane elasticity and thermoelasticity problems for anisotropic and inhomogeneous solids // Int. J. Solids Struct. – 2009. – 46, № 21. – P. 3850-3859.

12. *Лурье А.И.* Пространственные задачи теории упругости. – М., 1955.

13. *Southwell R. V.* Castigliano's principle of minimum strain-energy, and the conditions of compatibility for strain. In S. Timoshenko, 60^{th} Anniversary Volume. – New York: The Macmillan Company, 1938. – P. 211–217

14. *Washizu K.* A note on the conditions of compatibility // J. Math. Phys. – 1957. – 36, № 4. – P. 306-312.

15. *Вігак В. М.* Рівняння суцільності для деформівного твердого тіла // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – 41, № 2. – С. 117—123.

16. *Остросаблин Н.И.* Условия совместности малых деформаций и функции напряжений // Прикл. механика и техн. физика. – 1997. – 38, № 5. – С. 136-146.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ПРОСТРАНСТВА

Юрий ТОКОВЫЙ

Институт прикладных проблем механики и математики им. Я.С.Подстригача НАН Украины, ул. Наукова, 3б 79053 Львов, Украина

Предложена методика сведения пространственной задачи термоупругости для неоднородного в одном из координатных направлений пространстве к интегральным уравнениям Вольтерра второго рода.

Ключевые слова: пространственная задача термоупругости, неоднородное пространство, интегральные уравнения.

INTEGRAL EQUATIONS OF THREE-DIMENSIONAL THERMOELASTICITY PROBLEM FOR INHOMOGENEOUS SPACE

Yuriy TOKOVYY

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, Naukova Str., 3b 79053 Lviv, Ukraine

The technique for reduction of the thee-dimensional thermoelasticity problem for a space, which exhibits inhomogeneous properties in one of the spatial directions, to solution of Volterra integral equations of second kind is proposed.

Key words: three-dimensional thermoelasticity problem, inhomogeneous space, integral equations.

Стаття надійшла до редколегії 12.11.2009
Прийнята до друку 22.12.2010