

УДК 539.3

## ВПЛИВ ЕЛЕКТРИЧНОЇ ПРОНИКНОСТІ МІЖФАЗОВОЇ ТРИЩИНИ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНОГО ПОЛЯ В ОКОЛІ ЇЇ ВЕРШИНИ

Володимир ГОВОРУХА, Володимир ЛОБОДА

*Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара,  
просп. Гагаріна, 72 49010, Дніпропетровськ, Україна*

Розглянуто плоску задачу електропружності для п'єзокерамічного біматеріалу з частково електропроникною міжфазовою тріщиною. Розв'язок задачі побудовано в замкненій формі методами теорії функцій комплексної змінної. Показано, що в околі вершини тріщини, залежно від комбінації п'єзокерамічних матеріалів, можуть виникати різні види особливостей. Для різних видів навантаження визначено основні параметри руйнування та проаналізовано їхню залежність від електричної проникності тріщини.

*Ключові слова:* п'єзоелектрична кераміка, частково електропроникна міжфазова тріщина, швидкість вивільнення енергії.

П'єзокерамічні матеріали широко використовують у різних галузях промисловості як сенсори, актуатори, трансформатори та інші пристрої. У більшості випадків п'єзокерамічні компоненти є елементами складних композитних конструкцій. За своєю природою п'єзокерамічні матеріали дуже крихкі та схильні до появи в них тріщин, зокрема міжфазових, що часто призводить до руйнування всієї конструкції. Тому дослідження тріщин і визначення основних параметрів руйнування має важливе практичне значення.

Ключовий момент у задачах руйнування п'єзокерамічних матеріалів - формулювання електричних граничних умов на берегах тріщини. Вперше ці умови були сформульовані в [1], де розглядали модель електропроникної міжфазової тріщини, що передбачає неперервність стрибка електричного потенціалу на її берегах. Згодом, враховуючи, що діелектрична проникність повітря, яке найчастіше заповнює тріщину, на декілька порядків нижча, ніж п'єзокераміки, запропонували модель міжфазової тріщини [2], в якій брали умови електричної ізоляції на її берегах. Однак найбільш реалістичним і узагальненим варіантом електричних умов можна вважати умови для частково електропроникної тріщини [3, 4], в яких враховується електрична проникність середовища, що заповнює тріщину.

Модель [3, 4] запропонована для тріщин в однорідному матеріалі. Для міжфазової тріщини задача стає значно складнішою завдяки наявності некореневої особливості в околі вершини тріщини. Незважаючи на те, що модель частково електропроникної міжфазової тріщини найбільш реалістична, можна виділити лише праці [5, 6], де цю модель досліджували раніше. Це зумовлює необхідність подальшого розвитку моделі [3, 4] на випадок міжфазової тріщини.

© Говоруха В., Лобода В., 2010

Нижче у замкненому аналітичному вигляді подаємо розв'язок задачі для частково електропроникної тріщини, яка розміщена на межі поділу двох півпросторів із різних п'єзокерамічних матеріалів. Особливу увагу приділяємо аналізу впливу електричної проникності тріщини та зовнішнього навантаження на основні параметри руйнування.

**Формулювання задачі.** Розглянемо частково електропроникну тріщину, яка міститься у смузі  $b_1 < x_1 < b_2$ ,  $x_3 = 0$  області розмежування двох різнорідних п'єзокерамічних півпросторів  $x_3 > 0$  і  $x_3 < 0$ . Матеріали обох півпросторів мають клас симетрії  $6mm$  і попередньо поляризовані в напрямі осі  $Ox_3$ . Вважаємо, що поза тріщиною півпростори жорстко зчеплені між собою вздовж своєї межі  $x_3 = 0$ , а на нескінченності задані однорідні поля механічних зусиль та електричної індукції (рис. 1). Будемо розглядати задачу для випадку плоскої деформації, вважаючи, що всі компоненти електромеханічного поля не залежать від координати  $x_2$ .

За відсутності зовнішнього навантаження на поверхні тріщини граничні умови на межі поділу матеріалів  $x_3 = 0$  мають такий вигляд:

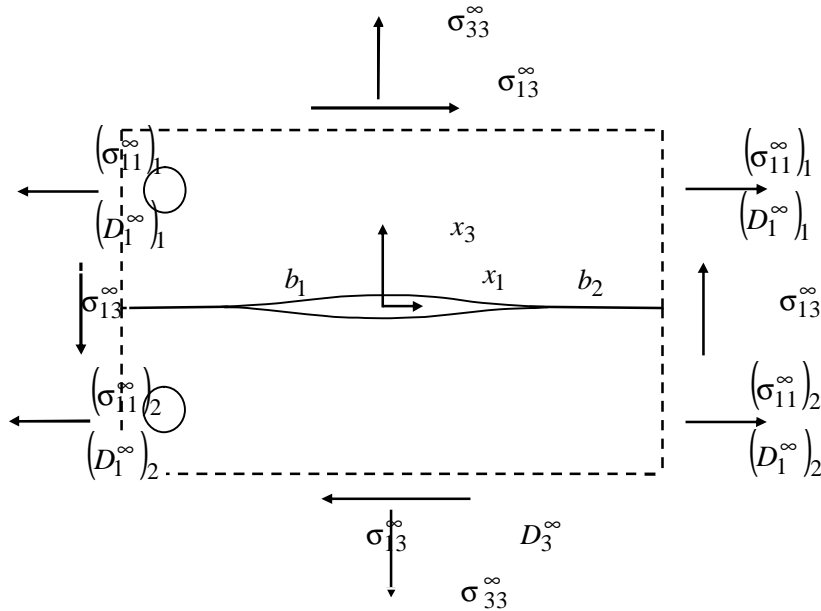


Рис. 1

$$[[\sigma_{13}]] = 0, [[\sigma_{33}]] = 0, [[D_3]] = 0, x_1 \in (-\infty, \infty); \quad (1)$$

