ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2009. *Ser. Mech. Math. 2009.*
Вип. 71. С. 220–234 *Is. 71. P. 220–234*

УДК 517.95

ТОЧКОВІ ОСОБЛИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКУ НЕЛІНІЙНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ВОЛЬТЕРРА

Оксана ЧМИР

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності,
79000, Львів, вул. Клепарівська, 35
e-mail: o_chmyr@yahoo.com

Використовуючи принцип Шаудера, знайдено достатні умови розв'язності нелінійного інтегрального рівняння Вольтерра з полярним ядром у ваговому L^1 - просторі функцій з точковими степеневими особливостями.

Ключові слова: нелінійне інтегральне рівняння, ваговий функційний простір, неперервний оператор, компактна множина, теорема Шаудера про нерухому точку.

1. Вступ. У багатьох працях досліджували умови існування та поведінку розв'язків лінійних і півлінійних еліптичних та параболічних рівнянь і систем рівнянь на межі області та в окремих її точках, коли функції задані на межі області є узагальненими (див., наприклад, бібліографію в [1], а також [2], [3], [4], [5]).

Враховуючи наявне дослідження функції Гріна загальних лінійних параболічних крайових задач [6], [7], [8], природно для дослідження узагальнених крайових задач для півлінійних параболічних рівнянь використовувати метод зведення їх до еквівалентного нелінійного інтегрального рівняння Вольтерра у ваговому L^1-просторі з ядром – функцією Гріна.

Наша мета – вивчити характер розв'язку нелінійного інтегрального рівняння Вольтерра з полярним ядром у просторі функцій, які можуть мати особливості в окремих точках межі області. Одержані результати мають застосування до розв'язності узагальнених крайових задач для півлінійного параболічного рівняння у просторі функцій з точковими особливостями.

2. Основна частина.

2.1. Основні позначення та допоміжні твердження. Нехай $n \in \mathbb{N}$, Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею $S = \partial\Omega$ класу C^∞, $Q = \Omega \times (0, T]$, $\Sigma = S \times (0, T]$, $0 < T < +\infty$.

Використовуватимемо позначення: $||x-y||$ – евклідова відстань в $\mathbb{R}^n$; $P=(x,t)$, $M=(y,\tau)$, $\widehat{P}=(\hat{x},\hat{t})$, $d(x,t;y,\tau)=|PM|=(||x-y||^2+|t-\tau|)^{\frac{1}{2}}$ – параболічна відстань в $\mathbb{R}^{n+1}$; η – мультиіндекс з компонентами $(\eta_1,...,\eta_n)$, $\eta_i\in\mathbb{Z}_+$, $i=\overline{1,n}$, $|\eta|=\eta_1+...+\eta_n$ – довжина мультиіндексу η, $D^\eta\equiv D_x^\eta=\frac{\partial^{|\eta|}}{\partial x_1^{\eta_1}\cdot...\cdot\partial x_n^{\eta_n}}$.

Нехай $\varepsilon_0>0$ – задане число таке, що паралельна до S поверхня S_{ε_0} є класу C^∞ та надалі вважатимемо, що $\varepsilon_0\leqslant 1$. Через $\widetilde{\varrho}(\sigma)$ позначатимемо нескінченно диференційовну невід'ємну функцію, яка має порядок σ при $\sigma\to 0$ та володіє властивістю $M_1^{'}\sigma\leqslant\widetilde{\varrho}(\sigma)\leqslant M_2^{'}\sigma$, де $M_1^{'}$, $M_2^{'}$ – додатні сталі.

При довільній фіксованій точці $\widehat{P}\in\overline{Q}$ введемо функцію ϱ_0 точки $P\in\overline{Q}$ таку, що $0<\varrho_0(P,\widehat{P})\leqslant 1$ та $\varrho_0(P,\widehat{P})=\begin{cases}\widetilde{\varrho}(|P\widehat{P}|), & |P\widehat{P}|<\frac{\varepsilon_0}{2},\\ 1, & |P\widehat{P}|\geqslant\varepsilon_0.\end{cases}$

При $k\in\mathbb{R}$ введемо функційний простір
$$\mathcal{M}_k(Q,\,\widehat{P})=\{\mathrm{v}:\,||\mathrm{v};\,\widehat{P}||_k=\int_Q\varrho_0^k(x,t,\hat{x},\hat{t})|\mathrm{v}(x,t)|\,dxdt<+\infty\}.$$

Нехай
$$(H\mathrm{v})(x,t)=\int_0^t d\tau\int_\Omega\mathcal{K}(x,t;y,\tau)\cdot F_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau))\,dy,\ (x,t)\in Q,$$
$$H_1\mathrm{v}=H\mathrm{v}+h_0,$$
де $\mathcal{K}(x,t;y,\tau)((x,t;y,\tau)\in\overline{Q}\times\overline{Q})$ – ядро оператора H, що володіє такими властивостями:

1) $\mathcal{K}(x,t;y,\tau)=0$ при $t<\tau$;
2) $\mathcal{K}(x,t;y,\tau)$ при $(x,t)\neq(y,\tau)$ має похідні до порядку $s+n+2$, а в околі діагоналі $(x,t)=(y,\tau)$ разом із своїми похідними має такі оцінки:
$$|\frac{\partial^{\eta_0}}{\partial\tau^{\eta_0}}D_y^\eta\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\leqslant C_{\eta,\,\eta_0}[d(x,t;y,\tau)]^{s-|\eta|-2\eta_0},$$
де $-n-2<s<0$, $|\eta|+2\eta_0<s+n+2$, $C_{\eta,\,\eta_0}$ – додатні сталі;
3) для довільних η, $|\eta|<s+n+2$, $-n-2<s<0$ існують додатні сталі $\widetilde{C}_\eta$ такі, що $\int_Q|D_x^\eta\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\,dxdt\leqslant\widetilde{C}_\eta$ для довільних $(y,\tau)\in\overline{Q}$,

функція $F_0(x,t,\mathrm{v})$ визначена в $Q\times(-\infty,+\infty)$, функція h_0 визначена в Q.

Прикладом ядра $\mathcal{K}$ є функція Гріна першої крайової задачі для рівняння теплопровідності при $s=-n$, $n\geqslant 1$.

Подібно до результатів [6] доведено таку властивість функції $\mathcal{K}$.
Нехай $(\hat{x},\hat{t})\in\overline{Q}$, $r>-n-2$, $-n-2<s<0$, $|\eta|+2\eta_0<s+n+2$. *Тоді*
$$\Big|\frac{\partial^{\eta_0}}{\partial t^{\eta_0}}D_x^\eta\int_Q\mathcal{K}(x,t;y,\tau)\varrho_0^r(y,\tau,\hat{x},\hat{t})\,dyd\tau\Big|\leqslant$$
$$\leqslant\widehat{L}_{\eta,\,\eta_0}\max\{[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{r+2+n+s-|\eta|-2\eta_0},\,1\}\quad\forall(x,t)\in\overline{Q},\qquad(A)$$
де $\widehat{L}_{\eta,\eta_0}$ *– додатні сталі.*

У просторі $\mathcal{M}_k(Q,\,\widehat{P})$ при $k>-n-2$ розглянемо інтегральне рівняння
$$\mathrm{v}=H_1\mathrm{v}.\qquad(1)$$

У [9] отримано існування розв'язку інтегрального рівняння (1) у просторі $\mathcal{M}_k(Q,\ \widehat{P})$. Зокрема, при $-n-2 < s < 0$, $k > -n-s-2$, $h_0 \in \mathcal{M}_k(Q,\ \widehat{P})$, $F_0(x,t,\mathrm{v}) = |\mathrm{v}|^q$, де $q \in (0, \min\{\frac{n+2}{k+n+2}; 1\})$, існує розв'язок рівняння (1) у просторі $\mathcal{M}_k(Q,\ \widehat{P})$.

