ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2009.
Вип. 71. С. 156–174

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech. Math. 2009.
Is. 71. P. 156–174

УДК 517.95

МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛІНІЙНОЇ ГІПЕРБОЛІЧНО-ПАРАБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ В НЕОБМЕЖЕНІЙ ОБЛАСТІ

Максим НЕЧЕПУРЕНКО

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: m.nechepurenko@mfc.in.ua*

Розглянуто нелінійну зв'язну еволюційну гіперболічно-параболічну систему в необмеженій за просторовими змінними області. Одержано умови існування та єдиності узагальненого розв'язку. Розширено наші попередні результати [8] до необмеженої області. Класи існування та єдиності є просторами локально інтегровних функцій.

Ключові слова: нелінійна система, мішана задача.

Мішані та крайові задачі для лінійних систем зв'язаних гіперболічно-параболічних рівнянь розглянуто в працях [1]-[3]. Праця [1] містить дослідження мішаної задачі для квазілінійних еволюційних систем зі сталими коефіцієнтами в обмеженій області. Знайдено умови за яких розв'язок таких задач існує та єдиний, також досліджено асимптотичну поведінку повної енергії, асоційованої зі слабким розв'язком. У [3] показано існування та єдиність розв'язку мішаної задачі, асоційованої з нелінійною системою. У праці [5] досліджено квазілінійну систему термопружності та показано, що енергія довільного слабкого розв'язку вибухає за скінченний час, якщо початкова енергія від'ємна.

Нелінійність $|v|^\rho v$ часто виникає в релятивістській квантовій механіці (див. Шифф [11], Сегал [12]), і розглядають її багато авторів для гіперболічних, параболічних і еліптичних рівнянь. Ліонс [15] досліджував хвильове рівняння з такою нелінійністю, тобто $|v|^\rho v$ в гладкій обмеженій і відкритій області Ω з простору $\mathbb{R}^n$ для $n \in \mathbb{N}$ і довів існування та єдиність розв'язку за допомогою методу Фаедо-Гальоркіна та методу компактності. Кларк в [2] розглядав систему зі сталими коефіцієнтами й однорідними умовами на межі Γ. Він довів існування глобального сильного та слабкого розв'язку за методом Фаедо-Гальоркіна, використовуючи спеціальну базу в просторі $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, також показав стійкість повної енергії асоційованої зі слабким розв'язком, використовуючи метод Коморніка-Зузи [10].

У цій праці в необмеженій області розглянуто мішану задачу для нелінійної еволюційної системи, яка, зокрема, містить нелінійні доданки зі степенями $p, q \in (1, 2]$, використано метод введення параметра для дослідження еволюційних рівнянь (див., наприклад, [13]-[14]).

1. Формулювання задачі. Нехай Ω – необмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею $\partial\Omega \in C^1$; $Q_\tau = (0, \tau) \times \Omega,\ 0 < \tau \leqslant T;\ S_T = (0, T) \times \partial\Omega;\ \Omega_\tau = Q_T \cap \{t = \tau\}$. В області Q_T розглянемо систему

$$A_1(u, \theta) \equiv u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(t, x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(t, x)u_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t, x)\theta_{x_i} + \\ + \alpha_0(t, x)u + \alpha_1(t, x)\theta + \gamma_1(t, x)|u_t|^{p-2}u_t = f_1(t, x), \tag{1}$$

$$A_2(u, \theta) \equiv \theta_t - \sum_{i,j=1}^{n} (c_{ij}\theta_{x_i})_{x_j} - \sum_{i=1}^{n} (c_i(t, x)u_t)_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} d_i(t, x)u_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} e_i(t, x)\theta_{x_i} + \\ + \beta_0(t, x)u + \beta_1(t, x)\theta + \gamma_2(t, x)|\theta|^{q-2}\theta = f_2(t, x), \tag{2}$$

з початковими умовами

$$u(0, x) = u_0(x), \quad u_t(0, x) = u_1(x), \quad \theta(0, x) = \theta_0(x) \quad \text{на} \quad \Omega. \tag{3}$$

Крім початкових умов (3), задамо для системи (1)-(2) крайові умови вигляду

$$u(t, x) = 0, \quad \theta(t, x) = 0 \quad \text{на} \quad S_T. \tag{4}$$

Для спрощення викладення припускатимемо, що $\Omega_R = \Omega \cap \mathcal{B}_R$ є областю для всіх $R > R_0 > 0$, регулярною в сенсі Кальдерона [7, с. 44], $\mathcal{B}_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$. Позначимо $Q_{\tau,R} = (0, \tau) \times \Omega_R,\ \tau \in (0, T];\ \Omega_{\tau,R} = Q_{T,R} \cap \{t = \tau\};\ S_{\tau,R} = (0, \tau) \times \partial\Omega_{\tau,R}$.

Введемо простори

$$L^r_{loc}(\overline{\Omega}) = \{v\ :\ v \in L^r(\Omega_R),\ \forall\, R > R_0\}, \quad r \in [1, +\infty],$$
$$H^1_{0,loc}(\overline{\Omega}) = \{v\ :\ v \in H^1(\Omega_R),\ u\big|_{\partial\Omega \cap \mathcal{B}_R} = 0\ \ \forall\, R \geqslant R_0\},$$
$$H^2_{loc}(\overline{\Omega}) = \{v\ :\ v \in H^2(\Omega_R),\ \ \forall\, R \geqslant R_0\}.$$

Припустимо, що для коефіцієнтів системи (1) - (2) виконуються такі умови:

(A): $a_{ij}, a_{ijt} \in L^\infty(Q_T),\ a_{ij}(t, x) = a_{ji}(t, x)$ майже всюди в Q_T, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$;

$$a_0|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t, x)\xi_i\xi_j \leqslant a^0|\xi|^2$$

майже для всіх $(t, x) \in Q_T$ і для всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$, a_0 і a^0 – додатні константи;

(C): $c_{ij}, c_{ijt} \in L^\infty(Q_T)$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$;

$$c_0|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}(t, x)\xi_i\xi_j \leqslant c^0|\xi|^2$$

майже для всіх $(t, x) \in Q_T$ і для всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$, c_0 і c^0 – додатні константи;

(D): $a_i,\ , a_{it},\ b_i,\ b_{it},\ c_i,\ c_{it},\ d_i,\ d_{it},\ e_i,\ e_{it} \in L^\infty(Q_T)$;

(E): $\alpha_0, \alpha_{0t}, \alpha_1, \beta_0, \beta_1 \in L^\infty(Q_T)$;

(G): $\gamma_1, \gamma_2 \in L^\infty(Q_T)$; $\gamma_1(t,x) \geqslant \tilde{\gamma}_1, \gamma_2(t,x) \geqslant \tilde{\gamma}_2$ майже всюди в Q_T, $\tilde{\gamma}_1$ і $\tilde{\gamma}_2$ – додатні константи; $p > 1$, $q > 1$, $\min\{p,q\} \leqslant 2$.

Нехай $\Phi \in C^1(\mathbb{R})$, $\Phi(\eta) = 1$ при $\eta \leqslant 0$, $\Phi(\eta) = 0$ при $\eta \geqslant 1$ і $0 \leqslant \Phi(\eta) \leqslant 1$ при $\eta \in \mathbb{R}$.

Приймемо

$$h_R(x) = \Phi\left(\frac{|x| - R}{\chi}\right), \quad \text{де} \quad \chi > 0,$$
$$\omega_R(x) = [h_R(x)]^\gamma, \quad \gamma > 2.$$

Тоді $\omega_R(x) = 1$ при $|x| \leqslant R$, $\omega_R(x) = 0$ при $|x| \geqslant R + \chi$, $0 \leqslant \omega_R(x) \leqslant 1$ при $x \in \mathbb{R}^n$,

$$|\omega_{R,x_i}(x)| \leqslant \gamma \frac{d}{\chi} [h_R(x)]^{\gamma-1}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad i = \{1, \ldots, n\}, \quad d = \mathrm{const} > 0.$$

Вважатимемо, що праві частини системи (1)-(2) і початкові функції в (3) задовольняють умову (**F**), якщо:

$f_j, f_{jt} \in L^2(0,T; L^2_{loc}(\overline{\Omega}))$ $j \in \{1,2\}$, $u_0 \in H^1_{0,loc}(\overline{\Omega}) \cap H^2_{loc}(\overline{\Omega})$,

$u_1 \in H^1_{0,loc}(\overline{\Omega}) \cap L^{2(p-1)}_{loc}(\overline{\Omega})$, $\theta_0 \in H^1_{0,loc}(\overline{\Omega}) \cap L^{2(q-1)}_{loc}(\overline{\Omega})$.

Для компактності записів введемо позначення $V_1 = L^2(0,T; H^1_{0,loc}(\overline{\Omega})) \cap C(0,T; L^2_{loc}(\overline{\Omega}))$, $V_2 = V_1 \cap L^p(0,T; L^p_{loc}(\overline{\Omega}))$, $V_3 = V_1 \cap L^q(0,T; L^q_{loc}(\overline{\Omega}))$.