$$[[u_1]] = 0, [[u_3]] = 0, [[\varphi]] = 0, x_1 \notin (b_1, b_2); \quad (2)$$

$$\sigma_{13} = 0, \sigma_{33} = 0, D_3 [[u_3]] = -\epsilon_a [[\varphi]], x_1 \in (b_1, b_2), \quad (3)$$

де  $\sigma_{ij}$ ,  $\mathbf{D}_i$ ,  $\mathbf{u}_i$ ,  $\varphi$  – механічні напруження, електрична індукція, переміщення та електричний потенціал, відповідно;  $\epsilon_a$  – діелектрична проникність заповнювача тріщини. Символ  $[[\cdot]]$  тут і надалі означає стрибок відповідної функції на межі поділу матеріалів.

Характерною особливістю цієї моделі тріщини, на відміну від електропроникної та електроізолюваної, є підстави розглядати тріщину як фізичну поверхню з заданими значеннями діелектричних сталей. Внаслідок цього електричні граничні умови на берегах частково електропроникної тріщини вміщують одночасно електричні та механічні компоненти поля, що призводить, як це буде показано далі, до нелінійності цієї моделі.

Заповнювач тріщини характеризується своєю відносною діелектричною проникністю  $\epsilon_r$ , яка є відношенням між його діелектричною проникністю  $\epsilon_a$  та діелектричною проникністю вакууму (повітря)  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$

$$\epsilon_a = \epsilon_r \epsilon_0.$$

Оскільки для вакууму (повітря)  $\epsilon_r = 1$ , то очевидно, що в природі фізично не існує середовищ, для яких  $\epsilon_r < 1$ . Зазначимо також, що електропроникну та електроізолювану тріщини можна розглядати як граничні випадки частково електропроникної тріщини, коли  $\epsilon_r \rightarrow \infty$  або  $\epsilon_r \rightarrow 0$ , відповідно.

Відповідно до методики [2] основні компоненти електромеханічного поля  $\mathbf{V} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3, \varphi]^T$  і  $\mathbf{t} = [\sigma_{13}, \sigma_{33}, \mathbf{D}_3]^T$  на межі поділу матеріалів можна подати у вигляді

$$[[\mathbf{V}']] = -i\mathbf{H}[\mathbf{h}^+(\mathbf{x}_1) - \mathbf{h}^-(\mathbf{x}_1)], \quad (4)$$

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}_1, 0) = \mathbf{h}^+(\mathbf{x}_1) + \bar{\mathbf{H}}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{h}^-(\mathbf{x}_1) + \mathbf{T}^\infty, \quad (5)$$

де  $\mathbf{h}(\mathbf{z}) = \begin{cases} \mathbf{V}^{(1)}\mathbf{f}'^{(1)}(\mathbf{z}), & \mathbf{x}_3 > 0 \\ \mathbf{H}^{-1}\bar{\mathbf{H}}\mathbf{V}^{(2)}\mathbf{f}'^{(2)}(\mathbf{z}), & \mathbf{x}_3 < 0 \end{cases}$  – вектор-функція, аналітична у всій

комплексній площині за винятком області тріщини,  $\mathbf{T}^\infty = [\sigma_{13}^\infty, \sigma_{33}^\infty, \mathbf{D}_3^\infty]^T$ .

Вирази для матриць  $\mathbf{A}^{(k)}$ ,  $\mathbf{V}^{(k)}$  та функцій  $\mathbf{f}'^{(k)}(\mathbf{z})$  ( $\mathbf{k} = 1, 2$ ) наведені в [2].

Матриця  $\mathbf{H}$  у виразах (4), (5) визначається за формулою

$$\mathbf{H} = i[\mathbf{A}^{(1)}(\mathbf{V}^{(1)})^{-1} - \bar{\mathbf{A}}^{(2)}(\bar{\mathbf{V}}^{(2)})^{-1}]$$

і для трансверсально-ізотропних п'єзокерамічних матеріалів має таку структуру:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & ih_{13} & ih_{14} \\ ih_{31} & h_{33} & h_{34} \\ ih_{41} & h_{43} & h_{44} \end{bmatrix},$$

де  $\mathbf{h}_{ml}$  ( $m, l = 1, 3, 4$ ) – дійсні числа.

За своєю побудовою вирази (5) автоматично задовольняють граничні умови (1).

**Метод розв'язування.** Припустимо, що на берегах тріщини виконується умова [5]

$$\mathbf{D}_3^+(\mathbf{x}_1, 0) = \mathbf{D}_3^-(\mathbf{x}_1, 0) = \mathbf{D},$$

де  $\mathbf{D}$  – деяка дійсна стала, що потребує подальшого визначення.

