ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2009. *Ser. Mech. Math. 2009.*
Вип. 71. С. 213–219 *Is. 71. P. 213–219*

УДК 513.6

2-КРУЧЕННЯ ГРУП БРАУЕРА ЕЛІПТИЧНИХ І ГІПЕРЕЛІПТИЧНИХ КРИВИХ НАД ПСЕВДОЛОКАЛЬНИМИ ПОЛЯМИ

Людмила СТАХІВ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, Університетська, 1
e-mail: mlmstakhiv@gmail.com

Вивчено 2-кручення групи Брауера еліптичних і гіпереліптичних кривих над псевдолокальними полями.

Ключові слова: псевдолокальне поле, еліптична крива, гіпереліптична крива, якобіан, група Брауера.

Нехай k – квазіскінченне поле, тобто досконале поле, що має точно одне розширення степеня n для кожного натурального числа n (у фіксованому алгебричному замиканні поля k). Квазіскінченне поле k називають псевдоскінченним [1], якщо кожний абсолютно незвідний алгебричний многовид, визначений над k, має k – раціональну точку. Повне стосовно дискретного нормування поле K з квазіскінченним (псевдоскінченним) полем лишків k називають загальним локальним (псевдолокальним) полем. Якщо $\bar{K}$ – сепарабельне замикання поля K, $G_K = \mathrm{Gal}\,(\bar{K}/K)$ – його група Галуа, то ми позначаємо $H^i(K, M)$ когомології Галуа G_K – модуля M. C_n та C/nC означають ядро та коядро множення на n в абельовій групі C. Для алгебричного многовиду A, визначеного над полем K, ми позначаємо через $A(K)$ групу його K – раціональних точок, а через $K(A)$ – поле функцій многовиду A. Розглянемо відображення $\mu\colon K(A) \to \mathrm{Div}\,(A)$, яке ставить у відповідність функції з $K(A)^*$ її дивізор. Це відображення індукує таке відображення когомологій Галуа: $\mu^*\colon H^2(G, K(A)^*) \to H^2(G, \mathrm{Div}\,(A))$. Ядро відображення μ^* позначають через $\mathrm{Br}\,A$ і називають групою Брауера кривої A. Як показано у [2], група $\mathrm{Br}\,A$ складається з класів центральних простих K-алгебр, нерозгалужених у всіх нормуваннях поля K.

Про групу Брауера алгебричних многовидів до недавнього часу було відомо дуже мало навіть у найпростішому випадку алгебричних кривих. В.І. Янчевський і Г.Л. Марголін в серії статей (див., зокрема, [2], [3]) вивчили групи Брауера еліптичних та гіпереліптичних кривих, визначених над локальним полем. Вони описали

2-кручення групи Брауера еліптичної кривої над локальним полем через зображення цієї підгрупи кватерніонними алгебрами.

Виявляється, що частину результатів В.І.Янчевського і Г.Л. Марголіна можна узагальнити на випадок еліптичних кривих, визначених над повними дискретно нормованими полями з псевдоскінченними полями лишків. Це узагальнення опирається на аналог двоїстості Тейта-Шафаревича для еліптичних кривих над псевдолокальними полями та на тривіальності групи головних однорідних просторів для еліптичних кривих над псевдоглобальним полем. У теоремі 1 описано 2-кручення групи Брауера еліптичної кривої над псевдолокальним полем.

В. Черноусов і В.Гулецький [4] одержали описання 2-кручення групи Брауера еліптичних кривих над локальними полями в термінах твірних і співвідношень. Ми застосовуємо метод Черноусова і Гулецького до описання 2-кручення групи Брауера еліптичних кривих над псевдолокальним полем.

Ю. Реман, С.В. Тіхонов, В.І.Янчевський у [7] відкрили загальний підхід для обчислення 2 – кручення групи Брауера гіпереліптичної кривої над довільними полями та застосували цей підхід до випадку локального основного поля. Ключову роль тут відіграє теорема Ленга про алгебричні групи над скінченними полями, яка стверджує, що для будь-якого алгебричного многовиду, визначеного над скінченним полем, $H^1(\mathrm{Gal}\,(\overline{k}/k, \overline{J})) = 0$. Майже безпосередньо з означення псевдоскінченного поля випливає аналогічна рівність $H^1(\mathrm{Gal}\,(\overline{k}/k, \overline{J})) = 0$ і для псевдоскінченних полів. Це дає змогу поширити описання 2-кручення групи Брауера гіпереліптичної кривої на випадок псевдолокального основного поля. Таке описання дає теорема 6.