Для довільної фіксованої точки $\widehat{P} = (\hat{x}, \hat{t}) \in \overline{Q}$ та $\alpha \in \mathbb{R}_- \cup \{0\}$ введемо функційний простір

$$\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\ \widehat{P}) = \{\mathrm{v} \in C(\overline{Q} \setminus \{\widehat{P}\}) : \varrho_0^{-\alpha}(y,\tau,\hat{x},\hat{t})\mathrm{v}(y,\tau) \in C(\overline{Q}) \quad (||\mathrm{v};\ \widehat{P}||'_\alpha = \sup_{(y,\tau)\in\overline{Q}} \varrho_0^{-\alpha}(y,\tau,\hat{x},\hat{t})|\mathrm{v}(y,\tau)| < +\infty)\}.$$

Оскільки при $\mathrm{v} \in \widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\ \widehat{P})$ та $k + \alpha > -n-2$ виконується

$$||\mathrm{v};\ \widehat{P}||_k = \int\limits_Q \varrho_0^k(M,\widehat{P})|\mathrm{v}(y,\tau)|\,dyd\tau \leqslant \widehat{C}\int\limits_Q \varrho_0^k(M,\widehat{P})[\varrho_0(M,\widehat{P})]^\alpha\,dyd\tau \leqslant$$

$$\leqslant \widehat{C} \int\limits_{\{M:\,|M\widehat{P}|<\varepsilon_0\}} [\varrho_0(M,\widehat{P})]^{k+\alpha}\,dyd\tau + \widehat{C} \int\limits_{\{M:\,|M\widehat{P}|>\varepsilon_0\}} dyd\tau < +\infty,$$

то $\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\ \widehat{P}) \subset \mathcal{M}_k(Q,\ \widehat{P})$ при $k > -\alpha - n - 2$, де $\widehat{C}$ – додатна стала.

Нехай $\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\,\widetilde{C}}(\overline{Q},\ \widehat{P}) = \{\mathrm{v} \in \widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\ \widehat{P}) : ||\mathrm{v};\ \widehat{P}||'_\alpha \leqslant \widetilde{C}\}$ – замкнена куля радіуса $\widetilde{C}$ у просторі $\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\ \widehat{P})$.

Нехай $h_0 \in \widetilde{\mathcal{M}}_l(\overline{Q},\widehat{P})$, де $l \in \mathbb{R}$. Зі зробленого зауваження випливає, що $h_0 \in \mathcal{M}_k(Q,\ \widehat{P})$ при $k > -l-n-2$.

Лема 1. *Нехай $q \in (0,1)$, $-n-2 < s < 0$, $-\frac{n+s+2}{q} < \alpha \leqslant 0$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\sigma = \sigma(\varepsilon) > 0$ таке, що для довільної підобласті $V \subset Q$, міра якої $m(V)$ менша за σ, для довільних $(x,t) \in \overline{Q}$ виконується нерівність*

$$[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha} \int\limits_{V\cap Q} [\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha q} \cdot |\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\,dyd\tau < \varepsilon.$$

Доведення. Доведення леми проводимо подібно до доведення леми 1 [9], розділяючи особливості функції $\varrho_0^{\alpha q}(y,\tau,\hat{x},\hat{t})\mathcal{K}(x,t;y,\tau)$. Нехай V – довільна підобласть в Q, $(\hat{x},\hat{t})$ – фіксована точка $\overline{Q}$, $\sigma \in (0,1)$ – яке-небудь число. Далі позначатимемо через C_j, $j = \overline{1,13}$ – додатні сталі.

1. Нехай точка $(x,t) \in \overline{Q}$ така, що $||x-\hat{x}|| < \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$, $|t-\hat{t}| < \frac{\sigma^2}{2}$.

а) Якщо $||y-\hat{x}|| < \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$, $|\tau-\hat{t}| < \frac{\sigma^2}{2}$, то $||x-y|| \leqslant ||x-\hat{x}|| + ||y-\hat{x}|| < \frac{2\sigma}{\sqrt{2}}$, $|t-\tau| < \sigma^2$, тоді

$$\mathcal{I}_1(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma) =$$

$$= [\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha} \int\limits_{V\cap\{(y,\tau)\in Q:\,||y-\hat{x}||<\frac{\sigma}{\sqrt{2}},\,|\tau-\hat{t}|<\frac{\sigma^2}{2}\}} [\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha q} \cdot |\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\,dyd\tau \leqslant$$

$$\leqslant [\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha} \int\limits_{\substack{V\cap\{(y,\tau)\in Q:\, ||x-y||<\frac{\sigma}{2\sqrt{2}},\, |t-\tau|<\frac{\sigma^2}{8};\\ \frac{\sigma}{2\sqrt{2}}\leqslant||y-\hat{x}||<\frac{\sigma}{\sqrt{2}},\, \frac{\sigma^2}{8}\leqslant|\tau-\hat{t}|<\frac{\sigma^2}{2}\}}} [\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha q}\cdot|\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\,dyd\tau+$$

$$+[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha} \int\limits_{\substack{V\cap\{(y,\tau)\in Q:\, ||x-y||\geqslant\frac{\sigma}{2\sqrt{2}},\, |t-\tau|\geqslant\frac{\sigma^2}{8};\\ ||y-\hat{x}||<\frac{\sigma}{2\sqrt{2}},\, |\tau-\hat{t}|<\frac{\sigma^2}{8}\}}} [\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha q}\cdot|\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\,dyd\tau+$$

$$+[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha} \int\limits_{\substack{V\cap\{(y,\tau)\in Q:\, ||x-y||\geqslant\frac{\sigma}{2\sqrt{2}},\, |t-\tau|\geqslant\frac{\sigma^2}{8};\\ \frac{\sigma}{2\sqrt{2}}\leqslant||y-\hat{x}||<\frac{\sigma}{\sqrt{2}},\, \frac{\sigma^2}{8}\leqslant|\tau-\hat{t}|<\frac{\sigma^2}{2}\}}} [\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha q}\cdot|\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\,dyd\tau=$$

$$=J_1(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma)+J_2(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma)+J_3(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma). \qquad (2)$$

Зробимо заміну змінних в інтегралі J_1

$$\begin{array}{lll} y_i=\hat{x}_i+\xi_i\sigma, & x_i=\hat{x}_i+s_i\sigma, & i=\overline{1,n}. \\ \tau=\hat{t}+\xi_{n+1}\sigma^2; & t=\hat{t}+s_{n+1}\sigma^2, & \end{array} \qquad (3)$$

У нових змінних

$M=\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n,\xi_{n+1})$, $|\overline{\xi}|=\sqrt{\xi_1^2+...+\xi_n^2+|\xi_{n+1}|}=\sqrt{||\xi||^2+|\xi_{n+1}|}$,

$|M\widehat{P}|=\sqrt{||y-\hat{x}||^2+|\tau-\hat{t}|}=\sqrt{\sigma^2||\xi||^2+\sigma^2|\xi_{n+1}|}=\sigma\cdot|\overline{\xi}|$,

$|MP|=\sqrt{||y-x||^2+|\tau-t|}=\sqrt{\sigma^2||s-\xi||^2+\sigma^2|s_{n+1}-\xi_{n+1}|}=\sigma\cdot d(\overline{s};\overline{\xi})$,

де $d(\overline{s};\overline{\xi})=\sqrt{||s-\xi||^2+|s_{n+1}-\xi_{n+1}|}$, $dyd\tau=\sigma^{n+2}d\xi d\xi_{n+1}$. Тоді

$$J_1(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma)=$$

$$=[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha} \int\limits_{\substack{V\cap\{(y,\tau)\in Q:\, ||x-y||<\frac{\sigma}{2\sqrt{2}},\, |t-\tau|<\frac{\sigma^2}{8}\\ \frac{\sigma}{2\sqrt{2}}\leqslant||y-\hat{x}||<\frac{\sigma}{\sqrt{2}},\, \frac{\sigma^2}{8}\leqslant|\tau-\hat{t}|<\frac{\sigma^2}{2}\}}} [\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha q}\cdot|\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\,dyd\tau\leqslant$$

$$\leqslant[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha}C_1\cdot\sigma^{\alpha q+n+s+2} \int\limits_{\{(\xi,\xi_{n+1}):||s-\xi||<\frac{1}{2\sqrt{2}},\, |s_{n+1}-\xi_{n+1}|<\frac{1}{8}\}} d^s(\overline{s};\overline{\xi})\,d\xi d\xi_{n+1}\leqslant$$

$$\leqslant C_2\sigma^{\alpha(q-1)+2+n+s},$$

де збіжність інтеграла випливає з формули 3 [10, с. 588].