Означення 1. *Пару функцій $\{u, \theta\}$, які задовольняють включення $u \in V_1$, $u_t \in V_2$, $\theta \in V_3$ називатимемо сильним узагальненим розв'язком задачі (1)-(4), якщо вона є границями у відповідних просторах послідовностей $\{u^k\}$, $\{\theta^k\}$ таких, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ функції $u^k \in V_1$, $u^k_t \in V_2$, $u^k_{tt} \in L^2(0,T; L^2_{loc}(\overline{\Omega}))$, $\theta^k \in V_3$, $\theta^k_t \in L^2(0,T; L^2_{loc}(\overline{\Omega}))$ і для довільного $k \in \mathbb{N}$ пара функцій $\{u^k, \theta^k\}$ задовольняє систему*

$$\int\limits_{\Omega_\tau} u^k_t v \, dx - \int\limits_{\Omega_0} u^k_1(x) v \, dx + \int\limits_{Q_\tau} \Big[-u^k_t v_t + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x) u^k_{x_i} v_{x_j} +$$
$$+ \sum_{i=1}^n a_i(t,x) u^k_{x_i} v + \sum_{i=1}^n b_i(t,x) \theta^k_{x_i} v + \alpha_0(t,x) u^k v + \alpha_1(t,x) \theta^k v +$$
$$+ \gamma_1(t,x) |u^k_t|^{p-2} u^k_t v \Big] \, dx \, dt = \int\limits_{Q_\tau} f^k_1(t,x) v \, dx \, dt, \tag{5}$$

$$\int\limits_{\Omega_\tau} \theta^k w \, dx - \int\limits_{\Omega_0} \theta^k_0(x) w \, dx + \int\limits_{Q_\tau} \Big[-\theta^k w_t + \sum_{i,j=1}^n c_{ij}(t,x) \theta^k_{x_i} w_{x_j} + \sum_{i=1}^n c_i(t,x) u^k_t w_{x_i} +$$
$$+ \sum_{i=1}^n d_i(t,x) u^k_{x_i} w + \sum_{i=1}^n e_i(t,x) \theta^k_{x_i} w + \beta_0(t,x) u^k w + \beta_1(t,x) \theta^k w +$$
$$+ \gamma_2(t,x) |\theta^k|^{q-2} \theta^k w \Big] \, dx \, dt = \int\limits_{Q_\tau} f^k_2(t,x) w \, dx \, dt, \tag{6}$$

для всіх $\tau \in (0,T]$ *і для довільних функцій* $v, w \in C^\infty(0,T;C_0^\infty(\Omega))$ *таких, що* $\operatorname{supp} v \in Q_{T,k}$ *і* $\operatorname{supp}\ w \in Q_{T,k}$, *де функції* f_j^k, u_0^k, u_1^k, θ_0^k *задовольняють умову* (**F**) *і*

$$\begin{aligned}
&f_j^k \to f_j \quad \text{в} \quad L^2(0,T;L^2_{loc}(\overline{\Omega})) \quad j \in \{1,2\},\\
&u_0^k \to u_0 \quad \text{в} \quad H^1_{0,loc}(\overline{\Omega}),\\
&u_1^k \to u_1 \quad \text{в} \quad L^2_{loc}(\overline{\Omega}),\\
&\theta_0^k \to \theta_0 \quad \text{в} \quad L^2_{loc}(\overline{\Omega}), \quad k \to \infty,
\end{aligned} \tag{7}$$

і початкову умову $u(0,x) = u_0(x)$.

2. Існування розв'язку. Доведемо теорему існування розв'язку для випадку $\max\{p,q\} \leqslant 2$.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* (**A**), (**C**), (**D**), (**E**), (**G**) *і, крім того,* $f_i \in L^2(0,T;L^2_{loc}(\overline{\Omega}))$, $i \in \{1,2\}$, $u_0 \in H^1_{0,loc}(\overline{\Omega})$, $u_1 \in L^2_{loc}(\overline{\Omega})$, $\theta_0 \in L^2_{loc}(\overline{\Omega})$,

$$\int\limits_{\Omega_R} \left[|u_0(x)|^2 + |\nabla u_0(x)|^2 + |u_1(x)|^2 + |\theta_0(x)|^2\right]\,dx +$$

$$+ \int\limits_{Q_{T,R}} \sum_{j=1}^{2} |f_j(t,x)|^2\,dx\,dt \leqslant 2a\exp\{bR^2\} \quad \forall\ R > R_0 + 1 > 0,$$

де a, b *– деякі додатні сталі. Тоді існує таке* $T_0 \leqslant T$, *що задача (1)-(4) має сильний узагальнений розв'язок задачі в області* Q_{T_0}.

Доведення. Нехай $\{f_i^k\}$, $i \in \{1,2\}$, u_0^k, u_1^k, θ_0^k такі послідовності функцій, що кожний член цих послідовностей задовольняє умову (**F**) і виконуються умови (7).

Нехай $R = R(k) = 2^k > R_0 + 1$. В області $Q_{T,R(k)}$ розглянемо систему рівнянь

$$A_1(u,\theta) = f_1^{k,R(k)}(t,x), \tag{8}$$

$$A_2(u,\theta) = f_2^{k,R(k)}(t,x), \quad (t,x) \in Q_{T,R(k)}, \tag{9}$$

з початковими умовами

$$u(0,x) = u_0^{k,R(k)}(x),\ u_t(0,x) = u_1^{k,R(k)}(x), \quad \theta(0,x) = \theta_0^{k,R(k)}(x), \quad x \in \Omega_{R(k)}, \tag{10}$$

і крайовими умовами

$$u\big|_{S_{T,R(k)}} = 0, \quad \theta\big|_{S_{T,R(k)}} = 0, \tag{11}$$

де

$$f_i^{k,R(k)}(t,x) = \begin{cases} f_i^k(t,x), & (t,x) \in Q_{T,R(k)};\\ 0, & (t,x) \in Q_T \setminus Q_{T,R(k)}, \end{cases} \qquad i = 1,2.$$

Тут $u_0^{k,R(k)}(x) = u_0^k(x)\xi_{R(k)}(x)$, $u_1^{k,R(k)}(x) = u_1^k(x)\xi_{R(k)}(x)$, $\theta_0^{k,R(k)}(x) = \theta_0^k(x)\xi_{R(k)}(x)$, де ξ^R – функція зрізки така, що $\xi^R \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $\xi_k^R(x) = 1$ при $|x| \leqslant R-1$, $\xi^R(x) = 0$ при $|x| \geqslant R$, і $0 \leqslant \xi^R(x) \leqslant 1$ при $x \in \mathbb{R}^n$.

У праці [8] доведено, що при виконанні умов (**A**), (**C**), (**D**), (**E**), (**G**) існує узагальнений розв'язок (u^R, θ^R) задачі (8)-(11) з такими властивостями:

$u^R \in L^\infty(0,T;H^1_{0,loc}(\Omega_R))$, $u_t^R \in L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega_R)) \cap L^p(0,T;L^p(\Omega_R))$,

$u^R_{tt} \in L^2(Q_{T,R})$, $\theta^R \in L^\infty(0,T; H^1_{0,loc}(\Omega_R)) \cap L^q(0,T; L^q(\Omega_R))$, $\theta^R_t \in L^2(Q_{T,R})$. Крім того, функції u^R, θ^R задовольняють систему рівностей

$$\int\limits_{\Omega_\tau} u^R_t v\,dx - \int\limits_{\Omega_0} u^R_1(x) v\,dx + \int\limits_{Q_\tau} \Big[-u^R_t v_t + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x) u^R_{x_i} v_{x_j} + \\ + \sum_{i=1}^n a_i(t,x) u^R_{x_i} v + \sum_{i=1}^n b_i(t,x)\theta^R_{x_i} v + \alpha_0(t,x) u^R v + \\ + \alpha_1(t,x)\theta^R v + \gamma_1(t,x)|u^R_t|^{p-2} u^R_t v \Big]\,dx\,dt = \int\limits_{Q_\tau} f^R_1(t,x) v\,dx\,dt, \tag{12}$$

$$\int\limits_{Q_\tau} \Big[\theta^R_t w + \sum_{i,j=1}^n c_{ij}(t,x)\theta^R_{x_i} w_{x_j} + \sum_{i=1}^n c_i(t,x) u^R_t w_{x_i} + \sum_{i=1}^n d_i(t,x) u^R_{x_i} w + \\ + \sum_{i=1}^n e_i(t,x)\theta^R_{x_i} w + \beta_0(t,x) u^R w + \beta_1(t,x)\theta^R w + \\ + \gamma_2(t,x)|\theta^R|^{q-2}\theta^R w \Big]\,dx\,dt = \int\limits_{Q_\tau} f^R_2(t,x) w\,dx\,dt \tag{13}$$

для довільних $\tau \in (0,T]$ і довільних функцій $v \in L^\infty(0,T; H^1_0(\Omega_R)) \cap L^p(0,T; L^p(\Omega_R))$, $w \in L^\infty(0,T; H^1_{0,loc}(\Omega_R)) \cap L^q(0,T; L^q(\Omega_R))$.