Починаємо з розгляду розкладних еліптичних кривих над псевдолокальним полем.

Далі n означає натуральне число, взаємно просте з характеристикою поля k, а $|C|$ – порядок скінченної групи C. Нехай тепер K – псевдолокальне поле. Позначимо через $\mathcal{O}_K$ кільце цілих поля K, π – простий елемент поля K. α – одиниця поля K, яка не є квадратом. Нехай A – еліптична крива визначена над полем K. Нехай $C_\alpha = [(\alpha, x-c)]$, $C_\pi = [(\pi, x-c)]$, $B_\alpha = [(\alpha, x-b)]$, $B_\pi = [(\pi, x-b)]$ – представники алгебри кватерніонів над $K(A)$.

Теорема 1. *Нехай A розкладна еліптична крива над псевдолокальним полем K.*

1. *Якщо A має невироджену редукцію, то $(BrA)_2 = (BrK)_2 \oplus \{1, B_\pi, C_\pi, B_\pi \otimes C_\pi\}$.*
2. *Якщо A має мультиплікативну редукцію і K – загальне локальне поле, то $(BrA)_2 = (BrK)_2 \oplus \{1, B_\pi, C_\pi, B_\pi \otimes C_\pi\}$ у випадку, коли дотичні в особливій точці редукції не визначені над основним полем K і $(BrA)_2 = (BrK)_2\{1, B_\alpha, B_\alpha, B_{\alpha\pi}\}$ у випадку, коли вони визначені над полем K.*
3. *Якщо A має адитивну редукцію і K – загальне локальне поле, то $(BrA)_2 = (BrK)_2 \oplus \{1, B_\alpha, C_\alpha, B_\alpha \otimes C_\alpha\}$.*

Сформулюємо деякі допоміжні результати, потрібні для доведення теореми 1.

Теорема 2. *Якщо A – еліптична крива, визначена над псевдолокальним полем K, то добуток Тейта – Шафаревича індукує двоїстість скінченних груп $A(K)/nA(K)$ і $H^1(K, A)_n$. Якщо A – крива з виродженою редукцією, то ця двоїстість зберігається і у випадку загального локального поля K.*

Теорема 3. *В умовах попередньої теореми* $|(\operatorname{Br} A)_n| = n|(A(K))_n|$.

Лема 1. *Нехай A – довільна еліптична крива, визначена над псевдолокальним полем K або крива з виродженою редукцією, визначена над загальним локальним полем K. Тоді $|A(K)/nA(K)| = |(A(K))_n|$.*

Доведення теорем 2, 3 та начерк доведення леми 1 наведено у [5].

Лема 2. *Нехай A – розкладна еліптична крива з невиродженою редукцією. Тоді у точній послідовності когомологій*

$$0 \longrightarrow A(K)/2A(K) \xrightarrow{\delta} H^1(G, A(\bar{K})_2) \xrightarrow{\rho} H^1(G, A(\bar{K}))_2 \longrightarrow 0, \qquad (1)$$

образ гомоморфізму δ породжується парами $(\alpha, 1)$ та $(1, \alpha)$.