Проводячи подібну заміну змінних (3) в інтегралі J_2, одержуємо

$$J_2(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma)=$$

$$=[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha} \int\limits_{\substack{V\cap\{(y,\tau)\in Q:\, ||x-y||\geqslant\frac{\sigma}{2\sqrt{2}},\, |t-\tau|\geqslant\frac{\sigma^2}{8};\\ ||y-\hat{x}||<\frac{\sigma}{2\sqrt{2}},\, |\tau-\hat{t}|<\frac{\sigma^2}{8}\}}} [\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha q}\cdot|\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\,dyd\tau\leqslant$$

$$\leqslant[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha}C_3\cdot\sigma^{\alpha q+n+s+2} \int\limits_{\{(\xi,\xi_{n+1}):||\xi||<\frac{1}{2\sqrt{2}},\, |\xi_{n+1}|<\frac{1}{8}\}} |\overline{\xi}|^{\alpha q}\,d\xi d\xi_{n+1}\leqslant$$

$$\leqslant C_4 \cdot \sigma^{\alpha(q-1)+n+s+2},$$

де збіжність інтеграла випливає з формули 3 [10, с. 588].

$$J_3(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma) =$$

$$= [\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha} \int\limits_{\substack{V\cap\{(y,\tau)\in Q:\, ||x-y||\geqslant \frac{\sigma}{2\sqrt{2}},\, |t-\tau|\geqslant \frac{\sigma^2}{8};\\ \frac{\sigma}{2\sqrt{2}}\leqslant ||y-\hat{x}||<\frac{\sigma}{\sqrt{2}},\, \frac{\sigma^2}{8}\leqslant|\tau-\hat{t}|<\frac{\sigma^2}{2}\}}} [\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha q}\cdot|\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\,dyd\tau \leqslant$$

$$\leqslant C_5\sigma^{\alpha(q-1)+s}m(V).$$

Отже, при $m(V) < \sigma^{n+2}$ із (2) та вище описаних міркувань, одержуємо

$$\mathcal{I}_1(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma) \leqslant C_6(\sigma^{\alpha(q-1)+2+n+s} + \sigma^{\alpha(q-1)+2+n+s} + \sigma^{\alpha(q-1)+s}m(V)) \leqslant$$

$$\leqslant C_7\sigma^{\alpha(q-1)+2+n+s}.$$

За заданим $\varepsilon > 0$, вибравши $\sigma < \min\{(\frac{\varepsilon}{C_7})^{\frac{1}{\alpha(q-1)+n+s+2}}; 1\}$, при $(x,t)\in\overline{Q}$ такій, що $||x-\hat{x}|| < \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$, $|t-\hat{t}| < \frac{\sigma^2}{2}$ та $m(V) < \sigma^{n+2}$, матимемо

$$\mathcal{I}_1(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

б) При $(y,\tau)\in\overline{Q}$ такій, що $||y-\hat{x}|| \geqslant \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$, $|\tau-\hat{t}| \geqslant \frac{\sigma^2}{2}$ подібно знаходимо

$$\mathcal{I}_2(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma) =$$

$$= [\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha} \int\limits_{V\cap\{(y,\tau)\in Q:\, ||y-\hat{x}||\geqslant\frac{\sigma}{\sqrt{2}},\, |\tau-\hat{t}|\geqslant\frac{\sigma^2}{2}\}} [\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha q}\cdot|\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\,dyd\tau \leqslant$$

$$\leqslant [\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha} \int\limits_{\substack{V\cap\{(y,\tau)\in Q:\, ||y-\hat{x}||\geqslant\frac{\sigma}{\sqrt{2}},\, |\tau-\hat{t}|\geqslant\frac{\sigma^2}{2};\\ ||x-y||<\frac{\sigma}{2\sqrt{2}},\, |t-\tau|<\frac{\sigma^2}{8}\}}} [\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha q}\cdot|\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\,dyd\tau+$$

$$+[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha} \int\limits_{\substack{V\cap\{(y,\tau)\in Q:\, ||y-\hat{x}||\geqslant\frac{\sigma}{\sqrt{2}},\, |\tau-\hat{t}|\geqslant\frac{\sigma^2}{2};\\ ||x-y||\geqslant\frac{\sigma}{2\sqrt{2}},\, |t-\tau|\geqslant\frac{\sigma^2}{8}\}}} [\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha q}\cdot|\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\,dyd\tau \leqslant$$

$$\leqslant C_8\sigma^{-\alpha}(\sigma^{\alpha q+s+n+2} + \sigma^{\alpha q+s}m(V)) \leqslant C_8\sigma^{\alpha(q-1)+s+n+2}$$

при $m(V) < \sigma^{n+2}$.

За заданим $\varepsilon > 0$, вибравши $\sigma < \min\{(\frac{\varepsilon}{C_8})^{\frac{1}{\alpha(q-1)+n+s+2}}; 1\}$, при $(x,t)\in\overline{Q}$ такій, що $||x-\hat{x}|| < \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$, $|t-\hat{t}| < \frac{\sigma^2}{2}$ та $m(V) < \sigma^{n+2}$, отримаємо

$$\mathcal{I}_2(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отже, для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\sigma < \min\{(\frac{\varepsilon}{C_7})^{\frac{1}{\alpha(q-1)+n+s+2}}; (\frac{\varepsilon}{C_8})^{\frac{1}{\alpha(q-1)+n+s+2}}; 1\}$ таке, що для довільної підобласті $V\subset Q$ такої, що $m(V) < \sigma^{n+2}$

$$\mathcal{I}(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma) = \mathcal{I}_1(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma) + \mathcal{I}_2(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma) < \varepsilon$$

$$\forall (x,t) \in \overline{Q}, \quad ||x-\hat{x}|| < \frac{\sigma}{\sqrt{2}}, \quad |t-\hat{t}| < \frac{\sigma^2}{2}.$$

2. При $(x,t) \in \overline{Q}$ такій, що $||x-\hat{x}|| \geqslant \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$, $|t-\hat{t}| \geqslant \frac{\sigma^2}{2}$ розглянемо

$$\mathcal{J}(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma) =$$

$$= [\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha} \int\limits_{V\cap\{(y,\tau)\in Q:\, ||x-y||<\frac{\sigma}{2\sqrt{2}},\, |t-\tau|<\frac{\sigma^2}{8}\}} [\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha q} \cdot |\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\, dyd\tau +$$

$$+ [\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha} \int\limits_{V\cap\{(y,\tau)\in Q:\, ||x-y||\geqslant\frac{\sigma}{2\sqrt{2}},\, |t-\tau|\geqslant\frac{\sigma^2}{8}\}} [\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha q} \cdot |\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\, dyd\tau =$$

$$= \mathcal{J}_1(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma) + \mathcal{J}_2(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma).$$