Тоді, задовольняючи за допомогою співвідношень (5) перші дві з граничних умов (3), одержимо векторну задачу спряження

$$\mathbf{h}^+(\mathbf{x}_1) + \bar{\mathbf{H}}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{h}^-(\mathbf{x}_1) = -(\mathbf{T}^\infty - \mathbf{T}_0), \quad \mathbf{x}_1 \in (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2). \quad (6)$$

тут  $\mathbf{T}_0 = [\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{D}]^T$ .

Розв'язок однорідної задачі відповідно до (6)

$$\mathbf{h}^+(\mathbf{x}_1) + \bar{\mathbf{H}}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{h}^-(\mathbf{x}_1) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}_1 \in (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2), \quad (7)$$

який задовольняє умову  $\mathbf{h}(\infty) = \mathbf{0}$ , будемо шукати у вигляді [7]

$$\mathbf{h}(\mathbf{z}) = (\mathbf{z} - \mathbf{b}_1)^{-0.5-i\nu} (\mathbf{z} - \mathbf{b}_2)^{-0.5+i\nu} \mathbf{w}, \quad (8)$$

де  $\nu$  – деяка комплексна стала;  $\mathbf{w} = [\mathbf{w}^{(1)}, \mathbf{w}^{(2)}, \mathbf{w}^{(3)}]^T$  – довільний вектор.

Підставляючи (8) у (7), одержимо систему

$$[\bar{\mathbf{H}} - \mathbf{e}^{2\pi\nu}\mathbf{H}]\mathbf{w} = \mathbf{0}. \quad (9)$$

Очевидно, що  $\nu$  та  $\mathbf{w}$  будуть, відповідно, власними числами та власними векторами цієї системи.

Враховуючи, що однорідна система (9) матиме ненульові розв'язки, якщо її визначник дорівнює нулю, то для знаходження її власних чисел використаємо рівняння

$$|\bar{\mathbf{H}} - \mathbf{e}^{2\pi\nu}\mathbf{H}| = 0,$$

яке можна переписати у вигляді

$$\delta^3 - \Xi\delta = 0, \quad (10)$$

$$\text{де } \delta = \frac{1 - \mathbf{e}^{2\pi\nu}}{1 + \mathbf{e}^{2\pi\nu}}, \quad \Xi = \frac{\mathbf{h}_{14}(\mathbf{h}_{33}\mathbf{h}_{41} - \mathbf{h}_{31}\mathbf{h}_{43}) - \mathbf{h}_{13}(\mathbf{h}_{34}\mathbf{h}_{41} - \mathbf{h}_{31}\mathbf{h}_{44})}{\mathbf{h}_{11}(\mathbf{h}_{34}\mathbf{h}_{43} - \mathbf{h}_{33}\mathbf{h}_{44})}.$$

Розв'язуючи рівняння (10), отримаємо його корені

$$\nu_1 = \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{1 + \sqrt{\Xi}}{1 - \sqrt{\Xi}} \right), \quad \nu_2 = -\frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{1 + \sqrt{\Xi}}{1 - \sqrt{\Xi}} \right), \quad \nu_3 = 0.$$

Знаючи власні числа  $\nu_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ), із системи (9) знайдемо відповідні їм власні вектори  $\mathbf{w}_j$ .

Числовий аналіз засвідчує, що для однієї групи п'єзокерамічних біматеріальних композицій виконується умова  $\Xi > 0$ , а для іншої  $\Xi < 0$ . Тоді

$$\begin{aligned} \nu_1 = \varepsilon, \nu_2 = -\varepsilon, \nu_3 = 0 \text{ при } \Xi > 0; \\ \nu_1 = i\kappa, \nu_2 = -i\kappa, \nu_3 = 0 \text{ при } \Xi < 0, \end{aligned}$$

$$\text{де } \varepsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{1 + \sqrt{\Xi}}{1 - \sqrt{\Xi}} \right), \kappa = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}(\sqrt{|\Xi|}).$$

Отож, в околі вершини частково електропроникної міжфазової тріщини, залежно від комбінації п'єзокерамічних матеріалів, може виникати або осцилююча особливість (композиції  $\varepsilon$ -класу), або степенева особливість, відмінна від кореневої (композиції  $\kappa$ -класу).

У випадку, коли характеристики матеріалів верхнього та нижнього п'єзокерамічних півпросторів однакові, матриця  $\mathbf{H}$  стає дійсною, внаслідок чого  $\Xi = 0$  і рівняння (10) має єдиний розв'язок  $\nu = 0$ . У цьому випадку компоненти тензора напружень і вектора електричної індукції мають в околі вершини тріщини кореневу особливість.

Перейдемо до розв'язку неоднорідної задачі (6). За своєю побудовою вектори  $\mathbf{w}_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) утворюють множину лінійно незалежних векторів (базисну систему векторів), тому, як показано в [2], можливе розкладання, і притому єдине, вектора  $\mathbf{T} = \mathbf{T}^\infty - \mathbf{T}_0$  та вектора-функції  $\mathbf{h}(\mathbf{z})$  за базисом цих векторів

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_1 \mathbf{w}_1 + \mathbf{T}_2 \mathbf{w}_2 + \mathbf{T}_3 \mathbf{w}_3, \quad (11)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{z}) = \mathbf{h}_1(\mathbf{z}) \mathbf{w}_1 + \mathbf{h}_2(\mathbf{z}) \mathbf{w}_2 + \mathbf{h}_3(\mathbf{z}) \mathbf{w}_3. \quad (12)$$

Підставляючи подання (11) та (12) в (6), одержимо три окремі скалярні задачі лінійного спряження

$$\mathbf{h}_j^+(\mathbf{x}_1) + e^{-2\pi\nu_j} \mathbf{h}_j^-(\mathbf{x}_1) = -\mathbf{T}_j, \quad \mathbf{x}_1 \in (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2), \quad (13)$$

де функції  $\mathbf{h}_j(\mathbf{z})$  ( $j = 1, 2, 3$ ) аналітичні у всій комплексній площині за винятком області тріщини.