Доведення. Як і у випадку еліптичної кривої, визначеної над локальним полем K (див. [3, лема 9.1]) достатньо довести, що пари $(\alpha, 1)$, $(1, \alpha) \in H^1(G, A(\bar{K})_2) \simeq K^*/K^{*2} \times K^*/K^{*2}$ належать до $\operatorname{Ker} \rho$. Нехай K^{nr}/K – максимальне нерозгалужене розширення поля K. Тоді

$$H^1(\operatorname{Gal}(K^{\mathrm{nr}}/K), A(K^{nr})) = H^1(\operatorname{Gal}(\bar{k}/k), \tilde{A}(\bar{k})) = 0$$

на підставі псевдоскінченності поля лишків k поля K. Тут $\bar{k}$ – алгебричне замикання поля k, $\tilde{A}$ – редукція кривої A. Тому зі спектральної послідовності Хохшільда-Серра випливає, що відображення $H^1(G, A(K)_2) \to H^1(K^{\mathrm{nr}}, A(\bar{K}))$ ін'єктивне. Крім того, очевидно, що $(\operatorname{res} \circ \rho)(\alpha, 1) = (\operatorname{res} \circ \rho)(1, \alpha) = 0$. □

Лема 3. *Нехай A – розкладна еліптична крива над загальним локальним полем з мультиплікативною редукцією з рівнянням*

$$y^2 = x(x + \pi^m \beta)(x + \gamma), \qquad (2)$$

де $\beta, \gamma \in O_K^*$, $m \geqslant 1$, і нехай $A_0(K)$ – підгрупа точок групи $A(K)$, що редукуються в неособливі. Тоді існують точки $R_1 = (u_1, v_1) \in A_0(K)$ і $R_2 = (u_2, v_2) \in A(K) \backslash A_0(K)$ такі, що точки R_1, R_2 породжують групу $A(K)/2A(K)$.

Доведення. Якщо крива A визначена над локальним полем, то твердження леми доведено у [3, лема 7.5 і твердження 7.7]. Згадані доведення придатні і для випадку довільного поля, якщо врахувати, що для скінченних розширень квазіскінченних полів гомоморфізм норми є сюр'єктивним (див. [5, §2]). □

Лема 4. *Якщо A – розкладна еліптична крива з мультиплікативною редукцією задана рівнянням (2) над загальним локальним полем, то образ гомоморфізму δ з точної послідовності (1) породжується парами $(1, \alpha), (1, \pi^m \beta)$, якщо $\gamma \notin O_K^{*2}$ і парами $(1, \alpha), (1, \pi)$, якщо $\gamma \in O_K^{*2}$.*

Доведення одержуємо з леми 3 за допомогою таких самих міркувань, як і у випадку локального основного поля (див. [3, Лема 9.5 і 9.7]).

Лема 5. *Нехай A – розкладна еліптична крива з адитивною редукцією, визначена над загальним локальним полем k і задана рівнянням $y^2 = x(x - \pi^m d)(\pi x - \pi e)$, де $d, e \in O_K^*$. Тоді образ гомоморфізму δ з точної послідовності (1) породжується елементами $\delta((0,0)) = (-\pi e, -\pi^m d)$ і $\delta((\pi e, 0)) = (\pi e(\pi e - \pi^m d), \pi e - \pi^m d)$.*

Доведення. Легко перевірити, що як і у випадку локального поля група $A(K)/2A(K)$ має своїми представниками точки $(0,0)$, $(\pi^m d, 0)$ і $(\pi e, 0)$. Тому $(A(K)/2A(K))$ породжується образами будь-якої пари цих точок.

Те, що $\delta((0,0))$ та $\delta((\pi e, 0))$ мають згаданий у формулюванні вигляд, випливає з явного обчислення гомоморфізму δ для еліптичних кривих над довільним полем, проведеного в [3, Твердження 3.2]. □

Доведення теореми 1. Для еліптичної кривої A над довільним полем маємо точні послідовності

$$0 \longrightarrow A(K)2A(K) \xrightarrow{\delta} H^1(K, A(\bar{K})_2) \xrightarrow{\rho} H^1(K, A(\bar{K}))_2 \longrightarrow 0$$

і

$$0 \longrightarrow (\operatorname{Br} K)_2 \xrightarrow{\iota} (\operatorname{Br} A)_2 \xrightarrow{\kappa} H^1(K, A(\bar{K})_2) \longrightarrow 0 \tag{3}$$