При $||x-\hat{x}|| \geqslant \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$, $|t-\hat{t}| \geqslant \frac{\sigma^2}{2}$ та $||x-y|| < \frac{\sigma}{2\sqrt{2}}$, $|t-\tau| < \frac{\sigma^2}{8}$ виконується $||y-\hat{x}|| \geqslant ||x-\hat{x}|| - ||x-y|| > \frac{\sigma}{\sqrt{2}} - \frac{\sigma}{2\sqrt{2}} = \frac{\sigma}{2\sqrt{2}}$, $|\tau-\hat{t}| \geqslant |t-\hat{t}| - |t-\tau| > \frac{\sigma^2}{2} - \frac{\sigma^2}{8} = \frac{3\sigma^2}{8}$. Тоді, використовуючи заміну змінних (3),

$$\mathcal{J}_1(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma) \leqslant C_9 \cdot \sigma^{\alpha q} \int\limits_{V\cap\{(y,\tau)\in Q:\, ||x-y||<\frac{\sigma}{2\sqrt{2}},\, |t-\tau|<\frac{\sigma^2}{8}\}} |MP|^s\, dyd\tau \leqslant C_{10}\sigma^{\alpha q+n+s+2};$$

$$\mathcal{J}_2(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma) \leqslant C_{11} \cdot \sigma^s \Bigg(\int\limits_{\substack{V\cap\{(y,\tau)\in Q:\, ||x-y||\geqslant\frac{\sigma}{2\sqrt{2}},\, |t-\tau|\geqslant\frac{\sigma^2}{8};\\ ||y-\hat{x}||<\frac{\sigma}{2\sqrt{2}},\, |\tau-\hat{t}|<\frac{\sigma^2}{8}\}}} [\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha q}\, dyd\tau +$$

$$+ \int\limits_{\substack{V\cap\{(y,\tau)\in Q:\, ||x-y||\geqslant\frac{\sigma}{2\sqrt{2}},\, |t-\tau|\geqslant\frac{\sigma^2}{8};\\ ||y-\hat{x}||\geqslant\frac{\sigma}{2\sqrt{2}},\, |\tau-\hat{t}|\geqslant\frac{\sigma^2}{8}\}}} [\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha q}\, dyd\tau \Bigg) \leqslant C_{12}\sigma^s(\sigma^{\alpha q+n+2} + \sigma^{\alpha q} m(V)) \leqslant$$

$$\leqslant C_{13}\sigma^{\alpha q+n+s+2}$$

при $m(V) < \sigma^{n+2}$.

Отже, при $\alpha q + n + s + 2 > 0$ для довільного $\varepsilon > 0$ існує

$$\sigma < \min\Big\{ \Big(\frac{\varepsilon}{C_{10}}\Big)^{\frac{1}{\alpha q+n+s+2}};\, \Big(\frac{\varepsilon}{C_{13}}\Big)^{\frac{1}{\alpha q+n+s+2}};\, 1 \Big\}$$

таке, що для довільної підобласті $V \subset Q$ такої, що $m(V) < \sigma^{n+2}$

$$\mathcal{J}(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma) = \mathcal{J}_1(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma) + \mathcal{J}_2(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma) < \varepsilon$$

$$\forall (x,t) \in \overline{Q}, \quad ||x-\hat{x}|| \geqslant \frac{\sigma}{\sqrt{2}}, \quad |t-\hat{t}| \geqslant \frac{\sigma^2}{2}.$$

$\square$

2.2. Характер розв'язку нелінійного інтегрального рівняння Вольтерра у класі функцій з точковими особливостями. Розглянемо інтегральне рівняння

$$\mathrm{v}(x,t) = \int_0^t d\tau \int_\Omega \mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\mathrm{v}(y,\tau)|^q\, dy + h_0(x,t) \tag{4}$$

при $q \in (0,1)$ та $h_0 \in \widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\ \widehat{P})$.

Лема 2. *Якщо* $q \in (0,1)$, $h_0 \in \widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\ \widehat{P})$, *де* $-\frac{n+2}{q} < \alpha \leqslant 0$, *то існує стала* $\widetilde{K}_0 > 0$ *така, що при всіх* $\widetilde{C} > \widetilde{K}_0$ *оператор* H_1 *відображає* $\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\,\widetilde{C}}(\overline{Q},\ \widehat{P})$ *в себе.*

Доведення. Знайдемо оцінку $H_1\mathrm{v}$ при $\mathrm{v} \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\,\widetilde{C}}(\overline{Q},\ \widehat{P})$, де $\widetilde{C}$ – довільна додатна стала. Маємо

$$|(H_1\mathrm{v})(x,t)| \leqslant \int_0^t d\tau \int_\Omega |\mathcal{K}(x,t;y,\tau)| \cdot |\mathrm{v}(y,\tau)|^q\, dy + |h_0(x,t)|.$$

Використовуючи властивість (A) ядра $\mathcal{K}$ при $\alpha q > -n-2$ і те, що при $h_0 \in \widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\ \widehat{P})$ існує додатна стала $\widehat{C}$ така, що $||h_0;\, \widehat{P}||_\alpha^{'} \leqslant \widehat{C}$ отримаємо

$$|(H_1\mathrm{v})(x,t)| \leqslant [\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^\alpha \times$$
$$\times(\widehat{L}_{0,\,0}\widetilde{C}^q \max\{[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha(q-1)+2+n+s},\ [\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha}\} + \widehat{C}).$$

При виконанні умов

$$\begin{cases} \alpha q > -n-2, \\ \alpha(q-1)+2+n+s \geqslant 0, \\ -\alpha \geqslant 0 \end{cases}$$

знаходимо $||H_1\mathrm{v};\widehat{P}||_\alpha^{'} \leqslant \widetilde{C}^{\,'}$ при $\mathrm{v} \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\,\widetilde{C}}(\overline{Q},\ \widehat{P})$, де $\widetilde{C}^{\,'} = \widehat{L}_{0,\,0}\widetilde{C}^q + \widehat{C}$.

Зауважимо, що при $q \in (0,1)$ існує стала $\widetilde{K}_0 > 0$ така, що $\widetilde{C}^{\,'} \leqslant \widetilde{C}$ при $\widetilde{C} > \widetilde{K}_0$. Отже, за умов леми одержуємо існування додатної сталої $\widetilde{K}_0$ такої, що при всіх $\widetilde{C} > \widetilde{K}_0$ оператор H_1 відображає $\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\,\widetilde{C}}(\overline{Q},\ \widehat{P})$ в себе. □

Теорема 1. *Нехай* $q \in (0,1)$, $-n-2 < s < 0$, $h_0 \in \widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\ \widehat{P})$, *де* $-\frac{n+s+2}{q} < \alpha \leqslant 0$. *Тоді існує розв'язок* $u \in \widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\ \widehat{P})$ *інтегрального рівняння (4) і при* $k > -\alpha-n-2$ *цей розв'язок належить простору* $\mathcal{M}_k(Q,\ \widehat{P})$.

Доведення. Використаємо теорему Шаудера. З доведення леми 2 випливає, що H_1 відображає $\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\,\widetilde{C}}(\overline{Q},\ \widehat{P})$ в себе.

Покажемо, що H_1 – цілком неперервний оператор у просторі $\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\,\widetilde{C}}(\overline{Q},\ \widehat{P})$.

