

УДК 539.3

ТЕРМОМЕХАНІЧНІ МОДЕЛІ КІЛЬКІСНОГО ОПИСУ МЕХАНІЧНОЇ ПОВЕДІНКИ СКЛЯНИХ ТІЛ ОБЕРТАННЯ ПРИ ТЕПЛОВОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Олександр ГАЧКЕВИЧ^{1,2}, Євген ІРЗА¹, Зигмунд КАСПЕРСЬКИЙ²

¹Інститут прикладних проблем механіки і математики ім.
Я.С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 36 79053 Львів, Україна

²Політехніка Опольська,
вул. Станіслава Миколайчука, 5, 45-271 Ополе, Польща

Запропоновано моделі опису термомеханічної поведінки скляних тіл обертання при різних теплових режимах нагрівання (охолодження) і числову методику розв'язання запропонованих задач.

Ключові слова: термообробка, тіла обертання.

Скляні тіла в процесі виготовлення і обробки піддаються різним тепловим навантаженням. Температурні напруження (тимчасові та залишкові), які виникають у таких діях, змінюються в широкому діапазоні залежно від параметрів температурних полів. Значні рівні напружень можуть приводити до руйнування тіл або до погіршення їхніх експлуатаційних властивостей. Тому потрібна методика прогнозування рівня цих напружень, щоб надалі їх мінімізувати.

Оскільки загальна модель, яка б враховувала всі особливості термомеханічної поведінки тіла в широкому діапазоні температур, досить складна в отриманні алгоритмів розв'язків, виникає необхідність у розробці менш складних часткових моделей, які б адекватно відображали термомеханічну поведінку тіла в розглянутих діапазонах температурних змін. Зокрема, простіша структура розв'язків важлива для дослідження зумовлених наявними фізико-механічними процесами функціональних і екологічних параметрів скляних тіл як елементів відповідних пристроїв [1], які отримують на підставі критеріїв, де ці розв'язки вихідні. Ми запропонували таку методику за різних теплових навантажень і температур нагрівання.

На відміну від відомих у літературі [2–4] в цій праці як вихідні прийнято математичні моделі кількісного опису напруженого стану термочутливих скляних тіл обертання (форма яких відмінна від канонічної) в тривимірному формулюванні за врахування особливостей поведінки скла залежно від діапазону температур, в яких є виріб і специфіки температурного навантаження. Розглянуто три моделі, які описують поведінку скляного тіла обертання при різних типових теплових навантаженнях залежно від діапазону температур нагрівання: модель пружного термочутливого тіла; модель пружного термочутливого тіла за врахування залишкових напружень, які формуються в момент склування при охолодженні від

високих температур; модель термочутливого пружного тіла за врахування релаксації залишкових напружень.

Розглянемо віднесене до циліндричної системи координат $O\mathbf{r}\varphi\mathbf{z}$ скляне тіло обертання при осесиметричному розподілі в ньому початкової температури $(\mathbf{t}(\mathbf{r}, \mathbf{z}, 0) = \mathbf{t}_0(\mathbf{r}, \mathbf{z}))$, яке займає область Ω евклідового простору \mathbf{R}^3 і обмежене неперервною за Ліпшицем поверхнею Γ . Тіло нагрівається конвективним способом зовнішнім середовищем з температурою $\mathbf{t}_c(\tau)$ через одну частину поверхні Γ_t , $(\mathbf{r}, \mathbf{z}) \in \Gamma_t$ і тепловим потоком $\mathbf{q}(\mathbf{r}, \mathbf{z}, \tau)$ через іншу частину Γ_q , $(\mathbf{r}, \mathbf{z}) \in \Gamma_q$, $\Gamma_t \cup \Gamma_q = \Gamma$ за наявності розподілених джерел тепла потужності $\mathbf{Q}(\mathbf{r}, \mathbf{z}, \tau)$, $(\mathbf{r}, \mathbf{z}) \in \Omega$. За механічні межові умови приймаємо класичні: на частині Γ_u поверхні Γ тіла задані переміщення $\bar{\mathbf{u}} = (\mathbf{u}_r^0, \mathbf{u}_z^0)$, на частині Γ_σ - силове навантаження з вектором $\bar{\mathbf{p}} = (\mathbf{p}_r, \mathbf{p}_z)$, $\Gamma_u \cup \Gamma_\sigma = \Gamma$.

