ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2009.
Вип. 71. С. 175–183

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech. Math. 2009.
Is. 71. P. 175–183

УДК 512.553.2

ПРО МОНОЇДИ, НАД ЯКИМИ ВСІ КВАЗІФІЛЬТРИ ТРИВІАЛЬНІ

Роман ОЛІЙНИК

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: forvard-or@ukr.net

В категорії $S-$полігонів частина результатів гомологічного характеру є аналогами відповідних фактів з теорії $R-$модулів. Цанг, Гао і Ксі дослідили взаємозв'язок між теоріями скруту та квазіфільтрами лівих конгруенцій, визначених на $S-$полігоні S. Розглянуто квазіфільтри та $\sigma-$квазіфільтри лівих конгруенцій моноїда з нулем. Основний результат засвідчує, що усі квазіфільтри і $\sigma-$квазіфільтри є тривіальними тоді і тільки тоді, коли комутативний моноїд S досконалий.

Ключові слова: моноїд, полігон, конгруенція, квазіфільтр, теорія скруту.

1. Вступ. Теорія скрутів у випадку категорії модулів розвинута достатньо повно. Для полігонів над моноїдом немає навіть єдиного підходу до поняття радикала чи скруту, оскільки можливі різні підходи до введення цих понять, одні з яких ґрунтуються на основі теорії конгруенцій, інші на використанні традиційних підполігонів. Ще радикальний підхід заснований на ідеї побудови спеціальної категорії полігонів, у якій морфізми визначають як композиції рісових морфізмів та вкладень. Цей метод вперше використали у праці Віганта і Лекса [10], яка ґрунтувалася на радикалах Хьонке. Він розширений і суттєво розвинений у праці Вігандта [11].

Основні поняття пов'язані зі скрутами у категорії $S-$полігонів ввів до розгляду Людеман ще у 1983 р. [7], використавши аналогію з існуючою теорією скрутів у категорії $R-$модулів. Є ще багато праць, в яких розглядали теорію скрутів у категорії полігонів, серед яких зазначимо [12], [13]. Зауважимо, що працюючи з цими об'єктами, природні результати отримують за допомогою техніки квазіфільтрів.

Однією з первісних проблем, які виникають у випадку вивчення скрутів у тій чи іншій категорії, є задача про їхню тривіальність. Для деяких категорій вона розв'язана, зокрема, у категорії модулів. Відповідні результати описані у книзі Голана [4]. Найбільш загальне формулювання цієї проблеми розглядали у праці Насташеску [9] у контексті категорій Гротендика. Ця проблема для таких категорій еквівалентна задачі про двоелементність ґратки відповідних фільтрів Габріеля.

У категорії полігонів, яка над більшістю моноїдів не є Гротендиковою, відмічена вище задача важка, тому ми розглядаємо випадок тривіальності спеціальних квазіфільтрів, тобто $\sigma-$квазіфільтрів конгруенцій моноїда S. Вони є аналогами $S-$фільтрів ідеалів кільця R [1] та квазіфільтрів. У [2] Комарницький М. Я. довів, що кільця, над якими всі $S-$скрути тривіальні є локальними і досконалими. Ми доводимо полігонний аналог цього результату.

Моноїдними відповідниками фільтрів Габріеля є квазіфільтри конгруенцій і виникає потреба згадати деякі результати, пов'язані з такими фільтрами. У [12], [13] досліджували фільтри правих конгруенцій, які тісно позв'язані зі скрутами і схожі на фільтри Габріеля. Ці фільтри називають квазіфільтрами, з метою узгодження термінології. Відмінність між квазіфільтром і радикальним фільтром [3] полягає в тому, що квазіфільтри складаються з конгруенцій із певними властивостями, а радикальні фільтри – з ідеалів.

Означення та термінологія, які не наведені у статті, можна знайти у монографіях [3], [6], [8].

2. Термінологія та попередні відомості.

Надалі, якщо не сказано протилежне, літера S позначатиме фіксований моноїд з одиницею 1 та нулем 0 .

Поняття $S-$полігону є природним узагальненням модуля над кільцем і множини з дією групи, але при відсутності нуля в моноїді виникають великі труднощі, тоді треба шукати такі твердження, які правильні і для множин, і для модулів.