Враховуючи, що  $\mathbf{h}_j(\infty) = 0$ , і використовуючи умову однозначності переміщень та електричного потенціалу, розв'язки задач (13) у класі функцій, що мають у вершинах тріщини інтегровані особливості, запишемо у вигляді [7]

$$\mathbf{h}_j(\mathbf{z}) = \frac{\mathbf{T}_j}{1 + e^{-2\pi\nu_j}} \left\{ \frac{(\mathbf{z} - \mathbf{b}_1)^{-i\nu_j} (\mathbf{z} - \mathbf{b}_2)^{i\nu_j}}{\sqrt{(\mathbf{z} - \mathbf{b}_1)(\mathbf{z} - \mathbf{b}_2)}} \left[ \mathbf{z} + i\mathbf{l}\nu_j - \frac{\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2}{2} \right] - 1 \right\},$$

де  $\mathbf{l} = \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1$ .

Використавши вираз (12), одержимо подання для вектор-функції  $\mathbf{h}(\mathbf{z})$

$$\mathbf{h}(\mathbf{z}) = \sum_{j=1}^3 \frac{\mathbf{T}_j \mathbf{w}_j}{1 + e^{-2\pi\nu_j}} \left\{ \frac{(\mathbf{z} - \mathbf{b}_1)^{-i\nu_j} (\mathbf{z} - \mathbf{b}_2)^{i\nu_j}}{\sqrt{(\mathbf{z} - \mathbf{b}_1)(\mathbf{z} - \mathbf{b}_2)}} \left[ \mathbf{z} + i\mathbf{l}\nu_j - \frac{\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2}{2} \right] - 1 \right\}. \quad (14)$$

Для граничних значень вектор-функції  $\mathbf{h}(\mathbf{z})$  на берегах тріщини правильні такі формули:

$$\mathbf{h}^{\pm}(\mathbf{x}_1) = \sum_{j=1}^3 \frac{\mathbf{T}_j \mathbf{w}_j}{1 + e^{-2\pi\nu_j}} \left\{ \frac{e^{m\pi\nu_j} (\mathbf{x}_1 - \mathbf{b}_1)^{-i\nu_j} (\mathbf{b}_2 - \mathbf{x}_1)^{i\nu_j}}{\pm i\sqrt{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{b}_1)(\mathbf{b}_2 - \mathbf{x}_1)}} \left[ \mathbf{x}_1 + i\mathbf{l}\nu_j - \frac{\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2}{2} \right] - 1 \right\}.$$

Підставляючи ці вирази в (4), отримуємо

$$[[\mathbf{V}'(\mathbf{x}_1)]] = -\mathbf{H} \sum_{j=1}^3 \frac{\mathbf{T}_j \mathbf{w}_j (1 + e^{2\pi\nu_j}) (\mathbf{x}_1 - \mathbf{b}_1)^{-i\nu_j} (\mathbf{b}_2 - \mathbf{x}_1)^{i\nu_j}}{2\mathbf{ch}(\pi\nu_j) \sqrt{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{b}_1)(\mathbf{b}_2 - \mathbf{x}_1)}} \left[ \mathbf{x}_1 + i\mathbf{l}\nu_j - \frac{\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2}{2} \right].$$

Інтегруючи останній вираз, запишемо для проміжку  $\mathbf{x}_1 \in (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$

$$[[\mathbf{V}(\mathbf{x}_1)]] = \frac{\mathbf{H} + \bar{\mathbf{H}}}{2} \sqrt{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{b}_1)(\mathbf{b}_2 - \mathbf{x}_1)} \sum_{j=1}^3 \frac{\mathbf{T}_j \mathbf{w}_j}{\mathbf{ch}(\pi\nu_j)} \left( \frac{\mathbf{b}_2 - \mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_1 - \mathbf{b}_1} \right)^{i\nu_j}. \quad (15)$$

На підставі (15), враховуючи структуру матриці  $\mathbf{H}$ , одержимо вирази для стрибків електричного потенціалу та нормального переміщення берегів тріщини

$$\begin{aligned} [[\varphi(\mathbf{x}_1)]] &= \sqrt{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{b}_1)(\mathbf{b}_2 - \mathbf{x}_1)} \sum_{j=1}^3 \frac{\mathbf{T}_j [\mathbf{h}_{43} \mathbf{w}_j^{(2)} + \mathbf{h}_{44} \mathbf{w}_j^{(3)}]}{\mathbf{ch}(\pi\nu_j)} \left( \frac{\mathbf{b}_2 - \mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_1 - \mathbf{b}_1} \right)^{i\nu_j}, \\ [[\mathbf{u}_3(\mathbf{x}_1)]] &= \sqrt{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{b}_1)(\mathbf{b}_2 - \mathbf{x}_1)} \sum_{j=1}^3 \frac{\mathbf{T}_j [\mathbf{h}_{33} \mathbf{w}_j^{(2)} + \mathbf{h}_{34} \mathbf{w}_j^{(3)}]}{\mathbf{ch}(\pi\nu_j)} \left( \frac{\mathbf{b}_2 - \mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_1 - \mathbf{b}_1} \right)^{i\nu_j}. \end{aligned} \quad (16)$$