Температурне поле описуємо рівнянням теплопровідності [5]

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mathbf{k} \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mathbf{k} \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial z} \right) = \rho \mathbf{c} \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \tau} \quad (1)$$

і такими початковими та граничними умовами:

$$\mathbf{t}(\mathbf{r}, \mathbf{z}, 0) = \mathbf{t}_0; \quad (2)$$

$$\left[\mathbf{k} \left(\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial r} \mathbf{n}_r + \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial z} \mathbf{n}_z \right) + \alpha (\mathbf{t} - \mathbf{t}_c) \right]_{\Gamma_t} = 0; \quad \left[\mathbf{k} \left(\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial r} \mathbf{n}_r + \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial z} \mathbf{n}_z \right) + \mathbf{q} \right]_{\Gamma_q} = 0, \quad (3)$$

які відповідають заданим тепловим умовам. Тут \mathbf{k} - коефіцієнт теплопровідності; \mathbf{c} - питома теплоємність; ρ - густина; α - коефіцієнт тепловіддачі; $\mathbf{n}_r, \mathbf{n}_z$ - компоненти зовнішньої нормалі до поверхні тіла.

Зв'язок між тензором напружень $\{\sigma\}$ і тензором деформацій $\{\varepsilon\}$ відповідає типу теплових навантажень і інтервалам температур, в яких розташоване тіло.

Для теплових процесів в інтервалах температур, які є меншими за температуру склування \mathbf{t}_g [2], коли в тілі є тільки пружні температурні деформації $\{\varepsilon_t\}$, рівняння стану приймаємо у вигляді [5]

$$\{\sigma\} = [\mathbf{D}](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_t\}). \quad (4)$$

При охолодженні виробів із скла від температур, які є більшими за температуру склування \mathbf{t}_g , в рівнянні стану враховуємо залишкові $\{\varepsilon_0\}$ деформації, що формуються при охолодженні від високих температур у момент склування [2]. Тоді

$$\{\sigma\} = [\mathbf{D}](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_t\} - \{\varepsilon_0\}). \quad (5)$$

При нагріванні виробів із скла (з рівнем залишкових напружень σ_0) від початкової натуральної температури до верхньої температури відпалювання t_ν^b [4] і витримкою при цій температурі, і подальшому охолодженні до натуральної температури (коли характерні релаксаційні процеси), і міцність конструкції оцінюють за рівнем еквівалентних напружень $\sigma_{екв}$, рівняння стану приймають такими [4]:

$$\{\sigma\} = [\mathbf{D}](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_t\}) \text{ при } t < t_\nu^b, \sigma_{екв} = \sigma_0 \exp(-G\tau/\eta_c) \text{ при } t = t_\nu^b, \quad (6)$$

$$\text{де } \sigma_{екв} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})^2 + (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{rr} - \sigma_{zz})^2 + 6\sigma_{rz}^2}.$$

Тензори напружень $\{\sigma\}$ і тензори деформацій $\{\varepsilon\}$, $\{\varepsilon_t\}$, $\{\varepsilon_0\}$ для осесиметричного випадку подамо в циліндричній системі координат у такій матричній формі:

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= \{\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{zz}, \sigma_{rz}\}^T; \{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\varphi\varphi}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{rz}\}^T; \\ \{\varepsilon_t\} &= \int_{t_0}^t \alpha_t(\xi) d\xi \cdot \{1, 1, 1, 0\}^T; \{\varepsilon_0\} = -\alpha_t \Phi \cdot \{1, 1, 1, 0\}^T. \end{aligned} \quad (7)$$

Функція навантаження $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{z})$ відповідно до гіпотези "заморожування" Бартенєва [2] (модифікована на тривимірний випадок [5]) визначається співвідношенням

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial t}{\partial \mathbf{r}}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{z}} = \frac{\partial t}{\partial \mathbf{z}} \text{ при } t(\mathbf{r}, \mathbf{z}, \tau_g) = t_g, \quad (8)$$

де α_t - коефіцієнт лінійного температурного розширення; τ_g - момент часу в який досягається температура склування t_g .