Нагадаємо формальне означення полігону над моноїдом.

Означення 1. *Нехай S – моноїд і* $\mathrm{A} \neq \emptyset$ *множина. Назвемо множину A лівим полігоном над S, якщо задано таке відображення $\mu : S \times A \to A$,*

$$(s,a) \to sa = \mu\left(s,a\right),$$

що виконуються умови:

1) $1a = a$;

2)$(st)\,a = s\,(ta)$ *для всіх* $a \in A,\ s,t \in S$.

Називатимемо μ множенням зліва елементів з A на елементи з S. Аналогічно визначається правий $S-$полігон A і в позначеннях це відображається так: A_S – правий, ${}_SA$ – лівий полігони. Вживаємо скорочений термін «$S-$полігон», якщо відомо яку з операцій – праву, чи ліву, вибрано на ньому.

Зауважимо, що замість терміна $S-$полігон різні автори вживають такі: $S-$множина, $S-$операнда, $S-$дія, $S-$система, $S-$автомат і т. д.

Зазначимо, що впродовж статті кожен лівий $S-$полігон є унітарним (тобто $1A = A$) та центрованим (тобто $0a = s0 = 0$, де 0 – нуль полігону A).

Означення 2. *Нехай ${}_SA$ та ${}_SB$ – ліві $S-$полігони. Відображення $f :_S A \to_S B$ називається гомоморфізмом з $S-$полігонів A в B, якщо для будь-яких $s \in S$ та $a \in A$ виконується рівність $f\,(sa) = sf\,(a)$.*

Категорію лівих $S-$полігонів та їхніх гомоморфізмів позначатимемо через $S - Act$.

Означення 3. *Нехай ρ – відношення еквівалентності на $S-$полігоні A. Тоді ρ називається лівою конгруенцією на A, якщо $sa\rho sb$ для всіх $s \in S$ та $a, b \in A$, що задовольняють умову $a\rho b$.*

Аналогічно визначається права конгруенція.

Як відомо, над конгруенціями можна виконувати операції.

1. Нехай ρ, τ – ліві конгруенції на моноїді S. Тоді

$$\rho \wedge \tau = \{(a,b) \ \mid \ (a,b) \in \rho, \ \ (a,b) \in \tau\}$$

– звичайний перетин конгруенцій на моноїді S.

2. Нехай ρ, τ – ліві конгруенції на моноїді S. Тоді $\rho \vee \tau$ – найменша конгруенція на моноїді S, яка містить конгруенції ρ та τ.

Множину всіх лівих конгруенцій на S позначатимемо через $Con_l(S)$. Ця множина насправді є обмеженою ґраткою стосовно щойно визначених об'єднання і перетину конгруенцій [8]. Найменшу конгруенцію позначатимемо через Δ, а найбільшу – 1_S. Зрозуміло, що $\Delta = \{(a,b) \in S \times S \,|a = b\}$ і $1_S = S \times S$.

Для довільної лівої конгруенції ρ на A і для будь-якого елемента $m \in A$ визначимо множину

$$(\rho : m) = \{(a,b) \in S \times S \ \mid \ (am, bm) \in \rho\}.$$

Відомо, що $(\rho : m)$ є лівою конгруенцією на S. Для повноти викладення доведемо таку просту лему.

Лема 1. *Нехай I – лівий ідеал моноїда S. Тоді $\Delta \bigcup (I \times I)$ – ліва конгруенція моноїда S.*

Доведення. Нехай $\rho = \Delta \bigcup (I \times I)$, $(a,b) \in \rho$ тоді і тільки тоді, коли $a, b \in I$ або $a = b$. Перевіримо, що ρ є відношенням еквівалентності на моноїді S. За побудовою ρ – рефлексивне. Покажемо, що ρ – симетричне. Нехай $(a,b) \in \rho$. Оскільки I – ідеал, то $(b,a) \in \rho$. Транзитивність: нехай $(a,b) \in \rho$ і $(b,c) \in \rho$. Це означає, що $a, b, c \in I$. Звідси отримуємо, що $(a,c) \in \rho$. Покажемо, що для будь-яких пар $(a,b) \in \rho$ та елементів $s \in S$ виконується $(sa, sb) \in \rho$. Оскільки $a, b \in I$, то за означенням ідеалу $sa, sb \in I$. Лему доведено. □

Конгруенцію побудовану за допомогою ідеалу, за схемою, використаною у лемі 1, називають конгруенцією Ріса і позначають через ρ_I.