Черноусов і Гулецький показали [4], що існує гомоморфізм

$$\varepsilon_0 \colon H^1(K, A(\bar(K)_2)) \to (\operatorname{Br} A)_2$$

для якого $\kappa \circ \varepsilon_0 = \rho$ і $\varepsilon_0(\ker \rho) = 0$. Звідси випливає існування єдиного гомоморфізму $\varepsilon \colon H^2(K, A(\bar(K)_2)) \to (BrA)_2$, для якого $\kappa \circ \varepsilon_0 = 1$. Тому точна послідовність (3) засвідчує, що $(\operatorname{Br} A)_2 \cong (\operatorname{Br}_K)_2 \oplus \operatorname{Im} \varepsilon$.

$$|\operatorname{Im} \varepsilon| = |H^1(K, A(\bar(K)_2))| = |A(K)/2A(K)| = |A(K)_2| = 4$$

згідно з теоремами 1, 2 та лемою 1. Звідси, згідно з лемами 2 і 5 випливає, що достатньо знайти в групі $(\operatorname{Br} A)_2$ образи стосовно гомоморфізму ε_0 тих твірних елементів групи $H^1(K, A(\bar(K)_2))$, які доповнюють, відповідно, твірні $(\alpha, 1)$ та $(1, \alpha)$ у випадку невиродженої редукції; $(1, \alpha)$ і $(1, \pi^m \beta)$, якщо $\gamma \notin O_K^{*2}$ та $(1, \alpha)$, $(1, \pi)$, якщо $\gamma \in O_K^{*2}$, у випадку мультиплікативної редукції; $(-\pi e, -\pi^m d)$, $(\pi e(\pi e - \pi^m d)$, $\pi e - \pi^m d)$ у випадку адитивної редукції. Використовуючи обчислення гомоморфізму ε_0, проведені в [3], одержуємо, що цими образами є, відповідно, B_π, C_π, ; B_α, B_π ; B_α, C_α. Звідси і випливає твердження теореми.

Зазначимо, що для кривих з виродженою редукцією твердження 2, 3 теореми 1 правильне для загальних локальних полів на підставі теореми 2.

Теорема 4. *Нехай A – еліптична крива з невиродженою редукцією над псевдолокальним полем K з полем лишків характеристики, що не дорівнює 2. Нехай далі $y^2 = x^3 + ax + b$ – Вейєрштрассове рівняння кривої A. Тоді група $(BrA)_2$ складається з двох елементів, якщо поліном $x^3 + ax + b$ не має коренів у полі K; з чотирьох елементів, якщо цей поліном має один корінь в полі K; і з восьми елементів, якщо він має всі корені в полі K.*

Доведення. У [2] для кривої з невиродженою редукцією над локальним полем наведені списки попарно неізоморфних кватерніонних алгебр, які вичерпують всю групу $(BrA)_2$ і складаються відповідно з двох, чотирьох та восьми елементів залежно від того, чи поліном $x^3 + ax + b$ не має коренів, має один або три корені у полі K. Доведення того, що всі ці алгебри неізоморфні, дослівно проходить і для кривої A над загальним локальним полем. Оскільки за теоремою 3 в умовах теореми 4 не може бути більше, ніж відповідно два, чотири або вісім елементів групи $(BrA)_2$, то звідси і випливає твердження теореми 4. □

Тепер перейдемо до гіпереліптичних кривих, визначених над псевдолокальним полем. Реман, Тіхонов і Янчевський [7] довели такий результат для гіпереліптичних кривих над довільним полем K.

Теорема 5 (Реман, Тіхонов, Янчевський). *Нехай C/K гіпереліптична крива над полем K, яка відповідає афінній кривій заданій рівнянням*

$$y^2 = (x-a)g_1(x)\dots g_n(x), \tag{4}$$

де $g_1(x),\dots,g_n(x)$ незвідний поліном. Нехай $b_1,\dots,b_n$ корені $g_1,\dots,g_n$. Нехай

$$\varepsilon\colon {}_2H^1(G,\overline{J}) \longrightarrow BrC_2$$

переріз гомоморфізму $\kappa\colon (BrC)_2 \to H^1(G,\overline{J})_2$ і нехай $I = \operatorname{Im}\varepsilon$. Тоді

$$BrC_2 \cong (BrK)_2 \oplus I$$

і довільний елемент з I можна зобразити за допомогою алгебри

$$\operatorname{tr}_G^{H_i}[(s_1,(x-a)(x-b_1))] \otimes \dots \otimes \operatorname{tr}_G^{H_n}[(s_n,(x-a)(x-b_n))], \tag{5}$$