Матриця пружних характеристик $[\mathbf{D}]$ набуває вигляду

$$[\mathbf{D}] = \frac{\mathbf{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5(1-2\nu) \end{bmatrix}.$$

Тут \mathbf{E} - модуль пружності; ν - коефіцієнт Пуассона.

В області Ω виконуються рівняння рівноваги (квазістатичне формулювання) і механічні граничні умови, тобто,

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial \mathbf{z}} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{\mathbf{r}} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial \mathbf{z}} + \frac{\sigma_{rz}}{\mathbf{r}} = 0; \quad (9)$$

$$\mathbf{n}_r \sigma_{rr} + \mathbf{n}_z \sigma_{zr} - \mathbf{p}_r = 0, \quad \mathbf{n}_r \sigma_{rz} + \mathbf{n}_z \sigma_{zz} - \mathbf{p}_z = 0 \text{ на } \Gamma_\sigma, \quad (10)$$

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{u}_r^0, \mathbf{u}_z = \mathbf{u}_z^0 \text{ на } \Gamma_u.$$

Обмежуємось випадком малих деформацій, коли [3]

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial \mathbf{u}_r}{\partial r}, \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{\mathbf{u}_r}{r}, \varepsilon_{zz} = \frac{\partial \mathbf{u}_z}{\partial z}, \varepsilon_{rz} = \frac{\partial \mathbf{u}_r}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{u}_z}{\partial r}. \quad (11)$$

Задачі формулюємо в переміщеннях. Залежності (1)-(11) становлять повну систему співвідношень для визначення температурного поля, компонент вектора переміщень, компонент тензорів деформацій і напружень, якщо задана температура навколишнього середовища t_c , коефіцієнт теплообміну α , тепловий потік \mathbf{q} , зовнішнє силове навантаження $\bar{\mathbf{p}}$, переміщення $\bar{\mathbf{u}}$ і потужності внутрішніх джерел тепла \mathbf{Q} .

У рамках цих моделей запропоновано відповідні алгоритми визначення параметрів температурних і механічних процесів. Оскільки геометрична конфігурація області, яку займає тіло, часто досить складна, а системи вихідних диференціальних рівнянь моделей, які описують наявні фізико-механічні процеси, нелінійні, то для розв'язання використовують метод зважених нев'язок в поєднанні з методом кінцевих елементів. Такий підхід дає змогу отримати ефективні наближені розв'язки сформульованих комплексних задач. Схема розв'язування таких задач охоплює розбиття області на елементи; апроксимацію невідомих функцій на елементі розбиття; отримання на цій підставі систем алгебричних рівнянь стосовно невідомих функцій у вузлах елементів за врахування специфіки матеріальних зв'язків у різних температурних інтервалах і алгоритм розв'язування цих систем.

Розглянемо задачу теплопровідності (1)-(3). Застосовуючи метод зважених нев'язок (зокрема метод Гальоркіна) в поєднанні з методом кінцевих елементів рівняння теплопровідності (1) з рахуванням граничних умов (3), зводимо до вигляду [6]

$$[\mathbf{C}_t] \frac{d\{\mathbf{T}\}}{d\tau} + [\mathbf{K}_t]\{\mathbf{T}\} = \{\mathbf{f}_t\}. \quad (12)$$

Тут $[\mathbf{C}_t]$, $[\mathbf{K}_t]$, $\{\mathbf{f}_t\}$ - відповідні температурні матриці "жорсткості" і вектор "навантаження".

Використовуючи метод кінцевих різниць (розділивши проміжок $[0, \tau_k]$ на дискретну множину точок τ_0, τ_1, \dots з кроком $\Delta\tau$), із (12) отримуємо систему нелінійних алгебричних рівнянь

$$\left([\mathbf{C}_t] + \theta\Delta\tau [\mathbf{K}_t]\right)\{\mathbf{T}\}_{n+1} - \left([\mathbf{C}_t] - (1-\theta)\Delta\tau [\mathbf{K}_t]\right)\{\mathbf{T}\}_n = \{\mathbf{f}_t\}_n, \quad (13)$$

де індексами n позначені значення величин в моменти часу τ_n , відповідно.