Лема 2. *Нехай I_1, I_2 – ліві ідеали моноїда S, $\rho = \Delta \bigcup (I_1 \times I_1)$ та $\tau = \Delta \bigcup (I_2 \times I_2)$ – ліві конгруенції на S. Тоді*

$$\rho \wedge \tau = \Delta \bigcup \left(\left(I_1 \bigcap I_2 \right) \times \left(I_1 \bigcap I_2 \right) \right)$$

та

$$\rho \vee \tau = \Delta \bigcup \left(\left(I_1 \bigcup I_2 \right) \times \left(I_1 \bigcup I_2 \right) \right).$$

Доведення. Випливає з леми 1. □

Означення 4. *([7]) Теорією скруту τ в категорії лівих $S-$полігонів $S-Act$ називаємо впорядковану пару $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{F})$ класів $S-$полігонів з такими властивостями:*

1) $Hom_S(T, F) = 0$ для всіх $T \in \boldsymbol{T}$ і $F \in \boldsymbol{F}$;

2) якщо $Hom_S(T, F) = 0$ для всіх $F \in \boldsymbol{F}$, тоді $T \in \boldsymbol{T}$;

3) якщо $Hom_S(T, F) = 0$ для всіх $T \in \boldsymbol{T}$, тоді $F \in \boldsymbol{F}$.

Тоді $S-$полігони з класу $\boldsymbol{T}$ називаються періодичними полігонами та з класу $\boldsymbol{F}$ називають напівпростими. Класи $\boldsymbol{T}$ та $\boldsymbol{F}$ називаються періодичними та напівпростими відповідно. Теорія скруту τ називається спадковою, якщо $\boldsymbol{T}$ – замкнений стосовно підполігонів. Спадкову теорію скруту τ називаємо скрутом.

Означення 5. *Конгруенція ρ на $S-$полігоні A називається $\tau-$щільною, якщо $A/\rho \in \boldsymbol{T}_\tau$.*

Позначимо множину всіх $\tau-$щільних конгруенцій на A через $\mathrm{C}_\tau[A]$, або просто C_τ, якщо зрозуміло про який полігон йдеться.

Означення 6. *Напередрадикальним квазіфільтром моноїда S називається підмножина $\mathcal{E}$ в $Con(S)$, яка задовольняє умови:*

1) якщо $\rho \in \mathcal{E}$ і $\rho \subseteq \tau \in Con(S)$, то $\tau \in \mathcal{E}$;

2) з умови $\rho \in \mathcal{E}$ випливає $(\rho : s) \in \mathcal{E}$ для всіх $s \in S$.

Якщо крім цих умов виконується:

3) якщо $\rho \in \mathcal{E}$ і $\tau \in Con(S)$ таке, що $(\tau : s)$, $(\tau : t)$ належать до $\mathcal{E}$ для всіх $(s, t) \in \rho$, то $\tau \in \mathcal{E}$;

то $\mathcal{E}$ називається квазіфільтром.

Напередрадикальні квазіфільтри утворюють ґратку стосовно очевидних операцій об'єднання і перетину.

Зв'язок між скрутами в категорії $S-$полігонів і квазіфільтрами моноїда S визначає така теорема.

Теорема 1. *([13]) Нехай S – $S-$полігон та τ – теорія скруту над S:*

1) якщо τ є спадковою теорією скруту, то C_τ є квазіфільтром лівих конгруенцій визначених на моноїді S;

2) якщо $\mathcal{E}$ є квазіфільтром, то існує така спадкова теорія скруту τ, що $\mathcal{E} = \mathrm{C}_\tau$.

Наведемо означення фільтра часток лівих ідеалів для моноїда.