При $\mathrm{v},\ \mathrm{w} \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\,\widetilde{C}}(\overline{Q},\ \widehat{P})$

$$||H_1\mathrm{v}-H_1\mathrm{w};\ \widehat{P}||_\alpha^{'} \leqslant \sup_{(x,t)\in\overline{Q}} \varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}) \int_0^t d\tau \int_\Omega |\mathcal{K}(x,t;y,\tau)| \cdot ||\mathrm{v}(y,\tau)|^q - |\mathrm{w}(y,\tau)|^q|\, dy.$$

Використовуючи формулу $|a^\mu - b^\mu| \leqslant |a-b|^\mu$ при $a,\, b>0$, $\mu\in(0,1)$, отримаємо

$$\int_0^t d\tau \int_\Omega |\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\cdot ||\mathrm{v}(y,\tau)|^q - |\mathrm{w}(y,\tau)|^q|\, dy \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t d\tau \int_\Omega |\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\cdot |\mathrm{v}(y,\tau) - \mathrm{w}(y,\tau)|^q\, dy \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t d\tau \int_\Omega \varrho_0^{\alpha q}(y,\tau,\hat{x},\hat{t})\cdot|\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\cdot(\sup_{(y,\tau)\in\overline{Q}} \varrho_0^{-\alpha}(y,\tau,\hat{x},\hat{t})\cdot|\mathrm{v}(y,\tau)-\mathrm{w}(y,\tau)|)^q\, dy \leqslant$$

$$\leqslant (||\mathrm{v}-\mathrm{w};\, \widehat{P}||'_\alpha)^q \int_0^t d\tau \int_\Omega \varrho_0^{\alpha q}(y,\tau,\hat{x},\hat{t})\cdot|\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\, dy.$$

Використовуючи властивість (A) ядра $\mathcal{K}$ при $\alpha q > -n-2$, одержуємо

$$||H_1\mathrm{v} - H_1\mathrm{w};\, \widehat{P}||'_\alpha \leqslant \widehat{L}_{0,\,0}(||\mathrm{v}-\mathrm{w};\, \widehat{P}||'_\alpha)^q \times$$

$$\times \sup_{(x,t)\in\overline{Q}} \{\max\{[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{(q-1)\alpha+2+n+s}, [\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha}\}\}.$$

Звідси, враховуючи умови на α, випливає, що H_1 – неперервний оператор в $\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\,\widetilde{C}}(\overline{Q},\, \widehat{P})$.

Покажемо компактність оператора H_1 на $\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\,\widetilde{C}}(\overline{Q},\, \widehat{P})$. З доведення леми 2 випливає, що множина $\{H_1\mathrm{v} : \mathrm{v}\in\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\,\widetilde{C}}(\overline{Q},\, \widehat{P})\}$ – рівномірно обмежена. Доведемо, що ця множина одностайно неперервна, тобто для довільного $\varepsilon>0$ існує $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ таке, що для довільних $(z,z_0)\in\mathbb{R}^{n+1}$, $||z||<\delta$, $|z_0|<\delta$ та довільних $\mathrm{v}\in\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\,\widetilde{C}}(\overline{Q},\, \widehat{P})$

$$||(H_1\mathrm{v})(x+z,t+z_0)-(H_1\mathrm{v})(x,t);\, \widehat{P}||'_\alpha \leqslant \sup_{(x,t)\in\overline{Q}} |\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t})\cdot(H\mathrm{v})(x+z,t+z_0)-$$

$$-\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t})\cdot(H\mathrm{v})(x,t)| + \sup_{(x,t)\in\overline{Q}} |\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t})\cdot h_0(x+z,t+z_0)-$$

$$-\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t})\cdot h_0(x,t)| < \varepsilon.$$

Вважаємо $\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t})=0$, $\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t})\mathcal{K}(x+z,t+z_0;y,\tau)=0$, $\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t})(H\mathrm{v})(x+z,t+z_0)=0$, $\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t})h_0(x+z,t+z_0)=0$, якщо $(x+z,t+z_0)\notin Q$.

Зафіксуємо $\varepsilon>0$. Оскільки $h_0\in\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\, \widehat{P})$, то $\varrho_0^{-\alpha}h_0\in C(\overline{Q})$. Тому існує $\widehat{\delta}_1=\widehat{\delta}_1(\varepsilon)>0$ таке, що для довільних $(z,z_0)\in\mathbb{R}^{n+1}$, $||z||<\widehat{\delta}_1$, $|z_0|<\widehat{\delta}_1$ виконується

$$\sup_{(x,t)\in\overline{Q}} |\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t})\cdot h_0(x+z,t+z_0) - \varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t})\cdot h_0(x,t)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Розглянемо для довільних $(x,t)\in\overline{Q}$

$$\mathcal{I}(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0) = |\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t})\cdot(H\mathrm{v})(x+z,t+z_0) - \varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t})\cdot(H\mathrm{v})(x,t)| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^t d\tau \int\limits_\Omega |\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t})\cdot\mathcal{K}(x+z,t+z_0;y,\tau)-\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t})\cdot\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\times$$

$$\times|\mathrm{v}(y,\tau)|^q\,dy+\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t})\int\limits_t^{t+z_0} d\tau\int\limits_\Omega|\mathcal{K}(x+z,t+z_0;y,\tau)|\cdot|\mathrm{v}(y,\tau)|^q\,dy=$$

$$=\mathcal{I}_1(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0)+\mathcal{I}_2(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0).$$

Нехай $\eta_1>0$ – досить мале і довільне число, Q_{η_1} – підобласть області Q така, що $dist(x,\hat{x})\geqslant\eta_1$, $dist(t,\hat{t})\geqslant\eta_1$.

Тоді для довільних $\mathrm{v}\in\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\widetilde{C}}(\overline{Q},\ \widehat{P})$ та $(x,t)\in\overline{Q}$ матимемо

$$\mathcal{I}_1(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0)\leqslant\widetilde{C}^q\int\limits_Q|\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t})\cdot\mathcal{K}(x+z,t+z_0;y,\tau)-$$

$$-\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t})\cdot\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\cdot\varrho_0^{\alpha q}(y,\tau,\hat{x},\hat{t})\,dyd\tau=$$

$$=\widetilde{C}^q\int\limits_{Q\setminus Q_{\eta_1}}|\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t})\cdot\mathcal{K}(x+z,t+z_0;y,\tau)-\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t})\cdot\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\times$$

$$\times\varrho_0^{\alpha q}(y,\tau,\hat{x},\hat{t})\,dyd\tau+\widetilde{C}^q\int\limits_{Q_{\eta_1}}|\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t})\cdot\mathcal{K}(x+z,t+z_0;y,\tau)-$$

$$-\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t})\cdot\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\cdot\varrho_0^{\alpha q}(y,\tau,\hat{x},\hat{t})\,dyd\tau=\mathcal{I}_{11}(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0)+\mathcal{I}_{12}(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0).$$

Нехай $\delta_0>0$ – фіксоване число. За заданим δ_0 вибираємо число $\eta_1<\frac{\varepsilon_0}{2}$ таке, щоб $m(Q\setminus Q_{\eta_1})\leqslant\delta_0$ та $\eta_1<(\frac{\varepsilon}{8\widetilde{C}^q\widetilde{C}_0})^{\frac{1}{\alpha(q-1)}}$. За лемою 1 існує $\delta_0=\delta_0(\varepsilon)>0$, існує відповідне $\eta_1>0$ таке, що для довільних $(x,t)\in\overline{Q}$ та $(z,z_0)\in\mathbb{R}^{n+1}$ таких, що $(x+z,t+z_0)\in Q$

$$\int\limits_{Q\setminus Q_{\eta_1}}\varrho_0^{\alpha q}(y,\tau,\hat{x},\hat{t})\cdot|\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t})\cdot\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\,dyd\tau<\frac{\varepsilon}{16\widetilde{C}^q},\tag{5}$$

$$\int\limits_{Q\setminus Q_{\eta_1}}\varrho_0^{\alpha q}(y,\tau,\hat{x},\hat{t})\cdot|\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t})\cdot\mathcal{K}(x+z,t+z_0;y,\tau)|\,dyd\tau<\frac{\varepsilon}{16\widetilde{C}^q}.\tag{6}$$

Тоді з (5), (6) при $(x,t)\in\overline{Q}$

$$\mathcal{I}_{11}(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0)\leqslant\widetilde{C}^q\int\limits_{Q\setminus Q_{\eta_1}}\Big(|\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t})\cdot\mathcal{K}(x+z,t+z_0;y,\tau)|+$$

$$+|\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t})\cdot\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\Big)\cdot\varrho_0^{\alpha q}(y,\tau,\hat{x},\hat{t})\,dyd\tau<\widetilde{C}^q\Big(\frac{\varepsilon}{16\widetilde{C}^q}+\frac{\varepsilon}{16\widetilde{C}^q}\Big)=\frac{\varepsilon}{8},$$