Завдяки вибору точки колокації співвідношення (13) можна перетворити в одну з таких відомих скінчено-різницевих схем для рівняння (12), а саме

[5]: при $\theta = 0$ - схему Ейлера (схема з різницею вперед), $\theta = 0,5$ - схему Кранка-Нікольсона (схема з центральною різницею), $\theta = 0,66667$ – метод Гальоркіна, $\theta = 1$ – схему з різницею назад. Систему (13) розв'язуємо з використанням ітераційних методів [7].

Розглянемо три типові моделі, які описують поведінку скляного тіла обертання при різному тепловому навантаженні залежно від діапазону температур нагрівання.

1. *Модель пружного термочутливого тіла.* Якщо відоме температурне поле $\mathbf{t}(\mathbf{r}, \mathbf{z}, \tau)$, то система рівнянь (4), (9)-(11), з використанням методу зважених нев'язок в поєднанні з методом кінцевих елементів, зводиться (як і задача теплопровідності) до системи нелінійних алгебричних рівнянь вигляду

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{U}(\tau)\} = \{\mathbf{F}_0(\tau)\}, \quad (14)$$

стосовно невідомих значень переміщень $\mathbf{U}(\tau)$ у вузлах елементів [5]. Тут $[\mathbf{K}]$, $\{\mathbf{F}_0(\tau)\}$, - відповідно, матриця жорсткості і вектор навантаження.

2. *Модель пружного термочутливого тіла за врахування залишкових напружень, які формуються при охолодженні від високих температур у момент склування.* Якщо відоме температурне поле на основі гіпотези "заморожування" (8) знаходимо розподіл градієнтів функції навантаження Φ , а саму функцію навантаження знаходимо, використовуючи метод простої ітерації [7], то даємо її у вигляді

$$\Phi_{ij} = \frac{\Phi_{i+1j} + \Phi_{i-1j} + \Phi_{ij+1} + \Phi_{ij-1} - \left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}} \right)_{i+1j} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}} \right)_{i-1j} \right) (\mathbf{h}_{i+1j}^2 + \mathbf{h}_{i-1j}^2)}{4 - 8(\mathbf{h}_{i+1j} + \mathbf{h}_{i-1j})} - \frac{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{z}} \right)_{ij} (\mathbf{h}_{i+1j} - \mathbf{h}_{i-1j}) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{z}} \right)_{ij} (\mathbf{h}_{ij+1} - \mathbf{h}_{ij-1}) - \left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{z}} \right)_{ij+1} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{z}} \right)_{ij-1} \right) (\mathbf{h}_{ij+1}^2 + \mathbf{h}_{ij-1}^2)}{4 - 8(\mathbf{h}_{ij+1} + \mathbf{h}_{ij-1})}.$$

Тут $i, i+1, i-1, j, j+1, j-1$ – відповідні номери сусідніх вузлів елементів розбиття; \mathbf{h}_{i+1j} , \mathbf{h}_{i-1j} , \mathbf{h}_{ij+1} , \mathbf{h}_{ij-1} – відстань між відповідними сусідніми вузлами.

По відомому температурному полі $\mathbf{t}(\mathbf{r}, \mathbf{z}, \tau)$ і функції навантаження $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{z})$ система рівнянь (5), (9)-(11), з використанням методу зважених нев'язок в поєднанні з методом кінцевих елементів, зводиться, як і вище, до системи нелінійних алгебричних рівнянь вигляду

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{U}(\tau)\} = \{\mathbf{F}_0(\tau)\} + \{\Phi_0\}, \quad (15)$$

де $\{\Phi_0\}$ – відповідний вектор навантаження.

3. *Модель термочутливого пружного тіла з врахуванням релаксації залишкових напружень.* Система рівнянь (6), (9)-(11), як і в попередніх випадках, зводиться до системи нелінійних алгебричних рівнянь вигляду (14).

Запропоновані моделі використані для знаходження термонапруженого стану циліндра (висотою 250мм, внутрішнім радіусом 30мм і товщиною 10мм). Циліндр виготовлений зі скла С-93 [5].

На рис.1 зображено режим нагрівання циліндра в інтервалі температур, коли скло поводить себе як пружне тіло. Кривою 1 показано зміну температури на поверхнях циліндра, а кривими 2 - відповідні максимальні еквівалентні напруження в циліндрі.

