

УДК: 539.375; 539.4: 536.543.

## АНАЛОГ ЗАДАЧІ ГРІФФІТСА ДЛЯ ПОШИРЕННЯ ПОВЗУЧО-ВТОМНИХ ТРІЩИН

Ірина ДОЛІНСЬКА

*Львівський національний університет імені Івана Франка,  
вул. Університетська 1 79000 Львів, Україна*

На підставі запропонованої раніше автором розрахункової моделі розв'язано задачу про визначення періоду докритичного росту повзучо-втомної тріщини в нескінченній пластині (аналог задачі Гріффітса за циклічного розтягу при високій температурі). Показано, що неврахування вкладу повзучості у докритичному рості повзучо-втомної тріщини може привести до переоцінки залишкової довговічності пластини і до не передбачуваного руйнування.

*Ключові слова:* повзучо-втомна тріщина, повзучість, аналог задачі Гріффітса, циклічний розтяг, енергетичний баланс, залишкова довговічність.

**Вступ.** Відомо, що втрата міцності та вичерпання ресурсу металічних елементів конструкцій при змінних довготривалих навантаженнях і високих температурах проходить шляхом зародження і до критичного росту повзучо-втомних тріщин, особливо, коли такі дефекти вже наявні в матеріалі конструкції. Тому протягом багатьох років не припиняються спроби створити теорії поширення тріщин високотемпературної повзучості в твердих тілах при циклічних навантаженнях.

Ми побудували кінетичне рівняння, яке описує поширення повзучо-втомної тріщини і дає змогу оцінити час її докритичного росту залежно від величини періоду циклу навантаження та початкової її довжини.

**Розрахункова модель.** Розглянемо пластинку послаблену прямолінійною тріщиною початкової довжини  $l_0$ , яка навантажена циклічно з амплітудою  $p$  за високої температури, що спричиняє в зоні передруйнування біля вершини тріщини високотемпературну повзучість (рис.1,а). Задача полягає у визначенні залишкової довговічності пластини  $t = t_*$ . Будемо вважати, що навантаження змінюється в часі, як показано на схемі (рис. 1,б). У цьому разі зовнішні навантаження розтягу з амплітудою  $p$  прикладені так, що напружено-деформований стан буде симетричним стосовно осі розміщення тріщини. Побудуємо кінетичне рівняння, яке допомагає визначити кінетику поширення тріщини і час  $t = t_*$  (кількості циклів навантаження  $N = N_*$ ), коли тріщина підросте до критичного розміру  $l_*$  і пластинка зруйнується.

Розглянемо рівняння енергетичного балансу процесу поширення тріщини на величину  $\Delta l$  [1–4]

$$Q + A_0 = W + G. \quad (1)$$

Тут  $Q = \text{const}$  – величина теплової енергії;  $A_0$  – робота зовнішніх сил;  $W$  – енергія деформування пластини, яку можна подати так [1– 4]:

$$W = W_e + W_p^{(0)}(l) + W_p^{(1)}(t) - W_p^{(2)}(t) - W_p^{(3)}(t) - W_p^{(4)}(t), \quad (2)$$

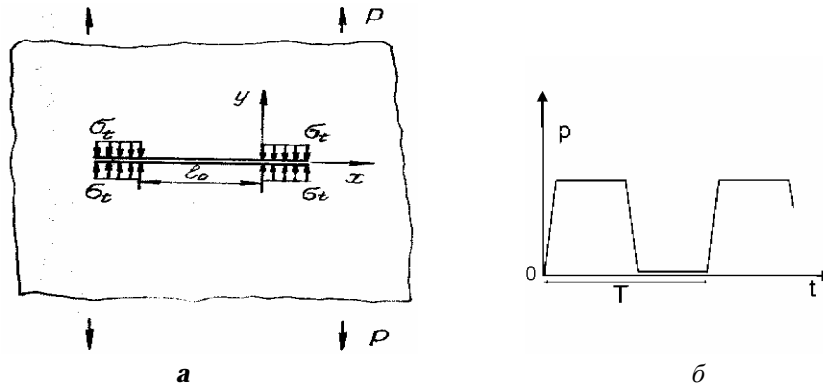


Рис.1. Схеми навантаження пластини з прямолінійною тріщиною (а) і зміни в часі параметра  $p$  зовнішнього навантаження (б)