а отже,

$$\sup_{(x,t)\in\overline{Q}}\mathcal{I}_{11}(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0)<\frac{\varepsilon}{8}.$$

Виберемо $0 < \eta_2 < \frac{\eta_1}{2}$. Для довільної $(x,t) \in Q_{\frac{\eta_1}{2}}$ та числа η_2 визначимо множини $U_{\eta_2}(x,t) \stackrel{def}{=} \{(y,\tau) \in Q_{\eta_1} : ||x-y|| \leqslant \eta_2,\ |t-\tau| \leqslant \eta_2^2\}$. Обчислимо

$$m(U_{\eta_2}(x,t)) = \int\limits_{U_{\eta_2}(x,t)} dyd\tau = \int\limits_{||x-y||\leqslant\eta_2} dy \cdot \int\limits_{|t-\tau|\leqslant\eta_2^2} d\tau = 2\sigma_n \eta_2^{n+2},$$

де σ_n – площа поверхні сфери одиничного радіуса в $\mathbb{R}^n$. Якщо вибрати $\eta_2 < \min\{\frac{\eta_1}{2}; (\frac{\delta_0}{2\sigma_n})^{\frac{1}{n+2}}\}$, то $m(U_{\eta_2}(x,t)) < \delta_0$. Тоді з (5) для довільних $(x,t) \in \overline{Q}$ та $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ таких, що $(x+z, t+z_0) \in Q$

$$\int\limits_{U_{\eta_2}(x,t)} \varrho_0^{\alpha q}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}) \cdot |\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}) \cdot \mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\, dyd\tau < \frac{\varepsilon}{24\widetilde{C}^q}, \tag{7}$$

$$\int\limits_{U_{\eta_2}(x,t)} \varrho_0^{\alpha q}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}) \cdot |\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}) \cdot \mathcal{K}(x+z,t+z_0;y,\tau)|\, dyd\tau < \frac{\varepsilon}{24\widetilde{C}^q}. \tag{8}$$

Виберемо $\delta_1 < \min\{\delta_0; \frac{\eta_2}{2}\}$. При $(x,t) \in Q_{\frac{\eta_1}{2}}$, $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ таких, що $||z|| \leqslant \delta_1 (< \frac{1}{4}\eta_1)$, $|z_0| \leqslant \delta_1 (< \frac{1}{4}\eta_1)$, маємо $(x+z, t+z_0) \in Q_{\frac{\eta_1}{4}}$. При $(x,t) \in Q_{\frac{\eta_1}{4}}$, $(y,\tau) \in Q_{\eta_1} \setminus U_{\eta_2}(x,t)$, $||x-y|| \geqslant \eta_2$, $|t-\tau| \geqslant \eta_2^2$, а отже, $(x,t) \neq (y,\tau)$. Тому функція $\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t})\mathcal{K}(x,t;y,\tau)$ рівномірно неперервна в області

$$V = \{(x,t;y,\tau) : (x,t) \in \overline{Q_{\frac{\eta_1}{4}}},\ (y,\tau) \in \overline{Q_{\eta_1} \setminus U_{\eta_2}(x,t)}\}.$$

Тоді існує $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) \in (0;\delta_1]$ таке, що для довільних $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| < \delta_2$, $|z_0| < \delta_2$, $(x,t) \in \overline{Q_{\frac{\eta_1}{2}}} \subset \overline{Q_{\frac{\eta_1}{4}}}$, $(y,\tau) \in \overline{Q_{\eta_1} \setminus U_{\eta_2}(x,t)}$ при $\alpha q > -n-2$ виконується

$$|\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}) \cdot \mathcal{K}(x+z,t+z_0;y,\tau) - \varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}) \cdot \mathcal{K}(x,t;y,\tau)| < \frac{\varepsilon}{24A\widetilde{C}^q},$$

де $A = \int_{Q_{\eta_1} \setminus U_{\eta_2}(x,t)} \varrho_0^{\alpha q}(y,\tau,\hat{x},\hat{t})\, dyd\tau$, тоді

$$\int\limits_{Q_{\eta_1} \setminus U_{\eta_2}(x,t)} \varrho_0^{\alpha q}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}) \cdot |\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}) \cdot \mathcal{K}(x+z,t+z_0;y,\tau) -$$

$$-\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}) \cdot \mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\, dyd\tau < \frac{\varepsilon}{24A\widetilde{C}^q} \int\limits_{Q_{\eta_1} \setminus U_{\eta_2}(x,t)} \varrho_0^{\alpha q}(y,\tau,\hat{x},\hat{t})\, dyd\tau < \frac{\varepsilon}{24\widetilde{C}^q} \tag{9}$$

Отже, при $(x,t) \in Q_{\frac{\eta_1}{2}}$ із (7), (8) та (9) випливає існування $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ такого, що для довільних $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| < \delta_2$, $|z_0| < \delta_2$

$$\mathcal{I}_{12}(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0) = \widetilde{C}^q \int\limits_{Q_{\eta_1}} \varrho_0^{\alpha q}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}) \cdot |\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}) \cdot \mathcal{K}(x+z,t+z_0;y,\tau) -$$

$$-\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}) \cdot \mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\, dyd\tau \leqslant \widetilde{C}^q \int\limits_{U_{\eta_2}(x,t)} \varrho_0^{\alpha q}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}) \cdot |\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}) \times$$

$$\times \mathcal{K}(x+z,t+z_0;y,\tau)|\, dyd\tau + \widetilde{C}^q \int\limits_{U_{\eta_2}(x,t)} \varrho_0^{\alpha q}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}) \cdot |\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}) \cdot \mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\, dyd\tau +$$

$$+\widetilde{C}^q \int\limits_{Q_{\eta_1}\setminus U_{\eta_2}(x,t)} \varrho_0^{\alpha q}(y,\tau,\hat{x},\hat{t})\cdot|\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t})\cdot\mathcal{K}(x+z,t+z_0;y,\tau)-\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t})\times$$

$$\times\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\,dyd\tau < \frac{\varepsilon}{24}+\frac{\varepsilon}{24}+\frac{\varepsilon}{24}=\frac{\varepsilon}{8},$$

а отже,

$$\sup_{(x,t)\in\overline{Q_{\frac{\eta_1}{2}}}} \mathcal{I}_{12}(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0) < \frac{\varepsilon}{8}.$$

При $(x,t)\in\overline{Q\setminus Q_{\frac{\eta_1}{2}}}$, $(z,z_0)\in\mathbb{R}^{n+1}$, $||z||<\delta_1(<\frac{\eta_1}{4})$, $|z_0|<\delta_1(<\frac{\eta_1}{4})$ буде $(x+z,x+z_0)\in\overline{Q\setminus Q_{\frac{3\eta_1}{4}}}\subset Q$ або $(x+z,t+z_0)\notin Q$. За рівномірною неперервністю функції $\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t})\mathcal{K}(x,t;y,\tau)$ на замкненій множині $V_1=(\overline{Q\setminus Q_{\frac{3\eta_1}{4}}})\times Q_{\eta_1}$ враховуючи, що $-\alpha\geqslant 0$, $\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t})\leqslant 1$, одержуємо: існує $\delta_3=\delta_3(\varepsilon)\in(0,\delta_1]$ таке, що для довільних $(x,t)\in\overline{Q\setminus Q_{\frac{\eta_1}{2}}}\subset\overline{Q\setminus Q_{\frac{3\eta_1}{4}}}$, $(y,\tau)\in\overline{Q_{\eta_1}}$, $(z,z_0)\in\mathbb{R}^{n+1}$, $||z||<\delta_3$, $|z_0|<\delta_3$ виконується

$$|\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t})\cdot\mathcal{K}(x+z,t+z_0;y,\tau)-\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t})\cdot\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|<\frac{\varepsilon}{8B\widetilde{C}^q},$$