де $s_1 \in K_i^* = K(b_i)$. Навпаки, довільна алгебра з (5) нерозгалужена над C. Вона тривіальна в I тоді і тільки тоді, якщо вона подібна до алгебри вигляду

$$A = A_1 \otimes \dots \otimes A_n,$$

де $A_i \in \operatorname{tr}_G^{H_i}[(s_i,(x-a)(x-b_i))]$, $s_i = \prod_j (x_j - b_i)^{n_j}$ і $\sum_j n_j(x_j,y_j)$ дивізор степеня 0 на C, визначений над K, носій якого не містить Вейєрштрассових точок.

Використовуючи цю теорему та наступні леми, можемо отримати описання 2-кручення групи Брауера гіпереліптичних кривих над псевдолокальним полем.

Лема 6. *Нехай A – абелевий многовид над псевдоскінченним полем k. Тоді $H^1(k,A) = 0$.*

Доведення. Елементи групи $H^1(k,A)$ інтерпретують як класи ізоморфізму головних однорідних просторів для A над k, тобто алгебричні многовиди, які стають ізоморфними з A над скінченним розширенням поля k. Нейтральним елементом цієї групи є клас головних однорідних просторів, які мають k-раціональну точку. Вони всі ізоморфні з A над k. Оскільки псевдоскінченне поле є псевдоалгебрично замкненим, то кожен непорожній многовид над цим полем k має k-раціональну точку, тому кожен клас ізоморфізму головних однорідних просторів тривіальний. □

Лема 7. *Нехай A – абелевий многовид з невиродженою редукцією $\bar{A}$ над повним дискретно нормованим полем K з полем лишків k. Нехай K_{nr} – максимальне нерозгалужене розширення поля K і G_{nr} – його група Галуа. Тоді $G_{\mathrm{nr}} \cong \operatorname{Gal}(\overline{k}/k)$ і $H^1(G_{nr},A) \simeq H^1(\operatorname{Gal}(\overline{k}/k),\bar{A}(\bar{k}))$.*

Лема 8. *Нехай гіпереліптична крива C з доброю редукцією і нехай $A = (a,g)$ нерозгалужена кватерніонна алгебра над $K(C)$, де $g \in K(C)$. Тоді A тривіальна.*

Теорема 6. *У позначеннях теореми 5 нехай C/K гіпереліптична крива з доброю редукцією над не діадичним локальним полем K. Тоді кожен нетривіальний елемент з $(BrC)_2$ зображається тензорним добутком алгебр вигляду*

$$(\pi,(x-a)^{[K_i:K]}g_i), \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Доведення. Доведення майже не відрізняється від доведення для випадку локального основного поля. Для зручності читача наведемо відповідні міркування з праці [7]. Нехай b_i корінь полінома $g_i(x)$, $K_i = K(b_i)$. Тоді розширення K_i/K нерозгалужене і кожен елемент з K_i/K_i^{*2} має вигляд $\alpha_{K_i}\pi^j$, де α_{K_i} неквадратний елемент в O_{K_i}.

На підставі теореми 5 і леми 8 кожен елемент з I можна зобразити у вигляді

$$\mathrm{tr}^{H_1}[(\pi,(x-b_1))]\otimes\cdots\otimes\mathrm{tr}_G^{H_n}[(\pi,(x-a)(x-b_n))],$$