Продовжимо функції $u^{R(k)}$, $\theta^{R(k)}$ нулем на область $Q_T \setminus Q_{T,R(k)}$ і позначимо їх, відповідно, u^k, θ^k. Тоді для цих функцій будуть правильні рівності (5), (6), відповідно з вільними частинами $f^{k,R(k)}_i$, $i \in \{1,2\}$ і початковими умовами $u^{k,R(k)}_0$, $u^{k,R(k)}_1$, $\theta^{k,R(k)}_0$.

Нехай $R = R(l) = 2^l > R_0 + 1$. Підставимо (u^k, θ^k) і (u^l, θ^l) в інтегральну систему рівностей (5)-(6), віднімемо відповідні рівняння і за пробні функції візьмемо $v = u^{k,\,l}_t \omega_R e^{-\lambda t}$, $w = \theta^{k,\,l}\omega_R e^{-\lambda t}$, де $u^{k,\,l} = (u^k - u^l)$, $\theta^{k,\,l} = (\theta^k - \theta^l)$, $\lambda > 0$, а R деяке фіксоване число таке, що $R > R_0 + 1$ і $R < \min\{R(k), R(l)\}$. Тоді одержимо рівності

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} |u^{k,\,l}_t|^2 \omega_R e^{-\lambda t}\,dx + \int\limits_{Q_\tau} \Big[\frac{\lambda}{2}|u^{k,\,l}_t|^2\omega_R + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x) u^{k,\,l}_{x_i} u^{k,\,l}_{x_j t}\omega_R + \\ + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x) u^{k,\,l}_{x_i} u^{k,\,l}_t \omega_{R x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(t,x) u^{k,\,l}_{x_i} u^{k,\,l}_t \omega_R + \\ + \sum_{i=1}^n b_i(t,x)\theta^{k,\,l}_{x_i} u^{k,\,l}_t \omega_R + \alpha_0(t,x) u^{k,\,l} u^{k,\,l}_t \omega_R + \alpha_1(t,x)\theta^{k,\,l} u^{k,\,l}_t \omega_R + \\ + \gamma_1(t,x)\left[|u^k_t|^{p-2} u^k_t - |u^l_t|^{p-2} u^l_t \right] u^{k,\,l}_t \omega_R \Big] e^{-\lambda t}\,dx\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} |u_1^{k,R(k)} - u_1^{l,R(l)}|^2 \omega_R\, dx + \int\limits_{Q_\tau} (f_1^{k,R(k)} - f_1^{l,R(l)}) u_t^{k,\,l} \omega_R e^{-\lambda t}\, dx\, dt, \tag{14}$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} |\theta^{k,\,l}|^2 \omega_R e^{-\lambda t}\, dx + \int\limits_{Q_\tau} \Big[\frac{\lambda}{2}|\theta^{k,\,l}|^2\omega_R + \sum_{i,j=1}^n c_{ij}(t,x)\theta^{k,\,l}_{x_i}\theta^{k,\,l}_{x_j}\omega_R +$$
$$+ \sum_{i,j=1}^n c_{ij}(t,x)\theta^{k,\,l}_{x_i}\theta^{k,\,l}\omega_{Rx_j} + \sum_{i=1}^n c_i(t,x)u_t^{k,\,l}\theta^{k,\,l}_{x_i}\omega_R + \sum_{i=1}^n c_i(t,x)u_t^{k,\,l}\theta^{k,\,l}\omega_{Rx_i} +$$
$$+ \sum_{i=1}^n d_i(t,x)u^{k,\,l}_{x_i}\theta^{k,\,l}\omega_R + \sum_{i=1}^n e_i(t,x)\theta^{k,\,l}_{x_i}\theta^{k,\,l}\omega_R + \beta_0(t,x)u^{k,\,l}\theta^{k,\,l}\omega_R +$$
$$+ \beta_1(t,x)\theta^{k,\,l}\theta^{k,\,l}\omega_R + \gamma_2(t,x)\left[|\theta^k|^{q-2}\theta^k - |\theta^l|^{q-2}\theta^l\right]\theta^{k,\,l}\omega_R\Big] e^{-\lambda t}\, dx\, dt =$$
$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} |\theta_0^{k,R(k)} - \theta_0^{l,R(l)}|^2 \omega_R\, dx + \int\limits_{Q_\tau} (f_2^{k,R(k)} - f_2^{l,R(l)})\theta^{k,\,l}\omega_R e^{-\lambda t}\, dx\, dt, \tag{15}$$

для всіх $\tau \in (0,T]$.

Оцінимо кожний доданок системи (14) - (15). На підставі умови (**A**)

$$I_1^a = \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x)u^{k,\,l}_{x_i}u^{k,\,l}_{x_jt}\omega_R(x)e^{-\lambda t}\, dx\, dt \geqslant \frac{a_0}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} |\nabla u^{k,\,l}|^2\omega_R(x)e^{-\lambda t}\, dx -$$
$$- \frac{a_2}{2}\int\limits_{\Omega_0} |\nabla u_0^{k,R(k)} - \nabla u_0^{l,R(l)}|^2\omega_R(x)\, dx - \frac{a_1}{2}\int\limits_{Q_\tau} |\nabla u^{k,\,l}|^2\omega_R(x)e^{-\lambda t}\, dx\, dt +$$
$$+ \frac{\lambda a_0}{2}\int\limits_{Q_\tau} |\nabla u^{k,\,l}|^2\omega_R(x)e^{-\lambda t}\, dx\, dt,$$

де $a_1 = \operatorname{ess\,sup}\limits_{Q_T} \sum\limits_{i,j}^n |a_{ijt}(t,x)|^2$, $a_2 = \operatorname{ess\,sup}\limits_{Q_T} \sum\limits_{i,j}^n |a_{ij}(0,x)|^2$. Відповідно до умов (**A**), (**D**)

$$I_2^a = \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x)u^{k,\,l}_{x_i}u^{k,\,l}_t\omega_R(x)_{x_j}e^{-\lambda t}\, dx\, dt \leqslant \frac{\delta_0^a}{2}\int\limits_{Q_\tau} |\nabla u^{k,\,l}|^2\omega_R(x)e^{-\lambda t}\, dx\, dt +$$
$$+ \frac{a^0 n\gamma^2 d^2}{2\delta_0^a\chi^2}\int\limits_{Q_\tau} [h_R(x)]^{\gamma-2}\,|u_t^{k,\,l}|^2 e^{-\lambda t}\, dx\, dt, \quad \delta_0^a > 0.$$

Далі, для довільної константи $\delta_1^a > 0$

$$I_3^a = \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n a_i(t,x)u^{k,\,l}_{x_i}u^{k,\,l}_t\omega_R(x)e^{-\lambda t}\, dx\, dt \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau} \left[\nu_a\delta_1^a|\nabla u^{k,\,l}|^2 + \frac{1}{\delta_1^a}|u_t^{k,\,l}|^2\right]\omega_R(x)e^{-\lambda t}\, dx\, dt.$$

За умовою (**D**) і для довільної $\delta_2^a > 0$

$$I_4^a = \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)\theta_{x_i}^{k,\,l} u_t^{k,\,l} \omega_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau} \left[\nu_b \delta_2^a |\nabla \theta^{k,\,l}|^2 + \frac{1}{\delta_2^a} |u_t^{k,\,l}|^2 \right] \omega_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt.$$

Зважаючи на умови теореми

$$I_5^a = \int\limits_{Q_\tau} \alpha_0(t,x) u^{k,\,l} u_t^{k,\,l} \omega_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt \geqslant -\frac{1}{2}\delta^a \int\limits_{Q_\tau} |u_t^{k,\,l}|^2 \omega_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt -$$

$$- \frac{\nu_{\alpha_0}}{2} \int\limits_{\Omega_0} |u_0^{k,R(k)} - u_0^{l,R(l)}|^2 \omega_R(x)\, dx,\ \delta^a > 0,$$

оскільки правильна нерівність

$$\int\limits_{Q_\tau} |u^{k,\,l}|^2 \omega_R(x) e^{-\lambda \tau}\, dx\, dt \leqslant c_1 \int\limits_{\Omega_0} |u_0^{k,R(k)} - u_0^{l,R(l)}|^2 \omega_R(x)\, dx +$$

$$+ c_2 \int\limits_{Q_\tau} |u_t^{k,\,l}|^2 \omega_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt, \tag{16}$$

де c_1, c_2 константи, які залежать від T.

Легко отримати таку оцінку, враховуючи довільність $\delta_3^a > 0$

$$I_6^a = \int\limits_{Q_\tau} \alpha_1(t,x) \theta^{k,\,l} u_t^{k,\,l} \omega_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau} \left[\nu_{\alpha_1} \delta_3^a |\theta^{k,\,l}|^2 + \frac{1}{\delta_3^a} |u_t^{k,\,l}|^2 \right] \omega_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt.$$

Використовуючи відому нерівність, отримаємо

$$I_7^a = \int\limits_{Q_\tau} \gamma_1(t,x) \left[|u_t^k|^{p-2} u_t^k - |u_t^l|^{p-2} u_t^l \right] (u_t^k - u_t^l) \omega_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt \geqslant 0, \quad p \in (1,2].$$

Сталі $\nu_a = \max\limits_i \operatorname{ess\,sup}_{Q_T} |a_i(t,x)|^2$, $\nu_b = \max\limits_i \operatorname*{ess\,sup}\limits_{Q_T} |b_i(t,x)|^2$, $\nu_{\alpha_0} = \operatorname*{ess\,sup}\limits_{Q_T} |\alpha_0(t,x)|^2$, $\nu_{\alpha_1} = \operatorname*{ess\,sup}\limits_{Q_T} |\alpha_1(t,x)|^2$.