Підставляючи ці вирази в останню з граничних умов (3), отримуємо рівняння для визначення нормальної складової вектора електричної індукції на берегах тріщини

$$\begin{aligned} & \mathbf{D} \sum_{j=1}^3 \frac{\mathbf{T}_j [\mathbf{h}_{33} \mathbf{w}_j^{(2)} + \mathbf{h}_{34} \mathbf{w}_j^{(3)}]}{\mathbf{ch}(\pi\nu_j)} \left( \frac{\mathbf{b}_2 - \mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_1 - \mathbf{b}_1} \right)^{i\nu_j} + \\ & + \varepsilon_a \sum_{j=1}^3 \frac{\mathbf{T}_j [\mathbf{h}_{43} \mathbf{w}_j^{(2)} + \mathbf{h}_{44} \mathbf{w}_j^{(3)}]}{\mathbf{ch}(\pi\nu_j)} \left( \frac{\mathbf{b}_2 - \mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_1 - \mathbf{b}_1} \right)^{i\nu_j} = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Враховуючи, що  $\mathbf{T}_j$  лінійно залежать від  $\mathbf{D}$ , співвідношення (17) для кожного  $\mathbf{x}_1$  є алгебричним рівнянням другого степеня стосовно  $\mathbf{D}$ , яке, як свідчить числовий аналіз, завжди має два дійсних і різних корені. Позначивши ці корені через  $\mathbf{D}_1$  і  $\mathbf{D}_2$ , проведемо подальший аналіз. Для

цього обчислимо за формулою (16) стрибок нормального переміщення берегів тріщини  $[[\mathbf{u}_3(\mathbf{x}_1)]]$ . Числові результати цих обчислень для п'єзокерамічної композиції PZT-5/PZT-4 при  $\sigma_{33}^\infty = 10$  МПа,  $\sigma_{13}^\infty = 0$ ,  $D_3^\infty = 0,01$  Кл/м<sup>2</sup>,  $l = 2$  мм,  $\varepsilon_r = 1$  зображено на рис. 2. Із наведених результатів видно, що кореню  $D_1$  відповідають додатні значення  $[[\mathbf{u}_3(\mathbf{x}_1)]]$ , а кореню  $D_2$  – від'ємні. Зважаючи на те, що стрибок нормального переміщення берегів тріщини не може набувати від'ємних значень, корінь  $D_2$ , з фізичного погляду, непридатний. Аналогічний висновок можна також зробити, проаналізувавши залежність коренів  $D_1$  та  $D_2$  від відносної діелектричної проникності середовища тріщини  $\varepsilon_r$ . Видно, що при  $\varepsilon_r \rightarrow 0$ , тобто у випадку електроізолюваної тріщини, корінь  $D_2$ , на відміну від  $D_1$ , залишається ненульовою величиною, що, з фізичного погляду, теж є непридатним. Отож, можна зробити висновок, що лише один корінь рівняння (17) фізично реальний і саме це значення електричної індукції на берегах тріщини використовуватимемо в подальшому аналізі.

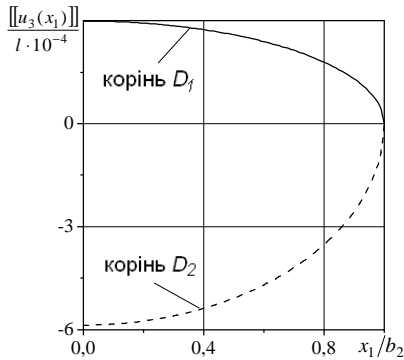


Рис. 2

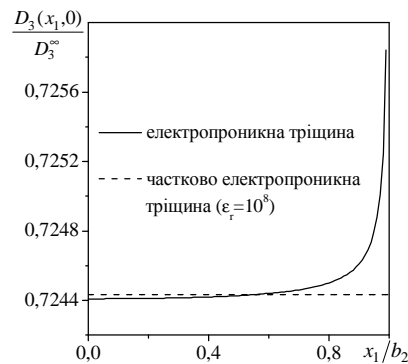


Рис. 3

На рис. 3 показано розподіл  $D_3(\mathbf{x}_1, 0)$  на берегах електропроникної міжфазової тріщини (суцільна крива) порівняно з аналогічним розподілом для частково електропроникної тріщини при  $\varepsilon_r = 10^8$  (пунктирна крива). Характеристики п'єзокерамічних матеріалів, розміри тріщини та електромеханічне навантаження залишаються такими самими, як і в попередніх обчисленнях. Із отриманих результатів випливає, що зі зростанням  $\varepsilon_r$  значення  $D_3(\mathbf{x}_1, 0)$  для частково електропроникної тріщини практично на всьому проміжку  $\mathbf{x}_1 \in (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$  наближаються до відповідних значень електропроникної тріщини, і лише в досить малому околі точок  $\mathbf{b}_1$ ,  $\mathbf{b}_2$  між ними простежується деяка відмінність. Це підтверджує наше припущення щодо сталого розподілу нормальної складової вектора електричної індукції на берегах частково електропроникної тріщини.