де $H_i = \mathrm{Gal}\,(\bar{K}/K_i)$. Крім того,

$$\mathrm{tr}_G^{H_i}[(\pi,(x-a)(x-b_i))] = [(\pi,(x-a)^{[K_i:K]}.$$

Звідси випливає, що алгебри

$$[(\pi,(x-a)^{[K_i:K]}g_i)],\ldots,[(\pi,(x-a)^{[K_n:K]}g_n].$$

є системою твірних групи $(BrC)_2$. Тепер з наслідку 3.9 з праці [7] випливає, що не існує нетривіальних співвідношень між твірними групи $(BrC)_2$. Згаданий наслідок стверджує, що елемент з I тривіальний тоді і тільки тоді, коли він зображається алгеброю $A = A_1\otimes\ldots\otimes A_n$, де

$$A_i \in tr_G^{H_i}[(s_i,(x-a)(x-b))], \qquad s_i = \prod_{j=1}^{t}\prod_{l=1}^{j_k}(x(\sigma_l Q_l)-b_1),$$

Q_i – точка кривої C така, що $y(Q_j)\in K(x(Q_j))$, $y(Q_j)\neq 0$.

Для цього достатньо показати, що не існує точок $Q_j \in C$, для яких $y(Q_j) \in$ $\in K(x(Q_j)), y(Q_j)\neq 0$ і $\pi = \prod_{l=1}^{j_k}(x(\sigma_l Q_j)-b_i)$, де $\sigma_{j_1}(Q_j),\sigma_{j_k}(U_l)$ спряжені з Q_j над K. Припустимо, що така точка Q_j існує. Оскільки C має добру редукцію, то $f(x(Q_j)) = \pi u$ для деякого $u\in O^*_{K(x(Q_j))}$. Отже, $f(x(Q_j))\notin K(x(Q_j))^{*2}$ і $y(Q_j)\notin$ $\notin K(x(Q_j))$. Тому не існує нетривіальних співвідношень між зазначеними твірними ${}_2\mathrm{Br}\,C$. □

1. *Ax J.* The elementary theory of finite fields. / *Ax J.* // Ann. Math. – 1968. – Vol. 88, №2. – P. 239-271.
2. *Янчевский В.И.* Кручение и группы Брауэра локальных эллиптических кривых / *Янчевский В.И., Марголин Г.Л.* // Алгебра и анализ. – 1995. – Т. 7, №3. – С. 200-239.
3. *Янчевский В.И.* Кручение и группы Брауэра локальных гиперэллиптических кривых / *Янчевский В.И., Марголин Г.Л.* // Алгебра и анализ. – 1995. – Т. 7, №6. – С. 227-249.
4. *Chernousov V.* 2-Torsion of the Brauer group of an elliptic curve: generators and relations / *Chernousov V., Guletskii V.* – Universitat Bielefeld, 2000. – Preprint 00-037.
5. *Андрійчук В.І.* Про групи Брауера еліптичних кривих / *Андрійчук В.І., Стахів Л.Л.* // Вісник Київ. ун-ту. Серія фіз.-мат. науки. – 1999. – Т. 2. – С.10-13.
6. *Serre J.-P.* Corps locaux. / *Serre J.-P.* – Paris. Hermann, 1962.
7. *Rehman U.* Two torsion on the Brauer groups of hyperelliptic curves and unramified algebras over their function field / *Rehman U., Tikhonov S.V., and Yancevskii V.I.* // Communications in Algebraю – 2001. – Vol. 29, №9. – P. 3971-3987.

2-TORSION OF THE BRAUER GROUP OF ELLIPTIC AND HYPERELLIPTIC CURVES OVER PSEUDOLOCAL FIELDS

Ludmyla STAKHIV

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: mlmstakhiv@gmail.com

The 2-Torsion of the Brauer group of elliptic and hyperelliptic curves over pseudolocal fields are described.

Key words: pseudolocal field, elliptic curve, hyperelliptic curve, Brauer group.

2-КРУЧЕНИЯ ГРУПП БРАУЭРА ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ И ГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРИВЫХ НАД ПСЕВДОЛОКАЛЬНЫМИ ПОЛЯМИ

Людмила СТАХИВ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000, Львов, Университетская, 1
e-mail: mlmstakhiv@gmail.com

Исследовано 2-кручения групп Брауэра эллиптических и гиперэллиптических кривых над псевдолокальными полями.

Ключевые слова: псевдолокальное поле, эллиптическая кривая, гиперэллиптическая кривая, якобиан, группа Брауэра.

Стаття надійшла до редколегії 01.09.2009

Прийнята до друку 16.12.2009