Означення 7. *([13])Нехай $\mathcal{R}$ множина лівих ідеалів моноїда S. Тоді $\mathcal{R}$ називається лівим фільтром часток моноїда S, якщо виконуються такі умови:*

1) якщо $I \in \mathcal{R}$ та Jлівий ідеал такий, що $I \subseteq J$, то $J \in \mathcal{R}$;

2) якщо $I, J \in \mathcal{R}$, то $I \bigcap J \in \mathcal{R}$;

3) якщо $I \in \mathcal{R}$, то $(I : s) \in \mathcal{R}$ для всіх $s \in S$, де $(I : s) = \{t \in S \,|st \in I\}$.

Якщо крім цих умов виконується:

4) якщо для кожного $a \in I \in \mathcal{R}$ виконується $(J : a) \in \mathcal{R}$, то $J \in \mathcal{R}$, де J лівий ідеал моноїда S;

то $\mathcal{R}$ називається спеціальним лівим фільтром часток моноїда S.

Нагадаємо означення досконалого моноїда, яке є аналогом досконалого кільця.

Означення 8. *Об'єкт P є проективним, якщо для кожного сур'єктивного гомоморфізму $s : A \to B$ та гомоморфізму $g : P \to B$ існує таке $f : P \to A$, що $sf = g$.*

Означення 9. *Покриттям лівого полігону B називається сур'єктивний гомоморфізм $s : Z \to B$, всі звуження якого на підоб'єкти в Z не є сур'єктивними.*

Означення 10. *Проективним покриттям називають таке $f : Z \to B$, де Z – проективний об'єкт.*

Означення 11. *Назвемо моноїд S досконалим, якщо будь-який $S-$ полігон має проективне покриття.*

Наведемо теорему-критерій про досконалі моноїди.

Теорема 2. ([5]) *Комутативний моноїд є досконалим тоді і тільки тоді, коли в ньому немає нескінчених строго спадних та строго зростаючих ланцюгів головних ідеалів.*

У випадку кілець умова обриву зростаючих ланцюгів є наслідком умови обриву спадних ланцюгів і в означенні досконалого кільця тоді достатньо умови обриву спадних ланцюгів головних ідеалів.

3. Основні результати.

Квазіфільтри відіграють важливу роль, як було сказано вище, у вивченні скрутів у категорії $S - Act$.

Нехай задано фіксовану ліву конгруенцію σ на S. Тоді розглянемо множину:

$$\mathcal{E}_\sigma = \{\tau \ \mid \ \tau \in Con\,(S)\,, \ \ \tau \vee \sigma = 1_S\}\,.$$

Лема 3. *Для довільної конгруенції σ множина $\mathcal{E}_\sigma$ є квазіфільтром.*

Доведення. Перевіримо три умови з означення 6. Перші дві умови перевіряються безпосередньо. Покажемо від супротивного, що третя умова виконується. Припустимо, що 3 виконується, але $\tau \notin \mathcal{E}_\sigma$. Тоді існує така конгруенція ρ, яка містить конгруенції σ та τ, але $\rho \neq 1_S$. Далі можемо знайти такі пари (a,b) конгруенції 1_S, додаванням яких до τ збільшують $\sigma \vee \tau$ до 1_S. З іншого боку, (a,s) та (s,b) належать до ρ. Оскільки ρ – конгруенція, за транзитивністю маємо, що $(a,b) \in \rho$. А це суперечність. Лему доведено. $\square$

Називатимемо $\mathcal{E}_\sigma$ спеціальним квазіфільтром або скорочено $\sigma-$квазіфільтром. Говоритимемо, що $\sigma-$квазіфільтр тривіальний, якщо він містить Δ або ж складається тільки з одиничної конгруенції.

Лема 4. *Нехай S – моноїд, I – лівий ідеал в S, $\sigma = \sigma_I$ – рісова конгруенція. Тоді $\sigma-$квазіфільтр $\mathcal{E}_\sigma$ не містить нетривіальних рісових конгруенцій.*