Підставляючи далі подання (14) в (5) і враховуючи, що кусково-аналітична вектор-функція  $\mathbf{h}(\mathbf{z})$  аналітично продовжувана через лінію жорсткого зчеплення матеріалів, отримаємо вирази для напружень і електричної індукції при  $\mathbf{x}_1 > \mathbf{b}_2$

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}_1, 0) = \sum_{j=1}^3 \frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{b}_1)^{-i\nu_j} (\mathbf{x}_1 - \mathbf{b}_2)^{i\nu_j}}{\sqrt{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{b}_1)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{b}_2)}} \left[ \mathbf{x}_1 + iI\nu_j - \frac{\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2}{2} \right] \mathbf{T}_j \mathbf{w}_j + \mathbf{T}_0. \quad (18)$$

На підставі (15), (18) отримаємо асимптотичні формули для основних механічних та електричних польових величин в околі правої вершини тріщини

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}_1, 0)|_{\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{b}_2 + 0} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{I}{\mathbf{x}_1 - \mathbf{b}_2}} \sum_{j=1}^3 \left( \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{b}_2}{I} \right)^{i\nu_j} (1 + 2i\nu_j) \mathbf{T}_j \mathbf{w}_j, \quad (19)$$

$$[[\mathbf{V}(\mathbf{x}_1)]]|_{\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{b}_2 - 0} = \frac{\mathbf{H} + \bar{\mathbf{H}}}{2} \sqrt{I(\mathbf{b}_2 - \mathbf{x}_1)} \sum_{j=1}^3 \frac{\mathbf{T}_j \mathbf{w}_j}{\text{ch}(\pi\nu_j)} \left( \frac{\mathbf{b}_2 - \mathbf{x}_1}{I} \right)^{i\nu_j}. \quad (20)$$

Швидкість вивільнення енергії в околі точки  $\mathbf{b}_2$  для частково електропроникної тріщини визначають за формулою [3]

$$\mathbf{G} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta l} \int_{\mathbf{b}_2}^{\mathbf{b}_2 + \Delta l} \mathbf{t}(\mathbf{x}_1, 0) [[\mathbf{V}(\mathbf{x}_1 - \Delta l)]] d\mathbf{x}_1.$$

Використавши вирази (19), (20) і обчислюючи відповідні інтеграли, одержимо вираз для швидкості вивільнення енергії в такій формі:

$$\mathbf{G} = \frac{\pi I}{16} \left\{ \frac{2(1 - 4\nu_1\nu_2) \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2 \mathbf{w}_2^T (\mathbf{H} + \bar{\mathbf{H}}) \mathbf{w}_1}{\text{ch}^2(\pi\nu_1)} + \frac{\mathbf{T}_3^2 \mathbf{w}_3^T (\mathbf{H} + \bar{\mathbf{H}}) \mathbf{w}_3}{\text{ch}^2(\pi\nu_3)} \right\}. \quad (21)$$

**Аналіз результатів.** Для ілюстрації отриманих результатів було проведено числові розрахунки для біматеріалу, складеного з п'єзокераміки PZT-5 (верхній матеріал) та PZT-4 (нижній). Характеристики цих матеріалів подано в [5]. У розрахунках враховували, що  $\sigma_{33}^\infty = 10$  МПа,  $\sigma_{13}^\infty = 0$ ,  $l = 2$  мм, а величина  $\mathbf{D}_3^\infty$  змінювалася в діапазоні від  $-0,006$  Кл/м<sup>2</sup> до  $0,006$  Кл/м<sup>2</sup>.

На рис. 4 зображено графіки, що характеризують вплив електричної проникності тріщини на стрибок нормального переміщення берегів тріщини  $[[\mathbf{u}_3]]$  в точці  $\mathbf{x}_1 = 0$ . Тут і надалі крива 1 відповідає електроізолюваній тріщині; 2 – частково електропроникній, заповненій вакуумом (повітрям) ( $\epsilon_r = 1$ ); 3 – частково електропроникній, заповненій силіконом ( $\epsilon_r = 2,5$ ); 4 – електропроникній. Як видно з результатів, значення  $[[\mathbf{u}_3]]$  дуже малі і для цього зовнішнього навантаження та розмірів тріщини не перевищують 1 мкм, що сумірно з середнім розміром домена PZT-кераміки. У цьому разі електрична проникність тріщини суттєво впливає на  $[[\mathbf{u}_3]]$ .