де  $W_e$  – пружна складова енергії  $W$ ;  $W_p^{(0)}(l)$  – частина роботи пластичних деформацій у зоні передруйнування при її статичному розтязі, яка залежить тільки від довжини тріщини  $l$ ;  $W_p^{(1)}(t)$  – частина роботи пластичних деформацій від зовнішніх зусиль при зростанні навантаження в циклі розтягу зони передруйнування, що залежить від часу  $t$ ;  $W_p^{(2)}(t)$  – частина роботи пластичних деформацій за постійної довжини тріщини під час повзучості зони передруйнування біля вершини тріщини за розтягу, що залежить тільки від часу  $t$ ;  $W_p^{(3)}(t)$  – частина роботи пластичних деформацій під час повзучості при розвантаженні пластини, тобто стискування зони передруйнування, яка також виділяється за постійної довжини тріщини, генерується самою пластиною і залежить тільки від  $t$ ;  $W_p^{(4)}(t)$  – частина роботи пластичних деформацій, яка генерується самою пластиною під час її розвантаження і статичного стискування зони передруйнування;  $\Gamma$  – енергія руйнування пластини, яка залежить тільки від довжини тріщини  $l$ . Виконання співвідношення (1) призводить до виконання такого співвідношення [1]:

$$\partial A_0 / \partial t = \partial W / \partial t + \partial \Gamma / \partial t. \quad (3)$$

Для спрощення формулювання математичної моделі будемо вважати, що  $W_p^{(2)}(t) = W_p^{(3)}(t)$ . Як і в [1–3], рівняння (3) зведемо до такого вигляду:

$$\partial[\Gamma - (A_0 - W_e - W_p^{(0)} - W_p^{(1)})] / \partial l \cdot dl / dt - \partial(W_p^{(4)} + 2W_p^{(3)}) / \partial t = 0. \quad (4)$$

Звідси, аналогічно до [1–4], знайдемо величину  $V = dl/dt$  швидкості зміни довжини тріщини

$$dl/dt = \partial(W_p^{(4)} + 2W_p^{(3)}) / \partial t / (\gamma_{fc} - \gamma_t), \quad (5)$$

де  $\gamma_t$  – питома робота пластичних деформацій в зоні передруйнування у разі росту тріщини;  $\gamma_{fc}$  – її критичне значення.

Поділимо швидкість зміни довжини тріщини  $dl/dt$  на дві складові

$$dl/dt = dl^{(f)}/dt + dl^{(c)}/dt, \quad (6)$$

де  $l^{(f)}$  – змінна довжина тріщини від циклічного навантаження;  $l^{(c)}$  – змінна довжина тріщини при механізмі повзучості в циклі. Окремо ці дві складові можна ще записати у вигляді такої системи рівнянь:

$$dl^{(f)}/dN = \partial W_p^{(4)} / \partial N / [\gamma_{fc} - \gamma_t]; dl^{(c)}/dN = 2\partial W_p^{(3)} / \partial N / [\gamma_{fc} - \gamma_t], \quad (7)$$

з відповідними початковою і кінцевою умовами

$$N = 0, \quad l(0) = l_0, \quad N = N_*(T), \quad l(N_*(T)) = l_*, \quad \gamma_t(l_*) = \gamma_{fc}. \quad (8)$$

Тут  $N_*$  – період до критичного росту макротріщини, який залежить від періоду циклу  $T$ ;  $t = T \cdot N$ .

Отже, кінетичне рівняння (7) та умови (8) становлять математичну модель для дослідження до критичного росту тріщини в пластинах за умови симетрії навантаження.

Оскільки ми розглядаємо практичні часи витримок, тобто  $T$  не є досить велике [5], то головну частку часу буде займати перший етап повзучості, для якого характерне зменшення швидкості повзучості [5]. Відповідно до цього розкриття зони передруйнування  $\delta_{t \max}(\mathbf{x}, t)$  запишемо, використовуючи логарифмічний закон повзучості [5]

$$\delta_{t \max}(\mathbf{x}, t) = \delta_{\max}(\mathbf{x}) + \mathbf{B} \cdot \ln((1 + t) \cdot t_1^{-1}), \quad (9)$$

де  $\mathbf{B}$ ,  $t_1$  – константи, які визначають із експерименту;  $\delta_{\max}(\mathbf{x})$  – максимальне розкриття зони передруйнування на початку циклу навантаження;  $\mathbf{B} \cdot \ln((1 + t) \cdot t_1^{-1})$  – додаткове розкриття зони передруйнування завдяки повзучості протягом циклу навантаження;  $\mathbf{x}$  – координата з початком у вершині тріщини вздовж нормалі до неї.