Зазначимо, що

$$I_8^a = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_0} |u_1^{k,R(k)} - u_1^{l,R(l)}|^2 \omega_R(x)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Omega_0} \left[|u_1^{k,R(k)} - u_1|^2 + |u_1 - u_1^{l,R(l)}|^2 \right] \omega_R(x)\, dx.$$

Далі

$$I_9^a = \int\limits_{Q_\tau} (f_1^{k,R(k)} - f_1^{l,R(l)}) u_t^{k,\,l} \omega_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau} \left[(f_1^{k,R(k)} - f_1)^2 + (f_1 - f_1^{l,R(l)})^2 \right] \omega_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt + \int\limits_{Q_\tau} |u_t^{k,\,l}|^2 \omega_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt.$$

Перетворимо кожний доданок рівності (15), використавши умови теореми. Згідно з умовою (**C**)

$$I_1^c = \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j}^{n} c_{ij}(t,x) \theta_{x_i}^{k,\,l} \theta_{x_j}^{k,\,l} \omega_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt \geqslant c_0 \int\limits_{Q_\tau} |\nabla \theta^{k,\,l}|^2 \omega_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt.$$

Використаємо умову (**D**) для оцінки таких доданків:

$$I_2^c = \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}(t,x) \theta_{x_i}^{k,\,l} \theta^{k,\,l} \omega_R(x)_{x_j} e^{-\lambda t}\, dx\, dt \leqslant \frac{\delta_0^c}{2} \int\limits_{Q_\tau} |\nabla \theta^{k,\,l}|^2 \omega_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt +$$
$$+ \frac{c^0 n \gamma^2 d^2}{2\delta_0^c \chi^2} \int\limits_{Q_\tau} [h_R(x)]^{\gamma-2} |\theta^{k,\,l}|^2 e^{-\lambda t}\, dx\, dt, \quad \delta_0^c > 0,$$

$$I_3^c = \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} c_i(t,x) u_t^{k,\,l} \theta^{k,\,l} \omega_R(x)_{x_i} e^{-\lambda t}\, dx\, dt \leqslant \frac{\nu_c \delta_1^c}{2} \int\limits_{Q_\tau} |u^{k,\,l}|^2 \omega_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt +$$
$$+ \frac{\nu_c n \gamma^2 d^2}{2\delta_1^c \chi^2} \int\limits_{Q_\tau} [h_R(x)]^{\gamma-2} |\theta^{k,\,l}|^2 e^{-\lambda t}\, dx\, dt, \quad \delta_1^c > 0.$$

Далі, зважаючи на (**E**), одержимо нерівності

$$I_4^c = \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} c_i(t,x) u_t^{k,\,l} \theta_{x_i}^{k,\,l} \omega_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau} \left[\nu_c \delta_2^c |\nabla \theta^{k,\,l}|^2 + \frac{1}{\delta_2^c} |u_t^{k,\,l}|^2 \right] \omega_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt,$$

$$I_5^c = \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} d_i(t,x) u_{x_i}^{k,\,l} \theta^{k,\,l} \omega_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau} \left[\nu_d \delta_3^c |\nabla u^{k,\,l}|^2 + \frac{1}{\delta_3^c} |\theta^{k,\,l}|^2 \right] \omega_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt,$$

$$I_6^c = \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} e_i(t,x) \theta_{x_i}^{k,\,l} \theta^{k,\,l} \omega_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\left[\nu_e\delta_4^c|\nabla\theta^{k,\,l}|^2+\frac{1}{\delta_4^c}|\theta^{k,\,l}|^2\right]\omega_R(x)e^{-\lambda t}\,dx\,dt,$$

$$I_7^c=\int\limits_{Q_\tau}\beta_0(t,x)u^{k,\,l}\theta^{k,\,l}\omega_R(x)e^{-\lambda t}\,dx\,dt\leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\left[\nu_{\beta_0}\delta_5^c|u^{k,\,l}|^2+\frac{1}{\delta_5^c}|\theta^{k,\,l}|^2\right]\omega_R(x)e^{-\lambda t}\,dx\,dt,$$

$$I_8^c=\int\limits_{Q_\tau}\beta_1(t,x)|\theta^{k,\,l}|^2\omega_R(x)e^{-\lambda t}\,dx\,dt\leqslant\int\limits_{Q_\tau}\nu_{\beta_1}|\theta^{k,\,l}|^2\omega_R(x)e^{-\lambda t}\,dx\,dt,$$

$$I_9^c=\int\limits_{Q_\tau}\gamma_2(t,x)\left[|\theta^k|^{q-2}\theta^k-|\theta^l|^{q-2}\theta^l\right](\theta^k-\theta^l)\omega_R(x)e^{-\lambda t}\,dx\,dt\geqslant 0,\quad q\in(1,2]$$

Сталі $\delta_l^c>0$, $l\in\{2,\dots,5\}$, а $\nu_c,\nu_d,\nu_e,\nu_{\beta_0},\nu_{\beta_1}$ залежать від функцій $c_i,d_i,e_i,\beta_0,\beta_1$ і визначені так:

$$\nu_c=\max_i\operatorname*{ess\,sup}_{Q_T}|c_i(t,x)|^2,\quad \nu_d=\max_i\operatorname*{ess\,sup}_{Q_T}|d_i(t,x)|^2,\quad \nu_e=\max_i\operatorname*{ess\,sup}_{Q_T}|e_i(t,x)|^2,$$
$$\nu_{\beta_0}=\operatorname*{ess\,sup}_{Q_T}|\beta_0(t,x)|^2,\quad \nu_{\beta_0}=\operatorname*{ess\,sup}_{Q_T}|\beta_0(t,x)|^2.$$

Враховуючи попередні оцінки, одержуємо

$$I_{10}^c=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}|\theta_0^{k,R(k)}-\theta_0^{l,R(l)}|^2\omega_R(x)\,dx\leqslant\int\limits_{\Omega_0}\left[|\theta_0^{k,R(k)}-\theta_0|^2+|\theta_0-\theta_0^{l,R(l)}|^2\right]\omega_R(x)\,dx.$$

Далі

$$I_{11}^c=\int\limits_{Q_\tau}(f_2^{k,R(k)}-f_2^{l,R(l)})\theta^{k,\,l}\omega_R(x)e^{-\lambda t}\,dx\,dt\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\left[(f_2^{k,R(k)}-f_2)^2+(f_2-f_2^{l,R(l)})^2\right]\omega_R(x)e^{-\lambda t}\,dx\,dt+\int\limits_{Q_\tau}|\theta^{k,\,l}|^2\omega_R(x)e^{-\lambda t}\,dx\,dt.$$

Враховуючи оцінки інтегралів $I_1^a-I_9^a$ та $I_1^c-I_{11}^c$, з системи (14)-(15) отримаємо нерівність

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\left[|u^{k,\,l}|^2+|u_t^{k,\,l}|^2+a_0|\nabla u^{k,\,l}|^2+|\theta^{k,\,l}|^2\right]\omega_R(x)e^{-\lambda t}\,dx+$$
$$+\int\limits_{Q_\tau}\left[\left(\lambda-\delta^a-\frac{1}{\delta_1^a}-\frac{1}{\delta_2^a}-\frac{1}{\delta_3^a}-\nu_c\delta_1^c-\frac{1}{\delta_2^c}-\nu_{\beta_0}\delta_5^c-2\right)|u_t^{k,\,l}|^2+\right.$$
$$+\left(\lambda a_0-a_1-\delta_0^a-\nu_a\delta_1^a-\nu_d\delta_3^c\right)|\nabla u^{k,\,l}|^2+$$

$$+\left(\lambda-\nu_{\alpha_1}\delta_3^a-\nu_{\beta_1}-\frac{1}{\delta_3^c}-\frac{1}{\delta_4^c}-\frac{1}{\delta_5^c}-2\right)|\theta^{k,\,l}|^2\Bigg]\omega_R(x)e^{-\lambda t}\,dx\,dt+$$

$$+\left(2c_0-\nu_b\delta_2^a-\delta_0^c-\nu_c\delta_2^c-\nu_e\delta_4^c\right)\int\limits_{Q_\tau}|\nabla\theta^{k,\,l}|^2\omega_R(x)e^{-\lambda t}\,dx\,dt\leqslant F(\tau), \tag{17}$$