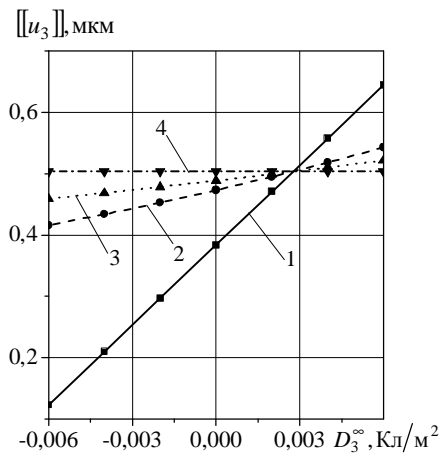


Рис. 4

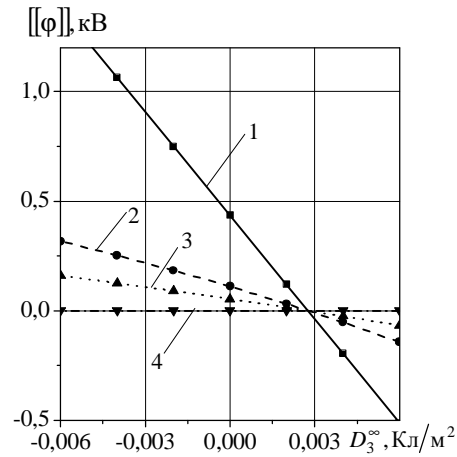


Рис. 5

Можна бачити, що у випадку електропроникної тріщини зовнішнє електричне навантаження не впливає на стрибок нормального переміщення берегів тріщини, тому  $[[u_3]]$  в цьому випадку змінюється лише під дією зовнішнього механічного навантаження. Враховуючи, що стрибок нормального переміщення берегів тріщини тісно пов'язаний з можливістю подальшого розвитку тріщини, можна вважати, що електричне навантаження не сприяє і не перешкоджає розвитку електропроникної тріщини.

У випадку інших видів електричної проникності тріщини аналіз наведених результатів свідчить про лінійну залежність  $[[u_3]]$  від зовнішнього електричного навантаження. Якщо однакоє механічне навантаження, то стрибок нормального переміщення берегів тріщини монотонно зростає при змінах електричної індукції від  $-0,006$  Кл/м<sup>2</sup> до  $0,006$  Кл/м<sup>2</sup>. Це означає, що додатне зовнішнє електричне поле сприяє розвитку тріщини, тоді як від'ємне – перешкоджає такому розвитку. Різні значення кутових коефіцієнтів прямих на цих рисунках пояснюються різними значеннями електричної проникності середовища тріщини. Більшому значенню  $\epsilon_r$  відповідає менше значення кутового коефіцієнта.

Розглянемо далі стрибок електричного потенціалу  $[[\varphi]]$ , що є в точці  $x_1 = 0$  (рис. 5). Очевидно, що у випадку електропроникної тріщини стрибок електричного потенціалу на берегах тріщини завжди дорівнює нулю. Для інших видів електричних граничних умов усі криві мають лінійну функціональну залежність між стрибком електричного потенціалу та зовнішнім електричним навантаженням. Значення  $[[\varphi]]$  монотонно спадають при змінах електричної індукції від  $-0,006$  Кл/м<sup>2</sup> до  $0,006$  Кл/м<sup>2</sup>. Однак нахил цих кривих різний залежно від значення електричної проникності тріщини.

Числові результати свідчать про те, що значення  $[[\varphi]]$  для частково електропроникної та електроізолюваної тріщини дуже великі, особливо при збільшенні за модулем від'ємного електричного поля на нескінченності. Оскільки відповідні стрибки нормальних переміщень дуже малі, то для такого типу електричних граничних умов правильне значне збільшення напруженості електричного поля, що може призвести до електричного пробоя тріщини.

Числові результати обчислення швидкості вивільнення енергії  $G$  при  $\sigma_{33}^{\infty} = 10$  МПа та  $\sigma_{33}^{\infty} = 50$  МПа зображені на рис. 6, 7.

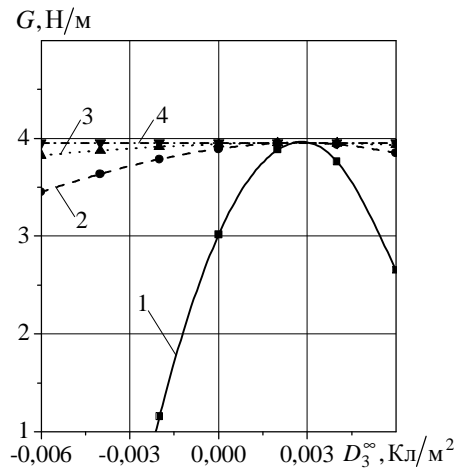


Рис. 6

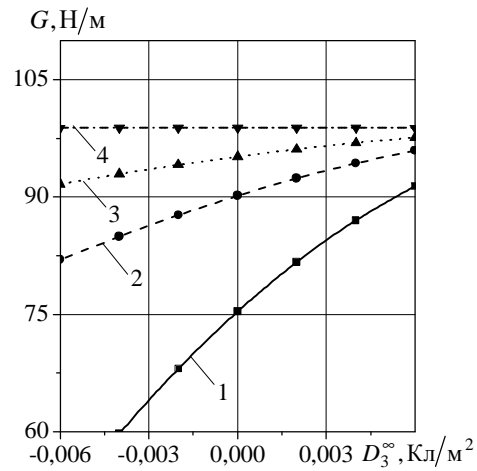


Рис. 7

Як видно з результатів, при незначному зовнішньому механічному навантаженні значення швидкості вивільнення енергії дуже малі і для частково електропроникної тріщини майже збігаються з відповідними значеннями для електропроникної тріщини. Це свідчить про те, що зовнішнє електричне поле має незначний вплив на швидкість вивільнення енергії за відсутності значного механічного навантаження на нескінченності. Причина такого ефекту полягає в тому, що в цьому випадку дуже мале розкриття тріщини, тому умова неперервності стрибка електричного потенціалу на берегах тріщини виконується майже автоматично.