На рис.2 проілюстровано розподіл залишкових напружень у локально нагрітій області $30 \leq r \leq 40$ мм; $100 \leq z \leq 150$ мм і початково сталою температурою, яка дорівнює $t_0 = 850^\circ\text{C}$ (інші області мають температуру 20°C). Циліндр охолоджується зовнішнім середовищем з температурою $t_c = 20^\circ\text{C}$ і коефіцієнтом тепловіддачі $\alpha = 150 \text{ Вт}/\text{м}^2 \cdot \text{К}$ (при $Q=0, q=0$).

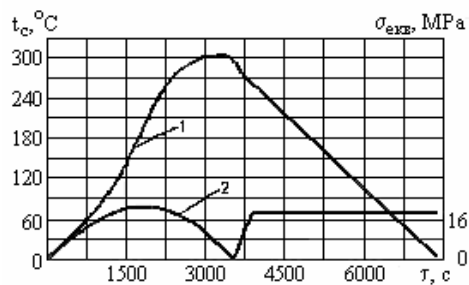


Рис. 1

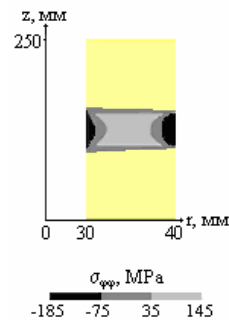


Рис. 2

Отримані результати добре узгоджуються з відомими в літературі результатами термомеханічної поведінки скляних виробів у цих областях температурного навантаження [4].

Запропонований підхід до моделювання процесів термообробки, залежно від діапазону температур, в яких перебуває тіло, дає змогу суттєво спростити розрахунки термонапруженого стану скляних тіл обертання завдяки спрощенню вихідних систем диференціальних рівнянь, що описують поведінку тіла.

1. Гаек М., Иванова И., Мулицка И., Рябов С., Шварцбург Л. Аспекты специальной политики в области безопасности производственной среды. – Москва; Ополе, 2005.
2. Бартенев Г. М. Механические свойства и тепловая обработка стекла. – М., 1960.
3. Ковальчук Б. И., Лебедев А. А., Уманский С. Э. Механика неупругого деформирования материалов и элементов конструкций. – К., 1987.

4. Дяківський С. І., Житлинський Г. С., Ячишин Й. М. Термічне оброблення і напруження у склі. – Львів, 2003.
5. Ірза Є. М. Математична модель формування залишкових напружень у скляних тілах обертання під час охолодження // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2008. – № 2. – С. 14–19.
6. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L. Finite Element Method: Vol 1. The Basis. – London, 2000.
7. Турчак Л.И. Основы численных методов. – М., 1987.

**ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ КОЛИЧЕСТВЕННОГО
ОПИСАНИЯ МЕХАНИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ СТЕКЛЯННЫХ ТЕЛ
ВРАЩЕНИЯ ПРИ ТЕПЛОВОЙ НАГРУЗКЕ**

Александр ГАЧКЕВИЧ^{1,2}, Евгений ИРЗА¹, Зигмунд КАСПЕРСКИЙ²

¹*Институт прикладных проблем механики и математики
им. Я.С Подстригача НАН Украины, ул. Научная, 3б 79053 Львов, Украина*

²*Политехника Опольская,
ул. Станислава Николайчука, 5 45-271 Ополе, Польша*

Предложены модели описания термомеханического поведения стеклянных тел вращения при различных тепловых режимах нагрева (охлаждения) и числовую методику решения сформулированных задач.

Ключевые слова: термообработка, тела вращения.

THERMOMECHANICAL MODELS THE QUANTITATIVE DESCRIPTION
THE MECHANICAL BEHAVIOUR OF GLASS SOLIDS OF ROTATION
UNDER THERMAL LOADING

Oleksandr HACHKEVYCH^{1,2}, Yevgen IRZA¹, Zigmund KASPERSKI²

¹*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics,
Naukova Str., 3b, 79053 Lviv, Ukraine*

²*Technical University of Opole,
Stanislawa Mikolajchuka Str., 5, 45-271 Opole, Poland*

The models of description of thermomechanical behavior of glass solids of rotation under different heating (cooling) regimes and numerical procedure to solve the proposed problems are proposed.

Key words: heat treatment, bodies of rotation.

Стаття надійшла до редколегії 12.11.2009
Прийнята до друку 22.12.2010