де $B=\int_{Q_{\eta_1}}\varrho_0^{\alpha q}(y,\tau,\hat{x},\hat{t})\,dyd\tau$, звідки

$$\sup_{\substack{(x,t)\in\overline{Q\setminus Q_{\frac{\eta_1}{2}}}\\(x+z,t+z_0)\in Q}} \mathcal{I}_{12}(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0)\leqslant \widetilde{C}^q\frac{\varepsilon}{8B\widetilde{C}^q}\int\limits_{Q_{\eta_1}}\varrho_0^{\alpha q}(y,\tau,\hat{x},\hat{t})\,dyd\tau=\frac{\varepsilon}{8}.$$

Для тих точок $(x,t)\in\overline{Q\setminus Q_{\frac{\eta_1}{2}}}$, $(y,\tau)\in Q_{\eta_1}$, $(z,z_0)\in\mathbb{R}^{n+1}$, $||z||<\delta_1$, $|z_0|<\delta_1$, для яких $(x+z,t+z_0)\notin Q$ отримаємо

$$\sup_{\substack{(x,t)\in\overline{Q\setminus Q_{\frac{\eta_1}{2}}}\\(x+z,t+z_0)\notin Q}} \mathcal{I}_{12}(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0)\leqslant \sup_{\substack{(x,t)\in\overline{Q\setminus Q_{\frac{\eta_1}{2}}}\\(x+z,t+z_0)\notin Q}} \widetilde{C}^q\int\limits_{Q_{\eta_1}}\varrho_0^{\alpha q}(y,\tau,\hat{x},\hat{t})\cdot|\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t})\times$$

$$\times\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\,dyd\tau\leqslant \sup_{\substack{(x,t)\in\overline{Q\setminus Q_{\frac{\eta_1}{2}}}\\(x+z,t+z_0)\notin Q}} \widetilde{C}^q\int\limits_{Q_{\eta_1}}\eta_1^{\alpha q}|\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t})\cdot\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\,dyd\tau\leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\substack{(x,t)\in\overline{Q\setminus Q_{\frac{\eta_1}{2}}}\\(x+z,t+z_0)\notin Q}} \widetilde{C}^q\eta_1^{\alpha q}\eta_1^{-\alpha}\int\limits_{Q_{\eta_1}}|\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\,dyd\tau\leqslant\widetilde{C}^q\widetilde{C}_0\eta_1^{\alpha(q-1)}\leqslant\frac{\varepsilon}{8},$$

де остання нерівність виконується згідно з вибором η_1. Зауважимо, що при $q\in(0,1)$ також $\alpha(q-1)>0$.

Показано, що існує $\widetilde{\delta}_1=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}>0$ таке, що для довільних $(x,t)\in\overline{Q}$, $(z,z_0)\in\mathbb{R}^{n+1}$, $||z||<\widetilde{\delta}_1$, $|z_0|<\widetilde{\delta}_1$

$$\sup_{(x,t)\in\overline{Q}}\mathcal{I}_1(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0)<\frac{\varepsilon}{4}.$$

Розглянемо

$$\mathcal{I}_2(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0)=\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t})\int\limits_t^{t+z_0}d\tau\int\limits_\Omega|\mathcal{K}(x+z,t+z_0;y,\tau)|\cdot|\mathrm{v}(y,\tau)|^q\,dy.$$

Проводячи подібні міркування та враховуючи, що $m(\Omega\times(t,t+z_0))=m(\Omega)\cdot|z_0|$, з леми 1 одержуємо: існує $\widetilde{\delta_2}=\widetilde{\delta_2}(\varepsilon)>0$ таке, що для довільних $(z,z_0)\in\mathbb{R}^{n+1}$, $||z||<\widetilde{\delta_2}$, $|z_0|<\widetilde{\delta_2}$ та довільних $\mathrm{v}\in\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\,\widetilde{C}}(\overline{Q},\ \widehat{P})$ одержуємо

$$\sup_{(x,t)\in\overline{Q}}\mathcal{I}_2(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0)<\frac{\varepsilon}{4}.$$

Отже, існує $\widehat{\delta_2}=\min\{\widetilde{\delta_1};\widetilde{\delta_2}\}>0$ таке, що для довільних $(z,z_0)\in\mathbb{R}^{n+1}$, $||z||<\widehat{\delta_2}$, $|z_0|<\widehat{\delta_2}$ виконується

$$\sup_{(x,t)\in\overline{Q}}\mathcal{I}(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Отже, множина $\{H_1\mathrm{v}:\mathrm{v}\in\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\,\widetilde{C}}(\overline{Q},\widehat{P})\}$ – одностайно неперервна. За теоремою Шаудера та за умов лем 1, 2 інтегральне рівняння (4) має розв'язок $u\in\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\ \widehat{P})$. $\square$

Зауважимо, що в [9], використовуючи принцип стиснених відображень, визначено характер точкових степеневих особливостей розв'язку рівняння (4) при $q>1$.

2.3. Застосування отриманих результатів до розв'язності крайових задач для півлінійного параболічного рівняння. Нехай $D(\overline{\Sigma})=C^\infty(\overline{\Sigma})$, $D(\overline{\Omega})=C^\infty(\overline{\Omega})$;
$D^0(\overline{\Sigma})=\{\varphi\in D(\overline{\Sigma}):\ \frac{\partial^k}{\partial t^k}\varphi\,|_{t=T}=0,\ k=0,1,\ldots\}$,
$D_0(\overline{\Omega})=\{\varphi\in D(\overline{\Omega}):\varphi|_S=0\}$, ν – орт внутрішньої нормалі до S.

Надалі позначатимемо через $(D^0(\overline{\Sigma}))'$, $(D_0(\overline{\Omega}))'$ – простори лінійних неперервних функціоналів відповідно на просторах функцій $D^0(\overline{\Sigma})$, $D_0(\overline{\Omega})$, через $(\varphi,F)_1$ – значення узагальненої функції $F\in(D^0(\overline{\Sigma}))'$ на основній функції $\varphi\in D^0(\overline{\Sigma})$, через $(\varphi,F)_2$ – значення $F\in(D_0(\overline{\Omega}))'$ на $\varphi\in D_0(\overline{\Omega})$.

Для довільної фіксованої точки $(\hat{x},\hat{t})\in\Sigma$ розглянемо задачу

$$\begin{aligned}&\tfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}-\triangle u(x,t)=|u(x,t)|^q,\quad (x,t)\in Q,\\ &u\,|_\Sigma=F_1(x,t),\quad (x,t)\in\Sigma,\qquad u\,|_{t=0}=F_2(x),\quad x\in\Omega,\end{aligned}\tag{10}$$

де $q\in(0,1)$;

$$\begin{aligned}&F_1(x,t)=\sum_{|l|\leqslant p_1}\sum_{m=0}^{p_2}C_{lm}D_x^l\delta(x-\hat{x})\delta^{(m)}(t-\hat{t}),\\ &F_2(x)=\sum_{|r|\leqslant p_3}C_rD_x^r\delta(x-\hat{x}),\\ &C_{lm},\,C_r\text{ – сталі},p_1,\,p_2,\,p_3\ \text{ – невід'ємні цілі числа.}\end{aligned}\tag{11}$$

Подібно до доведення теореми 2 [11] розв'язність задачі (10) у просторі $\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\ \widehat{P})$ зводиться до розв'язності інтегрального рівняння (4) з ядром G –

функцією Гріна першої крайової задачі для рівняння теплопровідності, де

$$h_0(x,t) = g_1(x,t) + g_2(x,t) = (\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}, F_1(y,\tau))_1 + (G(x,t;y,0), F_2(y))_2.$$

Покажемо, що функція h_0 задовольняє умови теореми 1.

Лема 3. *Нехай виконуються припущення (11) та* $\alpha \leqslant \min\{-(1+p_1+2p_2);\ -p_3\}-n$. *Тоді* $h_0 \in \widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\ \widehat{P})$, *а саме, існує додатна стала* $\widehat{C}$ *така, що* $||h_0;\ \widehat{P}||'_\alpha \leqslant \widehat{C} < +\infty$.