Аналізуючи результати відомих експериментальних досліджень [1–5], доходимо висновку, що навіть при достатньо великих значеннях періоду циклу  $T$  виконується умова  $dl^{(f)}/dN \gg dl^{(c)}/dN$ . Тому надалі будемо вважати, що

$$d\mathbf{l} / dN \approx d\mathbf{l}^{(f)} / dN. \quad (10)$$

Величину  $\partial W_p^{(4)} / \partial N$  в рівнянні (7) визначатимемо так [1–4]:

$$\partial W_p^{(4)} / \partial N = \varepsilon_{fc} \alpha \delta_{fc}^{-1} \int_0^{l_p} \sigma_{of} [\delta_{t\max}^{(f)}(\mathbf{x}, t) - \delta_{t\min}^{(f)}(\mathbf{x}, t)] d\mathbf{x}, \quad (11)$$

де  $l_p$  – ширина зони передруйнування біля вершини тріщини по нормалі до неї;  $\varepsilon_{fc}$  – критичне значення деформації  $\varepsilon_{t\max}^{(f)}$  матеріалу біля вершини тріщини при циклічному навантаженні;  $\alpha$  – коефіцієнт, що пов'язує значення статичного та циклічного розкриття тріщини [6, 7];  $\delta_{fc}$  – критичне значення  $\delta_{t\max}(\mathbf{x}, t)$ ;  $\sigma_{of}$  – усереднене значення напружень у зоні передруйнування.

Ми розглядаємо випадок, коли в кожному циклі пластина піддається однаковому навантаженню (рис.1,а) з витримкою  $T$ , тому розкриття тріщини буде більше, ніж у випадку синусоїдального циклічного навантаження. Отже, використовуючи (9) та результати [5–7], запишемо різницю розкриття тріщини  $[\delta_{t\max}^{(f)}(\mathbf{x}, t) - \delta_{t\min}^{(f)}(\mathbf{x}, t)]$  в такому вигляді:

$$\delta_{t\max}^{(f)}(\mathbf{x}, t) - \delta_{t\min}^{(f)}(\mathbf{x}, t) = 0,5 (\delta_{\max}^{(f)}(\mathbf{x}) + B \ln((1+t) \cdot t_1^{-1})) (1 - R^2)^2. \quad (12)$$

Тут  $R$  – коефіцієнт асиметрії циклу. Для простоти подальшого викладення будемо вважати, що  $R = 0$ .

Позаяк із (9) випливає, що  $B = \delta_{t\max}^{\&f}(\mathbf{x}, 0)$ , то, використовуючи результати [5–7], величину  $\delta_{t\max}^{(f)}(\mathbf{x}, t)$  подамо так:

$$\delta_{t\max}^{(f)}(\mathbf{x}, t) = [\delta_{\max}^{(f)}(0) + \delta_{t\max}^{\&f}(0, 0) \cdot \ln((1+t) \cdot t_1^{-1})] \cdot (1 - x/l_p)^2.$$

Підставляючи це в (12) і (11), отримаємо

$$\partial W_p^{(4)} / \partial N = \varepsilon_{fc} \alpha \sigma_{of} \delta_{fc}^{-1} 6^{-1} (\delta_{\max}^{(f)}(0) + \delta_{t\max}^{\&f}(0, 0) \cdot \ln((1+t)t_1^{-1})) \cdot l_p. \quad (13)$$

Для обчислення  $\partial W_p^{(4)} / \partial N$  використовуватимемо співвідношення для розкриття вершини тріщини [6, 7]

$$\delta_{t\max}^{(f)}(0) = K_{I\max}^2(0) \sigma_{of}^{-1} E^{-1}; \quad \delta_{t\max}^{\&f}(0, t) = \delta_{fc} \varepsilon_{fc}^{-1} \varepsilon_{t\max}^{(f)}(t), \quad (14)$$

де  $K_{I\max}$  – максимальне значення коефіцієнта інтенсивності напружень у циклі;  $E$  – модуль пружності.

У формулу (13) входить невідома величина  $\delta_{t\max}^{\&f}(0, 0)$  – швидкість розкриття у вершині тріщини за повзучості в зоні передруйнування, яку будемо визначати так:

$$\delta_{t_{\max}}^{(f)}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{A} \left[ \delta_{t_{\max}}^{(f)}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \delta_{fC}^{-1} \right]^m. \quad (15)$$

Тут  $\mathbf{A}$ ,  $m$  – константи, які треба визначати з експерименту. Коректність запропонованої тут залежності (15) можна перевірити тільки експериментальним шляхом, але в літературі таких експериментальних даних немає. З огляду на це поступаємо так. За допомогою другого співвідношення (14) залежність (15) можемо записати так:

$$\delta_{t_{\max}}^{(f)}(\mathbf{0}) = \mathbf{B} [\varepsilon_{t_{\max}}^{(f)}(\mathbf{0})]^m, \quad \mathbf{B} = \mathbf{A} \delta_{fC}^{-1} \varepsilon_{fC}^{1-m}, \quad (16)$$

де  $\mathbf{B}$ ,  $m$  – константи, які визначають з експерименту.