Зі збільшенням механічного навантаження на нескінченності різниця між кривими, що відповідають різним моделям тріщини, збільшується, коли збільшується за модулем і зовнішнє електричне навантаження. У цьому разі значення  $G$  для частково електропроникної тріщини завжди лежать між двома граничними значеннями, які відповідають електропроникній та електроізолюваній тріщинам. Отож, можна зробити висновок, що в моделі електроізолюваної тріщини переоцінюється вплив електричного поля незалежно від зовнішнього механічного навантаження, тоді як зі збільшенням механічного навантаження для електропроникної моделі тріщини цей вплив недооцінюється, але в більш "м'якій" формі.

Якщо великі значення розтягувальних механічних зусиль, то залежність швидкості вивільнення енергії від електричної проникності тріщини значно відрізняється від попередніх випадків і суттєво залежить від знака  $D_3^\infty$ . Бачимо, що при додатному зовнішньому електричному полі значення швидкості вивільнення енергії для різних моделей тріщини наближаються одне до одного, а при від'ємному електричному полі відмінності у значеннях  $G$  залишаються. Причина цього пов'язана з нелінійністю частково електропроникної моделі тріщини.

Видно також, що при досить малому механічному навантаженні графіки швидкості вивільнення енергії, як функції від прикладеного електричного навантаження, мають форму параболи. Зі збільшенням механічного навантаження функціональна залежність швидкості вивільнення енергії стосовно електричного поля стає вже майже лінійною. Це ще одне виявлення нелінійності частково електропроникної моделі тріщини.

Числовий аналіз, проведений для п'єзокерамічних композицій  $\varepsilon$ -класу та  $\kappa$ -класу, засвідчує, що, незважаючи на принципову відмінність в особливостях поведінки основних характеристик поля в околі вершини тріщини, вплив електричної проникності тріщини та електромеханічного навантаження має однакові характерні риси для обох цих типів п'єзокерамічних композицій.

Отже, на підставі проведеного дослідження можна стверджувати, що найбільш детальні, достовірні та фізично обґрунтовані висновки щодо процесів руйнування п'єзоелектричних матеріалів можна отримати, враховуючи не тільки зовнішнє електромеханічне навантаження та геометричні розміри тріщини, а й її електричну проникність. З огляду на це модель частково електропроникної тріщини найбільш придатна і важлива для подібних досліджень.

1. Кудрявцев Б. А., Партон В. З., Ракитин В. И. Механика разрушения пьезоэлектрических материалов. Прямолинейная туннельная трещина на границе с проводником // Прикл. мат. и мех. 1975. Т. 39. № 1. С. 149–159.
2. Suo Z., Kuo C. M., Barnett D. M., Willis J. R. Fracture mechanics for piezoelectric ceramics // J. Mech. Phys. Solids. 1992. Vol. 40. P. 739–765.
3. Партон В. З., Кудрявцев Б. А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М., 1988.
4. Hao T. H., Shen Z. Y. A new electric boundary condition of electric fracture mechanics and its applications // Eng. Fract. Mech. 1994. Vol. 47. P. 793–802.
5. Govorukha V. B., Loboda V. V., Kamlah M. On the influence of the electric permeability on an interface crack in a piezoelectric bimaterial compound // Int. J. Solids Structures. 2006. Vol. 43. P. 1979–1990.

6. Li Q., Chen Y. H. Solution for a semi-permeable interface crack between two dissimilar piezoelectric material // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 2007. Vol. 74. P. 833–844.
7. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1966.

**ВЛИЯНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ МЕЖФАЗНОЙ  
ТРЕЩИНЫ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОГО  
ПОЛЯ ВБЛИЗИ ЕЕ ВЕРШИНЫ**

**Владимир ГОВОРУХА, Владимир ЛОБОДА**

*Днепропетровский национальный университет имени Олеса Гончара,  
просп. Гагарина, 72 49010, Днепропетровск, Украина*

Рассмотрена плоская задача электроупругости для пьезокерамического биматериала с частично электропроводимой межфазной трещиной. Решение задачи построено в замкнутой форме методами теории функций комплексного переменного. Показано, что в окрестности вершины трещины в зависимости от комбинации пьезокерамических материалов, могут возникать различные виды особенностей. Для разных видов нагрузки определены основные параметры разрушения и проанализированы их зависимость от электрической проницаемости трещины.

*Ключевые слова:* пьезоэлектрическая керамика, частично электропроводимая межфазная трещина, скорость высвобождения энергии.

THE INFLUENCE OF ELECTRICAL PERMEABILITY OF AN INTERFACE  
CRACK ON THE CHARACTERISTICS OF THE ELECTROMECHANICAL  
FIELD AT THE VICINITY OF IT TIP

Volodymyr GOVORUKHA, Volodymyr LOBODA

Dnepropetrovsk National University named of Oles Gonchar,  
Gagarin av., 72 49010 Dnepropetrovsk, Ukraine

An electrically limited permeable crack between two semi-infinite piezoelectric spaces is considered. The exact analytical solution of the problem is found. The singular fields are investigated around interface crack tips. Attention is focused on the effect of the permittivity of the medium inside the crack gap on the fracture mechanical parameters.

*Key words:* piezoelectric ceramics, electrically limited permeable interface crack, energy release rate.

Стаття надійшла до редколегії 10.02.2010  
Прийнята до друку 22.12.2010