де

$$F(\tau)=\frac{\tilde{a}^0n\gamma^2d^2}{\delta_0^a\chi^2}\int\limits_{Q_\tau}[h_R(x)]^{\gamma-2}\,|u_t^{k,\,l}|^2e^{-\lambda t}\,dx\,dt+$$

$$+\left(\frac{\tilde{c}^0}{\delta_0^c}+\frac{\nu_c}{\delta_1^c}\right)\frac{n\gamma^2d^2}{\chi^2}\int\limits_{Q_\tau}[h_R(x)]^{\gamma-2}\,|\theta^{k,\,l}|^2e^{-\lambda t}\,dx\,dt+$$

$$+\nu_{\alpha_0}\int\limits_{\Omega_0}\left[|u_0^{k,R(k)}-u_0|^2+|u_0-u_0^{l,R(l)}|^2\right]\omega_R(x)e^{-\lambda t}\,dx+$$

$$+a_2\int\limits_{\Omega_0}\left[|\nabla u_0^{k,R(k)}-\nabla u_0|^2+|\nabla u_0-\nabla u_0^{l,R(l)}|^2\right]\omega_R(x)e^{-\lambda t}\,dx+$$

$$+2\int\limits_{\Omega_0}\left[|u_1^{k,R(k)}-u_1|^2+|u_1-u_1^{l,R(l)}|^2\right]\omega_R(x)e^{-\lambda t}\,dx+$$

$$+2\int\limits_{\Omega_0}\left[|\theta_0^{k,R(k)}-\theta_0|^2+|\theta_0-\theta_0^{l,R(l)}|^2\right]\omega_R(x)e^{-\lambda t}\,dx+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{2}\left[(f_i^{k,R(k)}-f_i)^2+(f_i-f_i^{l,R(l)})^2\right]\omega_R(x)e^{-\lambda t}\,dx\,dt+$$

для $\tau\in(0,T)$.

Виберемо додатні числа λ_0, δ^a, δ_k^a, $k\in\{0,\dots,3;\ \delta_l^c\}$, $l\in\{0,\dots,5\}$ так, щоб виконувалися нерівності

$$\lambda_0-\delta^a-\frac{1}{\delta_1^a}-\frac{1}{\delta_2^a}-\frac{1}{\delta_3^a}-\nu_c\delta_1^c-\frac{1}{\delta_2^c}-\nu_{\beta_0}\delta_5^c>2$$

$$\lambda_0a_0-a_1-\delta_0^a-\nu_a\delta_1^a-\nu_d\delta_3^c>0,$$

$$\lambda_0-\nu_{\alpha_1}\delta_3^a-\nu_{\beta_1}-\frac{1}{\delta_3^c}-\frac{1}{\delta_4^c}-\frac{1}{\delta_5^c}>2,$$

$$2c_0-\nu_b\delta_2^a-\delta_0^c-\nu_c\delta_2^c-\nu_e\delta_4^c>0,$$

де $\lambda+\lambda_0+\lambda_1$, $\lambda_1>0$.

Тоді одержимо

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\left[|u^{k,\,l}|^2+|u_t^{k,\,l}|^2+|\nabla u^{k,\,l}|^2+|\theta^{k,\,l}|^2\right]\omega_R(x)e^{-\lambda_1 t}\,dx+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\left[|u^{k,\,l}|^2+\lambda_1\left(|u_t^{k,\,l}|^2+|\nabla u^{k,\,l}|^2+|\theta^{k,\,l}|^2\right)\right]\omega_R(x)e^{-\lambda_1 t}\,dx\,dt+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau} |\nabla\theta^{k,\,l}|^2 \omega_R(x) e^{-\lambda_1 t}\, dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \left[\int\limits_{Q_\tau} \frac{1}{\chi^2} \left[|u_t^{k,\,l}|^2 + |\theta^{k,\,l}|^2 \right] [h_R(x)]^{\gamma-2} e^{-\lambda_1 t}\, dx\, dt + F_R(\tau) \right], \tag{18}$$

де стала C_1 визначається коефіцієнтами системи (1) - (2) і числом T, а

$$F_R(\tau) = \nu_{\alpha_0} \int\limits_{\Omega_0} \left[|u_0^{k,R(k)} - u_0|^2 + |u_0^{l,R(l)} - u_0|^2 \right] \omega_R(x) e^{-\lambda t}\, dx +$$

$$+ a_2 \int\limits_{\Omega_0} \left[|\nabla u_0^{k,R(k)} - \nabla u_0|^2 + |\nabla u_0^{l,R(l)} - \nabla u_0|^2 \right] \omega_R(x) e^{-\lambda t}\, dx +$$

$$+ 2 \int\limits_{\Omega_0} \left[|u_1^{k,R(k)} - u_1|^2 + |u_1^{l,R(l)} - u_1|^2 \right] \omega_R(x) e^{-\lambda t}\, dx +$$

$$+ 2 \int\limits_{\Omega_0} \left[|\theta_0^{k,R(k)} - \theta_0|^2 + |\theta_0^{l,R(l)} - \theta_0|^2 \right] \omega_R(x) e^{-\lambda t}\, dx +$$

$$+ \int\limits_{Q_\tau} \left[(f_1^{k,R(k)} - f_1)^2 + (f_1^{l,R(l)} - f_1)^2 \right] \omega_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt +$$

$$+ \int\limits_{Q_\tau} \left[(f_2^{k,R(k)} - f_2)^2 + (f_2^{l,R(l)} - f_2)^2 \right] \omega_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt,$$

для $\tau \in (0, T)$.

На підставі умов теореми існує таке $s_0 \in \mathbb{N}$, що для всіх $s > s_0$ правильні нерівності

$$\int\limits_{\Omega_R} \left[|u_0^s(x)|^2 + |\nabla u_0^s(x)|^2 + |u_1^s(x)|^2 + |\theta_0^s(x)|^2 \right] dx + \int\limits_{Q_{T,R}} \sum_{j=1}^{2} |f_j^s(t,x)|^2\, dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant 2a \exp\{bR^2\}, \tag{19}$$

$$\int\limits_{\Omega_R} \left[|u_0^s(x) - u_0(x)|^2 + |\nabla u_0^s(x) - \nabla u_0(x)|^2 + |u_1^s(x) - u_1(x)|^2 + \right.$$

$$\left. + |\theta_0^s(x) - \theta_0(x)|^2 \right] dx + \int\limits_{Q_{T,R}} \sum_{j=1}^{2} |f_j^s(t,x) - f_j(t,x)|^2\, dx\, dt \leqslant \exp\{-m + bR^2\}, \tag{20}$$

де m – натуральне число, $a, b = \text{const} > 0$.

З (18), зокрема, одержимо, що

$$\int\limits_{Q_{\tau,R(k)}} \left[|u_t^{k+3,k+2}|^2 + |\theta^{k+3,k+2}|^2 \right] \omega_R(x) e^{-\lambda_1 t}\, dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_1}{\lambda_1\chi^2}\int\limits_{Q_{\tau,R(k+1)}}\left[|u_t^{k+3,k+2}|^2+|\theta^{k+3,k+2}|^2\right]\omega_R(x)e^{-\lambda t}\,dx\,dt+\frac{C_1}{\lambda_1}F_{R(k+1)}(\tau), \tag{21}$$

при $\chi^2=2^k$.

Поділимо відрізок $[R(k),R(k)+\chi]$ на m частин. Виберемо $m=\sigma 2^{2k}$, $\lambda_1=\chi_0 2^{2k}C_1$, де σ натуральне число, що $\sigma^2\leqslant\chi_0 e^{-1}$.

Тоді аналогічно як в [14] з (21) одержуємо оцінку

$$\int\limits_{Q_{\tau,R(k)}}\left[|u_t^{k+3,k+2}|^2+|\theta^{k+3,k+2}|^2\right]\omega_R(x)e^{-\lambda_1 t}\,dx\,dt\leqslant$$

$$\leqslant e^{-m}\int\limits_{Q_{\tau,R(k+1)}}\left[|u_t^{k+3,k+2}|^2+|\theta^{k+3,k+2}|^2\right]\omega_R(x)e^{-\lambda_1 t}\,dx\,dt+\frac{C_1e}{e-1}F_{R(k+1)}(\tau). \tag{22}$$

Оскільки

$$|f_i^{k+3,R(k+3)}-f_i^{k+2,R(k+2)}|^2\leqslant 2\left(|f_i^{k+3,R(k+3)}-f_i|^2+|f_i^{k+2,R(k+2)}-f_i|^2\right),$$

$$|u_0^{k+3,R(k+3)}-u_0^{k+2,R(k+2)}|^2\leqslant 2\left(|u_0^{k+3,R(k+3)}-u_0|^2+|u_0^{k+2,R(k+2)}-u_0|^2\right),$$

$$|\nabla u_0^{k+3,R(k+3)}-\nabla u_0^{k+2,R(k+2)}|^2\leqslant$$

$$\leqslant 2\left(|\nabla u_0^{k+3,R(k+3)}-\nabla u_0|^2+|\nabla u_0^{k+2,R(k+2)}-\nabla u_0|^2\right),$$

$$|u_1^{k+3,R(k+3)}-u_1^{k+2,R(k+2)}|^2\leqslant 2\left(|u_1^{k+3,R(k+3)}-u_1|^2+|u_1^{k+2,R(k+2)}-u_1|^2\right),$$

$$|\theta_0^{k+3,R(k+3)}-\theta_0^{k+2,R(k+2)}|^2\leqslant 2\left(|\theta_0^{k+3,R(k+3)}-\theta_0|^2+|\theta_0^{k+2,R(k+2)}-\theta_0|^2\right),$$