Доведення. Враховуючи припущення (11) та властивість функції Гріна G (аналогічну до другої властивості ядра $\mathcal{K}(x,t;y,\tau)$ при $s=-n$), матимемо

$$|g_1(x,t)| \leqslant \sum_{|l|\leqslant p_1}\sum_{m=0}^{p_2} |C_{lm}| \cdot \left|\frac{\partial^m}{\partial \hat{t}^m} D^l_{\hat{x}} \frac{\partial G(x,t;\hat{x},\hat{t})}{\partial \nu_{\hat{x}}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant C_{14} \sum_{|l|\leqslant p_1}\sum_{m=0}^{p_2} (|x-\hat{x}|^2 + |t-\hat{t}|)^{\frac{-n-1-|l|-2m}{2}} \leqslant C_{14}[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-(n+1+p_1+2p_2)} =$$

$$= C_{14}[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha}[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-(n+1+p_1+2p_2+\alpha)} \leqslant \widehat{C}[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha}$$

при $\alpha \leqslant -(n+1+p_1+2p_2)$;

$$|g_2(x,t)| \leqslant \sum_{|r|\leqslant p_3} |C_r| \cdot |D^r_{\hat{x}} G(x,t;\hat{x},0)| \leqslant C_{15} \sum_{|r|\leqslant p_3} (|x-\hat{x}|^2 + t)^{\frac{-n-|r|}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant C_{15}[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-(n+p_3)} = C_{15}[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha}[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-(n+p_3+\alpha)} \leqslant \widehat{C}[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha}$$

при $\alpha \leqslant -(n+p_3)$, де C_{14}, C_{15} – додатні сталі. □

З леми 3 та теореми 1 випливає наслідок.

Наслідок 1. *При*

$$a)\begin{cases} p_3 > 2-n, \\ p_1+2p_2 > p_3 - 1, \\ 0 < q < \frac{2}{n+1+p_1+2p_2}, \\ -\frac{2}{q} < \alpha \leqslant -(1+p_1+2p_2)-n, \end{cases} \quad \text{або} \quad б)\begin{cases} p_1+2p_2 > 1-n, \\ p_3 \geqslant p_1+2p_2+1, \\ 0 < q < \frac{2}{n+p_3}, \\ -\frac{2}{q} < \alpha \leqslant -p_3-n \end{cases}$$

існує розв'язок $u \in \widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\ \widehat{P})$ *крайової задачі (10), який при* $k > -\alpha-n-2$ *належить до простору* $\mathcal{M}_k(Q,\ \widehat{P})$.

Для узагальненої крайової задачі Неймана

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \triangle u(x,t) = |u(x,t)|^q, \quad (x,t)\in Q, \\ &\tfrac{\partial u}{\partial \nu}\,|_{\Sigma} = F_1(x,t), \quad (x,t)\in\Sigma, \qquad u\,|_{t=0} = F_2(x), \quad x\in\Omega, \end{aligned} \tag{12}$$

одержуємо подібний результат.

Наслідок 2. *При*

$$a)\begin{cases} p_3 > 2-n, \\ p_1+2p_2 > p_3, \\ 0 < q < \frac{2}{n+p_1+2p_2}, \\ -\frac{2}{q} < \alpha \leqslant -(p_1+2p_2)-n, \end{cases} \quad \text{або} \quad б)\begin{cases} p_1+2p_2 > 2-n, \\ p_3 \geqslant p_1+2p_2, \\ 0 < q < \frac{2}{n+p_3}, \\ -\frac{2}{q} < \alpha \leqslant -p_3-n \end{cases}$$

існує розв'язок $u \in \widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\ \widehat{P})$ *крайової задачі (12), який при* $k > -\alpha - n - 2$ *належить до простору* $\mathcal{M}_k(Q,\ \widehat{P})$.

3. Висновки. Стаття присвячена актуальній проблемі дослідження існування розв'язку нелінійного інтегрального рівняння Вольтерра з полярним ядром у ваговому L^1- просторі функцій, які можуть мати особливості в окремих точках межі області. Визначено характер точкових степеневих особливостей розв'язку цього рівняння.

1. *Лопушанська Г.П.* Крайові задачі у просторі узагальнених функцій D' / *Лопушанська Г.П.* – Львів: Вид-во Львів. нац. ун-ту ім. І. Франка, 2002.
2. *Лопушанська Г.П.* Узагальнені крайові задачі для лінійних та напівлінійних еліптичних рівнянь / *Лопушанська Г.П.* // Укр. мат. вісник. – 2005. – Т. 2, №3. – С. 377-394.
3. *Лопушанська Г.П.* Про розв'язок параболічної граничної задачі із сильними степеневими особливостями в правих частинах / *Лопушанська Г.П.* // Математичні Студії. – 2001. – Т. 15, №2. – С. 179-190.
4. *Лопушанська Г.П.* Узагальнені крайові значення розв'язків рівняння $u_t = \triangle u + F_0(x,t,u)$ / *Лопушанська Г.П., Чмир О.Ю.* // Математичні Студії. – 2004. – Т. 22, №1. – С.45-56.
5. *Лопушанська Г.П.* Характер особливостей розв'язку узагальненої крайової задачі для квазілінійної параболічної системи / *Лопушанська Г.П., Чмир О.Ю.* // Доповіді НАН України. – 2007. – №7. – С. 12-17.
6. *Ивасишен С.Д.* О композиции параболических ядер / *Ивасишен С.Д.* // Укр. мат. журн. – 1980. – Т. 32, №1. – С. 35-45.
7. *Ивасишен С.Д.* Матрицы Грина параболических граничных задач / *Ивасишен С.Д.* – К.: Вища шк., 1990.
8. *Эйдельман С.Д.* Исследование матрицы Грина однородной параболической граничной задачи / *Эйдельман С.Д., Ивасишен С.Д.* // Труды Моск. мат. о-ва. – 1970. – Т. 23. – С. 179-234.
9. *Чмир О.Ю.* Точкові степеневі особливості розв'язку нелінійного інтегрального рівняння Вольтерри / *Чмир О.Ю.* // Матем. Вісник наук. тов-ва ім. Т.Г. Шевченка. – 2009. – Т. 6. – С. 73-87.
10. *Прудников А.П.* Интегралы и ряды / *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* – М.: Наука, 1981.
11. *Чмир О.Ю.* Про формулювання узагальненої крайової задачі для півлінійного параболічного рівняння / *Чмир О.Ю.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2003. – Вип. 62. – С. 134-143.

THE POINTED SINGULARITIES OF THE SOLUTION OF VOLTERRA NONLINEAR INTEGRAL EQUATION

Oksana CHMYR

L'viv State University of vital activity safety,
79000, L'viv, Kleparivska str., 35
e-mail: o_chmyr@yahoo.com

Using the Schauder method the sufficient conditions of the solvability for Volterra nonlinear integral equation with the polar kernel in weight L^1 - space of functions with power singularities near the the given point in domain are obtained.

Key words: nonlinear integral equation, weight functional space, continuous operator, compact set, Schauder fixed-point theorem.

ТОЧЕЧНЫЕ ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА

Оксана ЧМЫРЬ

Львовский государственный университет безопасности жизнедеятельности,
79000, Львов, ул. Клепаровская, 35
e-mail: o_chmyr@yahoo.com

С помощью принципа Шаудера установлено достаточные условия разрешимости нелинейного интегрального уравнения Вольтерра с полярным ядром в весовом L^1 - пространстве функций с точечными степенными особенностями.

Ключевые слова: нелинейное интегральное уравнение, весовое функциональное пространство, непрерывный оператор, компактное множество, теорема Шаудера о неподвижной точке.

Стаття надійшла до редколегії 09.10.2009

Прийнята до друку 16.12.2009