Підставляючи (14), (15) в (13), запишемо  $\partial \mathbf{W}_p^{(4)} / \partial \mathbf{N}$  у такому вигляді:

$$\partial \mathbf{W}_p^{(4)} / \partial \mathbf{N} = \varepsilon_{fC} \sigma_{of} \alpha \mathbf{6}^{-1} \mathbf{E}^2 \mathbf{K}_{fC}^{-2} \left[ \delta_{\max}^{(f)}(\mathbf{0}) + \mathbf{A} \cdot \left[ \delta_{\max}^{(f)}(\mathbf{0}) \delta_{fC}^{-1} \right]^m \ln((1 + \mathbf{t}) \mathbf{t}_1^{-1}) \right]^2 \quad (17)$$

Як приклад розглянемо прямолінійну тріщину довжиною  $\mathbf{l}_0$ , розкриття у вершині якої будуть внаслідок осьової симетрії постійні. Тоді співвідношення (17) запишемо так:

$$\partial \mathbf{W}_p^{(4)} / \partial \mathbf{N} = \varepsilon_{fC} \sigma_{of} \alpha \mathbf{6}^{-1} \mathbf{E}^2 \mathbf{K}_{fC}^{-2} \left[ \delta_{\max}^{(f)}(\mathbf{0}) + \mathbf{A} \cdot \left[ \delta_{\max}^{(f)}(\mathbf{0}) \delta_{fC}^{-1} \right]^m \ln((1 + \mathbf{t}) \mathbf{t}_1^{-1}) \right]^2. \quad (18)$$

Використавши співвідношення (9), (10), (14), (18) і рівність [7]

$$\delta_{\max}^{(f)} / \delta_{fC} = \mathbf{K}_{I_{\max}}^2 / \mathbf{K}_{fC}^2,$$

отримуємо остаточний вигляд кінетичного рівняння (6) для визначення швидкості поширення повзучо–втомної прямолінійної тріщини

$$\begin{aligned} d\mathbf{l} / d\mathbf{N} &= \left[ \mathbf{K}_{I_{\max}}^2 \sigma_{of}^{-1} \mathbf{E}^{-1} + \mathbf{A} \cdot \left[ \mathbf{K}_{I_{\max}}^2 / \mathbf{K}_{fC}^2 \right]^m \ln((1 + \mathbf{T}) \mathbf{t}_1^{-1}) \right]^2 \times \\ &\times \alpha \mathbf{E}^2 \mathbf{4},5^{-1} (\mathbf{K}_{fC}^2 - \mathbf{K}_{I_{\max}}^2)^{-1} \end{aligned} \quad (19)$$

з початковою і кінцевою умовами

$$\mathbf{N} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{I}(\mathbf{0}) = \mathbf{l}_0, \quad \mathbf{N} = \mathbf{N}^*(\mathbf{T}), \quad \mathbf{I}(\mathbf{N}^*(\mathbf{T})) = \mathbf{l}^*, \quad \mathbf{K}_{I_{\max}}(\mathbf{l}^*) = \mathbf{K}_{fC}. \quad (20)$$

Розв'язок математичної задачі (19), (20) і дасть змогу визначити залишкову довговічність пластини  $\mathbf{N}^*(\mathbf{T})$ .

**Аналог задачі Гріффітса у випадку кінетики поширення повзучо–втомної тріщини у разі високої температури.** Розглянемо нескінченну пластину зі сталі 321 з початковою тріщиною довжини  $\mathbf{l}_0$ , яка нагріта до високої температури  $\mathbf{T}_0$  і розтягується в нескінченно віддалених точках рівномірно розподіленими зусиллями інтенсивності  $\mathbf{p}$ , які направлені перпендикулярно до осі  $\mathbf{Ox}$  і змінюються циклічно (див. рис. 1,б).

Задача полягає у визначенні кількості циклів навантаження  $N = N^*$ , досягнувши яке тріщина підросте до критичного розміру  $l = l_*$  і пластина зруйнується. Для розв'язку цієї задачі застосуємо сформульовану

розрахункову модель (19)–(20), внаслідок чого для матеріалу пластини сталь 321 [8] побудуємо

графічну залежність періоду до критичного росту тріщини  $N_{*n}$  від початкової довжини тріщини  $l_0$  (рис. 2). Як видно з рис. 2, неврахування вкладу повзучості у докритичному рості повзучо–втомної тріщини може привести до переоцінки залишкової довговічності пластини і до непередбачуваного руйнування.