для $i\in\{1,2\}$, то на підставі (19)

$$F_{R(k+1)}(\tau)\leqslant 2C_2\exp\{-m+b(R(k+1))^2\},\quad C_2=\max\{a_0,\nu_{\alpha_0}\}+2. \tag{23}$$

Отже, з (22) випливає нерівність

$$\int\limits_{Q_{\tau,R(k)}}\left[|u_t^{k+3,k+2}|^2+|\theta^{k+3,k+2}|^2\right]\omega_R(x)e^{-\lambda_1 t}\,dx\,dt\leqslant$$

$$\leqslant e^{-m}\int\limits_{Q_{\tau,R(k+1)}}\left[|u_t^{k+3,k+2}|^2+|\theta^{k+3,k+2}|^2\right]\omega_R(x)e^{-\lambda_1 t}\,dx\,dt+$$

$$+C_3\exp\{-m+b(R(k+1))^2\}. \tag{24}$$

Використовуючи систему (12)-(13) при $v=u_t^k\omega_R e^{-\lambda t}$, $w=\theta^k\omega_R e^{-\lambda t}$, $\lambda>0$, отримаємо систему рівностей

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{\tau,R(k)}}|u_t^k|^2\omega_R e^{-\lambda t}\,dx+\int\limits_{Q_{\tau,R(k)}}\left[\frac{\lambda}{2}|u_t^k|^2\omega_R+\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x)u_{x_i}^k u_{x_jt}^k\omega_R+\right.$$

$$+\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x)u_{x_i}^k u_t^k\omega_{Rx_j}+\sum_{i=1}^n a_i(t,x)u_{x_i}^k u_t^k\omega_R+\sum_{i=1}^n b_i(t,x)\theta_{x_i}^k u_t^k\omega_R+$$

$$+\alpha_0(t,x)u^k u_t^k\omega_R + \alpha_1(t,x)\theta^k u_t^k\omega_R + \gamma_1(t,x)|u_t^k|^p\omega_R\Big]e^{-\lambda t}\,dx\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{0,R(k)}} |u_1^{k,R(k)}|^2\omega_R\,dx + \int\limits_{Q_{\tau,R(k)}} f_1^{k,R(k)}u_t^k\omega_R e^{-\lambda t}\,dx\,dt, \qquad (25)$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{\tau,R(k)}} |\theta^k|^2\omega_R e^{-\lambda t}\,dx + \int\limits_{Q_{\tau,R(k)}} \Big[\frac{\lambda}{2}|\theta^k|^2\omega_R + \sum_{i,j=1}^n c_{ij}(t,x)\theta^k_{x_i}\theta^k_{x_j}\omega_R +$$

$$+\sum_{i,j=1}^n c_{ij}(t,x)\theta^k_{x_i}\theta^k\omega_{Rx_j} + \sum_{i=1}^n c_i(t,x)u_t^k\theta^k_{x_i}\omega_R + \sum_{i=1}^n c_i(t,x)u_t^k\theta^k\omega_{Rx_i} +$$

$$+\sum_{i=1}^n d_i(t,x)u^k_{x_i}\theta^k\omega_R + \sum_{i=1}^n e_i(t,x)\theta^k_{x_i}\theta^k\omega_R + \beta_0(t,x)u^k\theta^k\omega_R +$$

$$+\beta_1(t,x)\theta^k\theta^k\omega_R + \gamma_2(t,x)|\theta^k|^q\omega_R\Big]e^{-\lambda t}\,dx\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{0,R(k)}} |\theta_0^{k,R(k)}|^2\omega_R\,dx + \int\limits_{Q_{\tau,R(k)}} f_2^{k,R(k)}\theta^k\omega_R e^{-\lambda t}\,dx\,dt, \qquad (26)$$

для всіх $\tau \in (0,T]$.

На підставі умов (**A**)-(**G**) та леми Гронуолла-Белмана з (25)-(26) легко одержати оцінку

$$\int\limits_{\Omega_{\tau,R(k)}} \left[|u^k|^2 + |u_t^k|^2 + |\nabla u^k|^2 + |\theta^k|^2\right]\,dx +$$

$$+\int\limits_{Q_{\tau,R(k)}} \Big[|u^k|^2 + |u_t^k|^2 + |\nabla u^k|^2 + |\theta^k|^2\Big]\,dx\,dt + \int\limits_{Q_{\tau,R(k)}} |\nabla\theta^k|^2\,dx\,dt +$$

$$+\int\limits_{Q_{\tau,R(k)}} \left[|u_t^k|^p + |\theta^k|^q\right]\,dx\,dt \leqslant C_4\Bigg[\int\limits_{Q_{\tau,R(k)}} \Big[|f_1^{k,R(k)}|^2 + |f_2^{k,R(k)}|^2\Big]\,dx\,dt +$$

$$+\int\limits_{\Omega_{0,R(k)}} \Big[|u_0^{k,R(k)}|^2 + |u_1^{k,R(k)}|^2 + |\nabla u_0^{k,R(k)}|^2 + |\theta_0^{k,R(k)}|^2\Big]\,dx\Bigg]. \qquad (27)$$

Враховуючи (19), з (24) отримаємо, що

$$\int\limits_{Q_{\tau,R(k)}} |u_t^k|^2\,dx\,dt \leqslant 2C_4 a\exp\{b\,R^2\}, \qquad \int\limits_{Q_{\tau,R(k)}} |\theta^k|^2\,dx\,dt \leqslant 2C_4 a\exp\{b\,R^2\}. \qquad (28)$$

Оскільки

$$|u_t^{k+3,k+2}|^2 \leqslant 2(|u_t^{k+3}|^2 + |u_t^{k+2}|^2),\ |\theta^{k+3},\theta^{k+2}|^2 \leqslant 2(|\theta^{k+3}|^2 + |\theta^{k+2}|^2),$$

то з (22), (28) випливає оцінка

$$\int\limits_{Q_{\tau,R(k+1)}} \Big[|u_t^{k+3,k+2}|^2 + |\theta^{k+3,k+2}|^2\Big]\, dx\, dt \leqslant 4aC_4 \exp\{-m + b(R(k+4))^2 + \lambda_1\tau\} +$$
$$+ C_3 \exp\{-m + b(R(k+2))^2\} \leqslant C_5 \exp\{-m + b(R(k+4))^2 + \lambda_1\tau\}. \qquad (29)$$

Тому існує таке $T_0 \leqslant T$, що для всіх $\tau \in (0, T_0]$ число σ можна вибрати так, щоб $\sigma > 2^8 b + \chi_0 C_1 T_0$. Тоді праву частину (29) можна оцінити так:

$$\exp\{-m + b(R(k+4))^2 + \lambda_1\tau\} \leqslant \exp\{-[2^{2k}\sigma_0]\},$$

де $\sigma_0 = \sigma - 2^8 b - \chi_0 C_1 T_0$.

Нехай $\tilde{R} > R_0 + 1$ – довільне фіксоване число, $R(k) > \tilde{R}$.

З (29) випливають оцінки

$$\|u_t^{k+3,k+2}\|_{C(0,T_0;L^2(\Omega^{\tilde{R}}))} + \|u_t^{k+3,k+2}\|_{L^2(0,T_0;H_0^1(\Omega^{\tilde{R}}))} \leqslant C_6 \exp\{-[2^{2k}\sigma_0]\},$$
$$\|\theta^{k+3,k+2}\|_{C(0,T_0;L^2(\Omega^{\tilde{R}}))} + \|\theta^{k+3,k+2}\|_{L^2(0,T_0;H_0^1(\Omega^{\tilde{R}}))} \leqslant C_7 \exp\{-[2^{2k}\sigma_0]\}.$$

Тоді

$$\|u_t^{k+l+2} - u_t^{k+2}\|_{C(0,T_0;L^2(\Omega^{\tilde{R}}))} + \|u_t^{k+l+2} - u_t^{k+2}\|_{L^2(0,T_0;H_0^1(\Omega^{\tilde{R}}))} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=0}^{l-1} \{\|u_t^{k+i+3} - u_t^{k+i+2}\|_{C(0,T_0;L^2(\Omega^{\tilde{R}}))} + \|u_t^{k+i+2} - u_t^{k+i+2}\|_{L^2(0,T_0;H_0^1(\Omega^{\tilde{R}}))}\} \leqslant$$
$$\leqslant C_6 \sum_{i=0}^{l-1} \exp\{-\sigma_0 2^{2(k+i)+1}\} \leqslant C_8 \exp\{-\sigma_0 2^{2(k-1)}\}, \qquad (30)$$

аналогічно

$$\|\theta^{k+l+2} - \theta^{k+2}\|_{C(0,T_0;L^2(\Omega^{\tilde{R}}))} + \|\theta^{k+l+2} - \theta^{k+2}\|_{L^2(0,T_0;H_0^1(\Omega^{\tilde{R}}))} \leqslant$$
$$\leqslant C_9 \exp\{-\sigma_0 2^{2(k-1)}\}, \qquad (31)$$

де сталі C_8, C_9 не залежать від k, l.