Доведення. Від супротивного. Нехай $\tau, \rho \in Con\,(S)$, але вони рісові. Тобто їх можна побудувати так: $\rho = \Delta \bigcup (I_1 \times I_1)$ та $\tau = \Delta \bigcup (I_2 \times I_2)$. Щоб фільтр був $\sigma-$квазіфільтр $\mathcal{E}_\sigma$, треба, щоб $\sigma \vee \tau = 1_S$. З леми 2: $\rho \vee \tau = \Delta \bigcup ((I_1 \bigcup I_2) \times (I_1 \bigcup I_2))$. З іншого боку, $\sigma \vee \tau = \Delta \bigcup ((I_1 \bigcup I_2) \times (I_1 \bigcup I_2)) = S \times S$. Звідси випливає, що $I_1 \bigcup I_2 = S$. Але це виконується тоді і тільки тоді, якщо $I_1 = S$ або $I_2 = S$. Оскільки моноїд S містить одиницю , то отримуємо, що I_1 або I_2 збігається з всім S. Лему доведено. $\square$

Означення 12. *Нехай I – головний ідеал комутативного моноїда S. Елемент $a \in S$ називається твірним, якщо $aS = I$.*

Визначимо множину

$$\rho_{(1,a)} = \{s(1,a),\ s(a,1),\ s(1,a^2),\ s(a^2,1),\ ...,\ s(1,a^n),\ s(a^n,1),\ ...\} \bigcup \Delta,$$

де a – твірний елемент головного ідеалу I та $n \in \mathrm{N}$.

Лема 5. *Нехай I – головний ідеал комутативного моноїда S. Множина $\rho_{(1,a)}$, де a – твірний елемент головного ідеалу I та $n \in \mathrm{N}$, породжує нерісову конгруенцією на комутативному моноїді S.*

Доведення. За побудовою $\rho_{(1,a)}$ рефлексивне, симетричне. Транзитивність випливає з того, що в цій множині є тільки пари вигляду $s(1,a), s(a,1), s(1,a^2), s(a^2,1), ...$. Замкненість щодо множення також випливає з побудови. Лему доведено. □

Зауваження 1. Якщо існує два твірних елементи головного ідеалу, тоді треба перевірити, який буде породжувати цю конгруенцію, а який ні.

Лема 6. *Нехай I – головний ідеал комутативного моноїда S, ρ_{aS} – рісова конгруенція, $\tau_{(1,a)}$ – нерісова конгруенція, де a – твірний елемент головного ідеалу I. Тоді $\rho_{aS} \vee \tau_{(1,a^n)} = 1_S$, де n – довільне натуральне число.*

Доведення. Візьмемо пари $(s, sa^n) \in \tau_{(1,a^n)}$ та $(sa^n, a^n) \in \rho_{aS}$. За транзитивністю отримаємо пару: (s, a^n). Взявши пари $(a^n, 1) \in \tau_{(1,a^n)}$ та (s, a^n), отримаємо пару вигляду $(s, 1)$, де $s \in S$. Це означає, що ми отримали всі пари з $S \times S$. Лему доведено. □

Лема 7. *Нехай I – головний ідеал комутативного моноїда S, ρ_{aS} – рісова конгруенція, $\tau_{(1,a)}$ – нерісова конгруенція, де a – твірний елемент головного ідеалу I. Тоді $\rho_{a^nS} \vee \tau_{(1,a)} = 1_S$, де n – довільне натуральне число.*

Доведення. Аналогічне як в лемі 6. □

Лема 8. *Нехай a_1 та a_2 – твірні елементи головних ідеалів комутативного моноїда S такі, що $a_1 \neq a^n$ та $a_2 \neq a^k$, де $a \in S$ та є твірним елементом головного ідеалу, ρ_{a_2S} – рісова конгруенція, $\tau_{(1,a_1)}$ – нерісова конгруенція. Тоді $\rho_{a_2S} \vee \tau_{(1,a_1)} \neq 1_S$.*

Доведення. Якщо a_1 не ділить a_2, тоді $\rho_{a_2S} \vee \tau_{(1,a_1^n)} = \rho_{a_2S} \bigcup \tau_{(1,a_1^n)} \neq 1_S$. Це звичайне об'єднання буде конгруенцією. Транзитивність ніяких нових пар не дасть. Нехай $u = (a_1, a_2)$, тобто $a_1 = uk_1$ та $a_2 = uk_2$. Тоді виберемо пари $(a_2, k_1a_2) \in \rho_{a_2S}$ та $(k_2a_1, k_2) \in \tau_{(1,a_1)}$. Оскільки $a_1 = uk_1$, тоді $(k_2ua_2, k_2) \in \tau_{(1,a_1)}$ та $a_2 = uk_2$ отримаємо пару $(k_1a_2, k_2) \in \tau_{(1,a_1)}$. За транзитивністю отримаємо пари (a_2, k_2). Отже, $\rho_{a_2S} \vee \tau_{(1,a_1)} = \rho_{k_2S} \vee \tau_{(1,a_1)} \neq 1_S$, бо a_2 не ділить a_1.