**Висновки.** Зроблена адаптація раніше запропонованої автором розрахункової моделі визначення періоду докритичного росту повзучо–втомних тріщин у тримірних тілах на випадок поширення таких тріщин у пластинах. На прикладі розв'язку задачі Гріффітса показано, що неврахування вкладу повзучості у докритичному рості повзучо–втомної тріщини може привести до переоцінки залишкової довговічності пластини і до непередбачуваного руйнування.

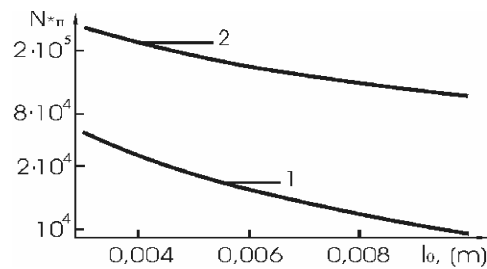


Рис. 2. Залежність  $N_{*n}$  від початкової довжини тріщини  $l_0$ ; 1 – з врахуванням повзучості; 2 – без такого врахування.

1. Андрейків О.Є., Лесів Р.М., Долінська І.Я. Залежність докритичного росту повзучо–втомної тріщини від величини періоду циклу навантаження // Фізико–хімічна механіка матеріалів – 2009. 45, № 4. Р. 31–38.
2. Andrejkiv O. and Lesiv R. Mathematical model for estimating the period of creep–fatigue crack growth in construction materials at high temperature // Acta mechanica et automatica. – 2007. – 1, № 1. – Р. 7–10.
3. Андрейків О.Є., Сас Н.Б. Математична модель для визначення періоду до критичного поширення тріщини високотемпературної повзучості в твердих тілах // Доп. НАН України. – 2006. – №5, – С. 47 – 52.
4. Андрейків О.Є., Ліщинська М.В. Рівняння росту втомних тріщин в неоднорідних пластинах // Фіз.–хім. механіка матеріалів. – 1999. – № 3. – С. 53–58.
5. Garofalo F. Fundamentals of creep and creep–rupture in metals. – New–York; London, 1970.

6. *Андрейків О.Є., Кім М.Б.* Визначення періоду докритичного росту тріщини в елементах конструкцій при їх двох частотному навантаженні // *Машинознавство.* – 2006. – №2, – С. 3 – 7.
7. *Шата М., Терлецька З.О.* Енергетичний підхід у механіці втомного поширення макротріщини // *Механіка руйнування і міцність конструкцій* (за ред. В.В. Панасюка). – Львів, – 1999. – В.2. – С. 141–148.
8. *Koterazawa R.* Creep–Fatigue crack growth of metallic materials at elevated temperatures // *Advances in Fracture resistance and structural integrity.* – Pergamon, 1994, – P. 497–504.

### АНАЛОГ ЗАДАЧИ ГРИФФИТСА ДЛЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПОЛЗУЧЕ–УСТАЛОСТНЫХ ТРЕЩИН

**Ирина ДОЛИНСКАЯ**

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,  
ул. Университетская 1 79000 Львов, Украина*

На основании предложенной ранее автором расчетной модели решена задача об определении периода докритического роста усталостной трещины в бесконечной пластине (аналог задачи Гриффитса при циклическом растяжении). Показано, что пренебрежение ползучестью в докритическом росте ползуче–усталостной трещины может привести к переоценке остаточной долговечности пластины и к не предполагаемому разрушению.

*Ключевые слова:* ползуче–усталостная трещина, ползучесть, циклическое растяжение, энергетический баланс, остаточная долговечность

### ANALOGUE OF GRIFFITHS' PROBLEM FOR PROPAGATION CREEP–FATIGUE CRACKS

**Iryna DOLINSKA**

*Ivan Franco National University of Lviv,  
Universitetska Str., 1, 79000 Lviv, Ukraine*

On the basis of calculation model offered before by author, problem about determination of period to critical growth of creep–fatigue crack in an infinity plate (analogue of Griffiths problem in cyclic tension at high temperature) was solved. It is shown that ignoring deposit of creep in the critical grown of creep–fatigue crack can result to revaluation of residual life–time of the plate and to not predictable destruction.

*Key words:* creep–fatigue crack, creep, analogue of Griffiths' problem, cyclic tension, power balance, residual life–time.

Стаття надійшла до редколегії 12.11.2009  
Прийнята до друку 22.12.2010