Враховуючи (18), (30) та (31), легко показати, що пара послідовностей $\{u_t^k, \theta^k\}$ фундаментальна в просторі

$$\Big[C(0,T_0;L^2(\Omega^{\tilde{R}})) \cap L^2(0,T_0;H_0^1(\Omega^{\tilde{R}})) \cap L^p(0,T_0;L^p(\Omega_{\tilde{R}}))\Big] \times$$
$$\times \Big[C(0,T_0;L^2(\Omega^{\tilde{R}})) \cap L^2(0,T_0;H_0^1(\Omega^{\tilde{R}})) \cap L^q(0,T_0;L^q(\Omega_{\tilde{R}}))\Big].$$

На підставі довільності $\tilde{R}$ одержуємо, що $u^k \to u$ у просторі $L^2(0,T_0;H^1_{0,loc}(\overline{\Omega}))\cap$ $\cap C(0,T_0;L^2_{loc}(\overline{\Omega}))$ та $\theta^k \to \theta$ у просторі $L^2(0,T_0;H^1_{0,loc}(\overline{\Omega})) \cap C(0,T_0;L^2_{loc}(\overline{\Omega}))\cap$ $\cap L^q(0,T_0;L^q_{loc}(\overline{\Omega}))$, тобто пара функцій $\{u,\theta\}$ – сильний узагальнений розв'язок задачі (1)-(4).

Оскільки, $u^k \to u$ в $C(0,T;H^1_{0,loc}(\overline{\Omega})) \cap L^2_{loc}(\overline{\Omega}))$, $\theta^k \to \theta$ в $C(0,T;L^2_{loc}(\overline{\Omega}))$. Тоді $u^k(0) \to u(0)$, $u_t^k \to u_t(0)$, $\theta^k(0) \to \theta(0)$ in $L^2_{loc}(\overline{\Omega})$, відповідно, $u(0) = u_0$, $u_t(0) = u_1$, $\theta(0) = \theta_0$. Теорему доведено. $\square$

3. Умови єдиності розв'язку.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* $(\mathbf{A}), (\mathbf{C})-(\mathbf{G})$. *Тоді задача (1)-(4) не може мати більше одного сильного узагальненого розв'язку в класі функцій таких, що*

$$\int\limits_{Q_{T,R}} \left(|u_t|^2 + \theta|^2\right)\, dx\, dt \leqslant a \exp\{bR^2\} \quad \forall\, R > R_0 + 1, \tag{32}$$

де a, b *– додатні сталі.*

Доведення. Нехай існують два розв'язки (u^1, θ^1), (u^2, θ^2) задачі (1)-(4). Задамо довільне фіксоване число $\tilde{R} > R_0 + 1$ і як завгодно мале число $\varepsilon > 0$. Нехай $R(l) = 2^l > \tilde{R}$, $l \in \mathbb{N}$.

Згідно з означенням сильного узагальненого розв'язку існують пари послідовностей $\{u^{i,k}\}, \{\theta^{i,k}\}$ таких, що $u^k \to u$ у просторі V_1 та $\theta^k \to \theta$ у просторі V_3; причому пара $\{u^{i,k}\}, \{\theta^{i,k}\}$ задовольняє систему (5) - (6) з правими частинами $\{f_j^{i,k}\}$, $j \in \{1, 2\}$ і початковими функціями $\{u_0^{i,k}\}$, $\{u_1^{i,k}\}$, $\{\theta_0^{i,k}\}$, де $\{f_j^{i,k}\}$, $j \in \{1, 2\}$ задовольняють умову $(\mathbf{F})$, $f_j^{i,k} \to f_j$, $j \in \{1, 2\}$ у просторі $L^2(0, T; L^2_{loc}(\overline{\Omega}))$, $u_0^{i,k} \to u_0$ у просторі $H^1_{0,loc}(\overline{\Omega})$, $u_1^k \to u_1$ та $\theta_0^k \to \theta_0$ відповідно у просторі $L^2_{loc}(\overline{\Omega})$ при $k \to \infty$, $i = 1, 2$.

Аналогічно як (18) одержимо нерівність

$$\int\limits_{Q_\tau} \left[|u_t^{2,k} - u_t^{1,k}|^2 + |\theta^{2,k} - \theta^{1,k}|^2\right] \omega_R(x) e^{-\lambda_1 t}\, dx\, dt \leqslant$$
$$\leqslant \frac{C_2}{\lambda_1 \chi^2} \int\limits_{Q_\tau} \left[|u_t^{2,k} - u_t^{1,k}|^2 + |\theta^{2,k} - \theta^{1,k}|^2\right] [h_R(x)]^{\gamma - 2} e^{-\lambda_1 t}\, dx\, dt + \frac{C_2}{\lambda_1} F(R, \tau), \tag{33}$$

де функція ω_R і стала C_2 визначені при доведенні існування розв'язку, $R = R(l)$, $\lambda_1 > 0$, а

$$F(R, \tau) = \frac{\nu_{\alpha_0}}{2} \int\limits_{\Omega_0} |u_0^{2,k} - u_0^{1,k}|^2 \omega_R(x) e^{-\lambda t}\, dx + \frac{a_0}{2} \int\limits_{\Omega_0} |\nabla u_0^{2,k} - \nabla u_0^{1,k}|^2 \omega_R(x) e^{-\lambda t}\, dx +$$
$$+ 2 \int\limits_{\Omega_0} |u_1^{1,k} - u_1^{2,k}|^2 \omega_R(x) e^{-\lambda t}\, dx + 2 \int\limits_{\Omega_0} |\theta_0^{1,k} - \theta_0^{2,k}|^2 \omega_R(x) e^{-\lambda t}\, dx +$$
$$+ \int\limits_{Q_\tau} |f_1^{1,k} - f_1^{2,k}|^2 \omega_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt + \int\limits_{Q_\tau} |f_2^{1,k} - f_2^{2,k}|^2 \omega_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt.$$

Виберемо $m = \sigma[2^{2l}]$, $\lambda_1 = \chi_0 2^{2l} C_2$ Для $\chi = 2^l$, де σ таке натуральне число, що $\sigma^2 \leqslant \chi_0 e^{-1}$.

Оскільки

$$F(R,\tau) \leqslant \nu_{\alpha_0} \int\limits_{\Omega_{0,R(l+1)}} \left[|u_0^{k,R(k)} - u_0|^2 + |u_0^{l,R(l)} - u_0|^2\right] \omega_R(x) e^{-\lambda t}\, dx +$$
$$+ a_2 \int\limits_{\Omega_{0,R(l+1)}} \left[|\nabla u_0^{k,R(k)} - \nabla u_0|^2 + |\nabla u_0^{l,R(l)} - \nabla u_0|^2\right] \omega_R(x) e^{-\lambda t}\, dx +$$
$$+ 2 \int\limits_{\Omega_{0,R(l+1)}} \left[|u_1^{k,R(k)} - u_1|^2 + |u_1^{l,R(l)} - u_1|^2\right] \omega_R(x) e^{-\lambda t}\, dx +$$
$$+ 2 \int\limits_{\Omega_{0,R(l+1)}} \left[|\theta_0^{k,R(k)} - \theta_0|^2 + |\theta_0^{l,R(l)} - \theta_0|^2\right] \omega_R(x) e^{-\lambda t}\, dx +$$
$$+ \int\limits_{Q_{\tau,R(l+1)}} \left[(f_1^{k,R(k)} - f_1)^2 + (f_1^{l,R(l)} - f_1)^2\right] \omega_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt +$$
$$+ \int\limits_{Q_{\tau,R(l+1)}} \left[(f_2^{k,R(k)} - f_2)^2 + (f_2^{l,R(l)} - f_2)^2\right] \omega_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt,$$

для $\tau \in (0,T)$. Тоді, враховуючи збіжності послідовностей $\{f_j^{i,k}\}$, $\{u_0^{i,k}\}$, $\{u_1^{i,k}\}$, $\{\theta_0^{i,k}\}$, $i,j \in \{1,2\}$, можемо зазначити таке $k_0(l)$, що

$$F(R,\tau) < e^{-m}$$

для всіх $k > k_0(l)$.

Тоді з (33), аналогічно як при доведенні існування розв'язку, одержимо оцінку

$$\int\limits_{Q_{\tau,R(l)}} \left[|u_t^{2,k} - u_t^{1,k}|^2 + |\theta^{2,k} - \theta^{1,k}|^2\right] e^{-\lambda t}\, dx\, dt \leqslant$$
$$\leqslant e^{-m} \int\limits_{Q_{\tau,R(l+1)}} \left[|u_t^{2,k} - u_t^{1,k}|^2 + |\theta^{2,k} - \theta^{1,k}|^2\right] e^{-\lambda t}\, dx\, dt + e^{-m}, \qquad (34)$$

для $l \geqslant l_0(C_2)$.