Доведення другого випадку випливає при $k_1 = 1$. Лему доведено. □

Лема 9. *Нехай $\sigma = \rho_{aS}$ – рісова конгруенція, де a – твірний елемент головного ідеалу I та $n \in \mathrm{N}$. Для довільного конгруенції σ правильна рівність $\mathcal{E}_\sigma = \left\{S \times S, \tau_{(1,a)}\tau_{(1,a^2)}, ..., \tau_{(1,a^n)}, ...\right\}$, де $n \in \mathrm{N}$.*

Доведення. Випливає з лем 4 та 6. □

Лема 10. *Нехай $\sigma = \tau_{(1,a)}$ – нерісова конгруенція, де a – твірний елемент головного ідеалу I та $n \in \mathrm{N}$. Для довільного σ-квазіфільтра $\mathcal{E}_\sigma = \{S \times S, \tau_{aS}, \tau_{a^2S}, ..., \tau_{a^nS}, ...\}$, де $n \in \mathrm{N}$.*

Доведення. Випливає з лем 7 та 8. □

Лема 11. *Нехай S – досконалий комутативний моноїд. Тоді довільний квазіфільтр вигляду $\mathcal{E}_\sigma$ є тривіальним.*

Доведення. За теоремою 2: досконалий комутативний моноїд S немає ні зростаючого, ні спадного нескінченного ланцюга головних ідеалів. Припустимо, що

$$aS \supset a^2S \supseteq a^3S \supseteq ... \supseteq a^nS,$$

де a – твірний елемент головного ідеалу I та $n \in \mathrm{N}$. Але цей ланцюг повинен обриватися, тобто $a^k = 0$, для деякого фіксованого $k \in \mathrm{N}$. За лемою 5 отримаємо, що $\sigma_{(1,a)} = \{s(1,a), ..., s(1,a^{k-1})\}$ та за третьою умовою квазіфільтра $(\Delta : t) \in \mathcal{E}_\sigma$ для довільного $t \in aS$. Це означає, що $\mathcal{E}_\sigma$ – тривіальні. Тепер розглянемо випадок, коли головний ідеал ідемпотентний, тобто $I^2 = I$. Тоді за допомогою ідеалу I з леми 5 можна отримати конгруенцію $\sigma_{(1,a)}$. Але за умовою $\mathcal{E}_\sigma$ є тривіальним, бо $(\Delta : t) \in \mathcal{E}_\sigma$ для довільного $t \in aS$. Це випливає з того, що ідеал I – головний та $a^2 = a$. Лему доведено. □

Теорема 3. *Всі квазіфільтри в категорії лівих $S-$полігонів є тривіальними тоді і тільки тоді, коли S є досконалим.*

Доведення. Від супротивного. Припустимо, що існують нетривіальні квазіфільтри. Візьмемо довільний твірний елемент a головного ідеалу. За допомогою цього елемента можна побудувати спадний ланцюг головних ідеалів $aS \supseteq a^2S \supseteq ... \supseteq a^nS \supseteq ...$. Але цей ланцюг повинен обірватися, бо в іншому випадку моноїд не буде досконалим. Звідси отримуємо суперечність. У протилежний бік доведення випливає з леми 11. Теорему доведено. □

Наслідок 1. *Всі фільтри часток в категорії лівих $S-$полігонів є тривіальними тоді і тільки тоді, коли S є досконалим.*

Отримані результати можна об'єднати в одну теорему.