Оскільки $u_t^k \to u_t$ у просторі $L^2(0,T;H^1_{0,loc}(\overline{\Omega})) \cap C(0,T;L^2_{loc}(\overline{\Omega})) \cap L^p(0,T;L^p_{loc}(\Omega))$ та $\theta^k \to \theta$ у $L^2(0,T;H^1_{0,loc}(\overline{\Omega})) \cap C(0,T;L^2_{loc}(\overline{\Omega})) \cap L^q(0,T;L^q_{loc}(\Omega))$, то існує таке $k_1(l,\varepsilon) \in \mathbb{N}$, $k_1 \geqslant k_0$, що

$$\int\limits_{Q_{\tau,R(l+1)}} |u_t^{i,k} - u_t^i|\, dx\, dt \leqslant \frac{\varepsilon}{32}, \quad \int\limits_{Q_{\tau,R(l+1)}} |\theta^{i,k} - \theta^i|\, dx\, dt \leqslant \frac{\varepsilon}{32}, \quad i \in \{1,2\}, \qquad (35)$$

для всіх $k > k_1(l,\varepsilon)$.

Враховуючи те, що

$$|u_t^{2,k} - u_t^{1,k}|^2 \leqslant 3\left(|u_t^{2,k} - u_t^2|^2 + |u_t^{1,k} - u_t^1| + 2|u_t^1|^2 + 2|u_t^2|^2\right),$$
$$|\theta^{2,k} - \theta^{1,k}|^2 \leqslant 3\left(|\theta^{2,k} - \theta^2|^2 + |\theta^{1,k} - \theta^1| + 2|\theta^1|^2 + 2|\theta^2|^2\right)$$

і умови (32), з (34) отримаємо оцінку

$$\int\limits_{Q_{\tau,R(l)}} \Big[|u_t^{2,k} - u_t^{1,k}|^2 + |\theta^{2,k} - \theta^{1,k}|^2\Big] e^{-\lambda_t}\, dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant e^{-m}\left(\frac{3\varepsilon}{8} + 8a\exp\{b(R(l+1))^2\} + 1\right) \leqslant (2+8a)\exp\{-m + b(R(l+1))^2\}, \qquad (36)$$

при $k > k_1(l,\varepsilon)$. Аналогічно як при доведенні теореми 1 можемо стверджувати про існування такого $T_0 \leqslant T$, що $-m + b(R(l+1))^2 < -[2^{2l}]\sigma_0$, $\sigma_0 > 0$ для всіх $\tau \in (0, T_0]$.

Тоді з (36) випливає оцінка

$$\int\limits_{Q_{\tau,R(l)}} \Big[|u_t^{2,k} - u_t^{1,k}|^2 + |\theta^{2,k} - \theta^{1,k}|^2\Big] e^{-\lambda t}\, dx\, dt \leqslant (2+8a)\exp\{-\sigma_0[2^{2l}]\}.$$

Отже, існує таке $l_1 \in \mathbb{N}$, $l_1 \geqslant l_0$, що

$$\int\limits_{Q_{T_0,\tilde R}} |u_t^{2,k} - u_t^{1,k}|^2\, dx\, dt < \frac{\varepsilon}{16}, \quad \int\limits_{Q_{T_0,\tilde R}} |\theta^{2,k} - \theta^{1,k}|^2\, dx\, dt < \frac{\varepsilon}{16} \qquad (37)$$

для всіх $l > l_1$, $k > k_1(l,\varepsilon)$.

Оскільки

$$|u_t^2 - u_t^1|^2 \leqslant 3(|u_t^2 - u_t^{2,k}|^2 + |u_t^1 - u_t^{1,k}|^2 + |u_t^{2,k} - u_t^{1,k}|^2),$$
$$|\theta^2 - \theta^1|^2 \leqslant 3(|\theta^2 - \theta^{2,k}|^2 + |\theta^1 - \theta^{1,k}|^2 + |\theta^{2,k} - \theta^{1,k}|^2),$$

то на підставі (35), (37)

$$\int\limits_{Q_{T_0,\tilde R}} |u_t^2 - u_t^1|^2\, dx\, dt < \varepsilon, \quad \int\limits_{Q_{T_0,\tilde R}} |\theta^2 - \theta^1|^2\, dx\, dt < \varepsilon.$$

З огляду на те, що правильна нерівність

$$\int\limits_{Q_\tau} |u^2 - u^1|^2\, dx\, dt \leqslant c_1 \int\limits_{\Omega_0} |u_0^2 - u_0^1|^2\, dx + c_2 \int\limits_{Q_\tau} |u_t^2 - u_t^1|^2\, dx\, dt,$$

де c_1, c_2 константи, які залежать від T, та враховуючи те, що $u_0^{i,k} \to u_0$ у просторі $H^1_{0,loc}(\overline{\Omega})$, отримаємо

$$\int\limits_{Q_{T_0,\tilde R}} |u^2 - u^1|^2\, dx\, dt < \varepsilon,$$

тобто, враховуючи довільність ε, $u^2(x,t) = u^1,(x,t)$ та $\theta^2(x,t) = \theta^1,(x,t)$ майже всюди в $Q_{T_0}^{\tilde R}$. Оскільки $\tilde R$ – довільне число, то $u^2(x,t) = u^1,(x,t)$ та $\theta^2(x,t) = \theta^1,(x,t)$ майже всюди в Q_{T_0}. Якщо $T_0 > T$, то за скінченну кількість кроків доводимо єдиність у всій області Q_T. Теорему доведено. □

1. *Apolaya R.F.* On a nonlinear coupled system with internal damping / *Apolaya R.F., Clark H.R., Feitosa A.J.* // Electronic Journal of Differential Equations. – Vol. 2000. – №. 64. – P. 1-17.
2. *Clark H.R.* On a mixed problem for a linear coupled system with variable coefficients / *Clark H.R., San Gil Jutuca L.P., Milla Miranda* // Electronic Journal of Differential Equations. – 1998. – Vol. 1. – №04. – P. 1-20.
3. *Clark M.R.* On a mixed problem for a coupled nonlinear system / *Clark M.R., Lima O.A.* // Electronic Journal of Differential Equations. – 1997. – Vol. 1997. – №06. – P. 1–11.
4. *Lions J.L.* Non-homogeneous boundary value problems and applications / *Lions J.L., Magenes E.* – Springer-Verlag, New York, 1972. – Vol. I.
5. *Salim A. Messaoudi.* A blowup result in a multidimensional semilinear thermoelastic system / *Salim A. Messaoudi* // Electronic Journal of Differential Equations. – 2001. – Vol. 2001. – №. 30. – P. 1-9.
6. *Nechepurenko M.O.* The mixed problem for a nonlinear coupled evolution system in an unbounded domain / *Nechepurenko M.O.* (в друці).
7. *Гаевский Х.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* – М., 1978.
8. *Нечепуренко М.О.* Мішана задача для нелінійної зв'язної еволюційної системи рівнянь в обмеженій області / *Нечепуренко М.О.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2007. – Вип. 67. – С. 207-223.
9. *Medeiros L.A.* On a boundary value problem for wave equations: existence, uniqueness-asymptotic behavior / *Medeiros L.A., Milla Miranda M.* // Revista de Matematicas Aplicadas, Universidade de Chile. – 1996. – №17. – P. 47-73.
10. *Komornik V., Zuazua E.* A direct method for boundary stabilization of the wave equation / *Komornik V., Zuazua E.* // J. Math. Pure et Appl. – 1990. – №69. – P. 33-54.
11. *Schiff L.I.* Non-linear meson theory of nuclear forces / *Schiff L.I.* // J. Physic. Rev. – 1951. – №.84. – P. 1-9.
12. *Segal I.E.* The global Cauchy problem for a relativistic scalar field with power interaction / *Segal I.E.* // Bull. Soc. Math. France. – 1963. – №91. – P. 129-135.
13. *Лавренюк С.П.* Мішана задача для ультрапараболічного рівняння з нелокальною дією / *Лавренюк С.П., Оліскевич М.О.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2006. – Вип. 66. – С. 99-114.
14. *Олейник О.А.* Метод введения параметра для исследования эволюционных уравнений / *Олейник О.А., Радкевич Е.В.* // Успехи мат. наук. – 1978. – Т. 33, Вып.5. – С. 7-72.
15. *Лионс Ж.Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / *Лионс Ж.Л.* – М., 1972.

THE MIXED PROBLEM FOR A NONLINEAR HYPERBOLIC-PARABOLIC SYSTEM IN AN UNBOUNDED DOMAIN

Maksym NECHEPURENKO

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: m.nechepurenko@mfc.in.ua

A nonlinear coupled evolutions hyperbolic-parabolic system in a domain unbounded with respect to space variables is considered.The conditions of the existence and uniqueness of generalized solution have been obtained. Here we extend our previous results in [8] to an unbounded domain. The classes of the existence and uniqueness are the spaces of local integrable functions.

Key words: nonlinear system, mixed problem.

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Максим НЕЧЕПУРЕНКО

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000, Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: m.nechepurenko@mfc.in.ua

Рассмотрено нелинейную связную эволюционную гиперболо-параболическую систему в неограниченной по пространственным переменным области. Получены условия существования и единственности обобщенного решения. Расширено наши предыдущие результаты [8] до неограниченной области. Классы существования и единственности есть пространства локально интегрируемых функций.

Ключевые слова: нелинейная система, смешанная задача.

Стаття надійшла до редколегії 17.12.2008

Прийнята до друку 16.12.2009