Теорема 4. *Нехай S – комутативний моноїд. Тоді такі умови еквівалентні:*

(1) *всі спеціальні квазіфільтри тривіальні;*
(2) *всі квазіфільтри тривіальні;*
(3) *S – досконалий моноїд.*

Доведення. Випливає з попередньої леми 11 і теореми 3. □

1. *Горбачук О.Л.* Про $S-$кручення в модулях / *Горбачук О.Л., Комарницький М.Я.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1977. – Вип. 12. – С. 32-34.
2. *Комарницкий Н.Я.* Об аксиоматизируемости некоторых классов модулей, связаных с кручением / *Комарницкий Н.Я.* // Мат. islед. – 1980. – Вып. 48. – С. 92-109.
3. *Мишина А.П.* Абелевы группы и модули / *Мишина А.П., Скорняков Л.А.* – М.: Наука, 1969. – С. 152.
4. *Golan J.S.* Torsion Theories / *Golan J.S.* – Longman Scientific and Technical, Harlow, 1986.
5. *Isbell J.R.* Perfect Monoids / *Isbell J.R.* // Semigroup Forum. – 1971. – Vol. 2. – P. 95-118.

6. *Kilp M.* Monoids, Acts and Categories / *Kilp M., Knauer U., Mikhalov A. V.* – Walter de Gruyter, Berlin, 2000.
7. *Luedeman J.K.* Torsion theories and semigroup of quotients / *Luedeman J.K.* – Lecture Notes in Mathematics 998, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1983. – P. 350-373.
8. *Mitsch H.* Semigroups and Their Lattice of Congruences II / *Mitsch H.* // Semigroup Forum. – 1997. – Vol. 54. – P. 1-42.
9. *Nastasescu C.* Atomical Grothendieck categories / *Nastasescu C., Torrecillas B.* // Int. J. Math. Math. Sci. – 2003. – Vol. 71. – P. 4501-4509.
10. *Wiegandt R.* Torsion Theory for Acts / *Wiegandt R., Lex W.* // Studio Scientiarum Mathematicarum Hungarica. – 1981. – Vol. 16. – P. 263-280.
11. *Wiegandt R.* Radicals and Torsion Theory for Acts / *Wiegandt R.* // Semigroup Forum. – 2006. – Vol. 72. – P. 312-328.
12. *Zhang R.Z.* Torsion theories and quasi-filters of right congruences / *Zhang R.Z., Gao W.M., Xu F.Y.* // Algebra Colloq. – 1994. – Vol. 1, №3. – P. 273-280.
13. *Zhang R.Z.* Hereditary torsion classes of $S-$systems *Zhang R.Z., Shum K.P.* // Semigroup Forum. – 1996. – Vol. 52. – P. 253-270.

ON THE MONOIDS OVER WHICH ALL QUASI-FILTERS ARE TRIVIAL

Roman OLIYNYK

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: forvard-or@ukr.net

In the category of $S-$acts many results of homological character can be prowed which are analogous of known from $R-$modules. An important branch of module theory is hereditary torsion theory. It was observed by Zhang, Gao and Xi that the hereditary torsion theories are closely related with the quasi-filters of left congruences defined on the $S-$set S. In this paper, we investigate the concept of $\sigma-$quasi-filters of left congruences of monoid S. The main result describes a commutative monoids S over which all quasi-filters and $\sigma-$quasi-filters are trivial. Namely, all quasi-filters and $\sigma-$quasi-filters are trivial if and only if monoid S is perfect.

Key words: monoid, poligon, congruence, quasi-filter, torsion theory.

ПРО МОНОИДЫ, НАД КОТОРЫМИ ВСЕ КВАЗИФИЛЬТРЫ ТРИВИАЛЬНЫ

Роман ОЛИЙНЫК

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000, Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: forvard-or@ukr.net

Часть результатов гомологического характера для категории $S-$полигонов аналогичны соответственным фактам из теории $R-$модулей. Цанг, Гао и Кси изучили связи между теориями кручений и квазифильтрами левых конгруэнций, которые определены на $S-$полигоне S. Рассмотрено квазифильтры и $\sigma-$квазифильтры левых конгруэнций моноида с нулем. Основной результат показывает, что все квазифильтры и $\sigma-$квазифильтры тривиальны тогда и только тогда, когда комутативный моноид S совершенен.

Ключевые слова: моноид, полигон, конгруэнция, квазифильтр, теория кручений.

Стаття надійшла до редколегії 16.06.2009

Прийнята до друку 16.12.2009