ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2009.
Вип. 71. С. 113–124

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech. Math. 2009.
Is. 71. P. 113–124

УДК 513.6

ПРО ГРУПИ БРАУЕРА І ТЕЙТА-ШАФАРЕВИЧА КРИВИХ НАД ПСЕВДОГЛОБАЛЬНИМИ ПОЛЯМИ

Леся ЗДОМСЬКА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: lesyazdom@rambler.ru

Вивчено співвідношення між групами Брауера і групами Тейта-Шафаревича для кривих над псевдоглобальними полями.

Ключові слова: псевдоглобальне поле, алгебрична крива, якобіан, група Брауера, група Тейта-Шафаревича.

1. Вступ. Нехай K – поле, наділене множиною нормувань V_K, $\bar{K}$ – сепарабельне замикання поля K. Нехай X_K – зв'язна неособлива абсолютно незвідна крива. Для нормування v позначимо через K_v відповідне поповнення поля K. Позначимо через δ (відп. δ') *індекс* (відп. *період*) кривої X_K. За означенням індекс і період дорівнюють найменшому додатному порядку дивізора на X_K та найменшому додатному порядку класу дивізорів в $(\operatorname{Pic} X_{\bar{K}})^{\Gamma}$, відповідно. (Тут через Γ позначено групу Галуа сепарабельного алгебричного замикання $\bar{K}$ поля K над K.) Відомо, що індекс дорівнює найбільшому спільному дільникові степенів розширень L/K, для яких $X_K(L) \neq \emptyset$. Надалі δ_v та δ'_v позначатимуть індекс і період кривої X_{K_v}. Нехай A – якобіан кривої X_K. Відомо [13], що існує зв'язок між групою Брауера $\operatorname{Br}(X)$ та групою Тейта-Шафаревича Ш(A), де

$$Ш(A) = \operatorname{Ker}(H^1(K, A) \to \oplus_v H^1(K_v, A)).$$

У класичному випадку кривої над глобальним полем А. Гротендік [9, 10] довів існування зв'язку між групою Брауера $\operatorname{Br} X$ алгебричної кривої X та групою Тейта-Шафаревича Ш(A) многовиду Якобі A цієї кривої. Він довів, що у випадку, коли крива X визначена над глобальним функціональним полем і X має індекс 1 над всіма поповненнями поля K, то існує така скінченна підгрупа T_2 групи Ш(A), що група Брауера $\operatorname{Br}(X)$ ототожнюється з підгрупою скінченного індексу фактор-групи (Ш$(A)/T_2$). Дж. Мілн [13] при певних обмеженнях дослідив зв'язок між групою Брауера та групою Тейта-Шафаревича у випадку, коли X визначена над глобальним полем. Зокрема, він показав таке: коли група $Ш(A)$ не має ненульових нескінченно подільних елементів і X має індекс 1 над всіма поповненнями поля K, то період кривої X дорівнює її індексу. Крім того, якщо одна з груп $Ш(A)$ чи $\mathrm{Br}(X)'$ є скінченною, тоді такою ж є й інша з них, їхні порядки зв'язані рівністю

$$\delta^2[\mathrm{Br}\,(X)'] = [Ш(A)],$$

де

$$\mathrm{Br}\,(X)' = \mathrm{Ker}\left[\mathrm{Br}\,(X) \to \oplus_v \mathrm{Br}\,(X_{K_v})\right].$$

У випадку, коли не всі індекси δ_v дорівнюють 1, описання зв'язку між групами $\mathrm{Br}\,(X)$ і $Ш(A)$ отримав Дж. Гонзалес-Авілес в [8].

С. Ліхтенбаум [11] довів, що для кривої X над полем p-адичних чисел δ_v дорівнює одному з чисел δ'_v чи $2\delta'_v$. Нормування з властивістю $\delta_v = 2\delta'_v$ називаються *дефектними*, їхню кількість позначатимемо через d. (Це завжди скінченне число, бо, як відомо, існує лише скінченне число нормувань, для яких $\delta_v \neq 1$.)

Гонзалес-Авілес виявив, що для кривої X визначеної над глобальним полем K, для якої періоди δ'_v попарно взаємно прості, і група $Ш(A)$ не містить нескінченно подільних ненульових елементів, існує точна послідовність

$$0 \to T_0 \to T_1 \to \mathrm{Br}\,(X)' \to Ш(A)/T_2 \to T_3 \to 0,$$

в якій T_0, T_1, T_2, та T_3 – скінченні групи таких порядків:

$$[T_0] = \delta/\delta', \quad [T_1] = 2^e, \quad [T_2] = \delta'/\prod \delta'_v, \quad [T_3] = \frac{\delta'/\prod \delta'_v}{2^f},$$

де $e = \max\{0, d-1\}$ і $f = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \delta'/\prod \delta'_v \text{ є парним і } d \geqslant 1; \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$

Тут d є числом дефектних нормувань кривої X_K. Зокрема, якщо одна з груп $\mathrm{Br}\,(X)'$ чи $Ш(A)$ скінченна, тоді такою ж є й інша група, їхні порядки зв'язані рівністю

$$\delta\delta'[\mathrm{Br}\,(X)'] = 2^{e+f} \prod (\delta'_v)^2 [Ш(A)].$$

Мета цієї праці – вивчити зв'язки між групою Брауера $\mathrm{Br}\,X$ алгебричної кривої X, визначеної над псевдоглобальним полем K, та групою Тейта-Шафаревича $Ш(A)$ многовиду Якобі A цієї кривої. Згідно з [3] під псевдоглобальним полем ми розуміємо поле алгебричних функцій від однієї змінної з псевдоскінченним [5] полем констант. Нагадаємо, що поле k називається *псевдоскінченним*, якщо воно досконале, має єдине розширення степеня n для кожного натурального n, та кожний непорожній абсолютно незвідний многовид, визначений над полем k, має k-раціональну точку (остання властивість називається *псевдоалгебричною замкненістю.*)

Псевдоглобальні поля є природним узагальненням глобальних полів. Багато властивостей глобальних полів залишаються правильними і для псевдоглобальних полів, зокрема для псевдоглобальних полів справджується аналог глобальної теорії полів класів [3]. Різноманітні результати з арифметики алгебричних груп над глобальними полями узагальнюється на випадок псевдоглобального основного поля [4, 3, 13]. Зокрема, результати про зв'язок групи Брауера та групи Тейта-Шафаревича теж мають аналоги для кривих над псевдоглобальними полями, один з яких виражає така теорема.

Теорема 1. *Нехай X неособлива, геометрично незвідна крива, визначена над псевдоглобальним полем K. Припустимо, що крива X має індекс δ і період δ'. Тоді існує точна послідовність*

$$0 \longrightarrow T_0 \longrightarrow T_1 \longrightarrow \mathrm{Br}\,(X)' \longrightarrow Ш(P) \longrightarrow \mathbb{Q}/\Delta^{-1}\mathbb{Z},$$

де T_0 та T_1 скінченні групи порядків $[T_0] = (\delta/\delta')\cdot[A(K) : \mathrm{Pic}^0(X_K)]$ і $[T_1] = \prod \delta_v/\Delta$ відповідно, і Δ найменше спільне кратне локальних індексів δ_v кривої X.

2. Допоміжні результати. Нехай X – неособлива зв'язна абсолютно незвідна крива над K, $\bar{K}$ – сепарабельне замикання поля K, $\bar{X}$ – крива X, розглянута над $\bar{K}$, та $\Gamma = \mathrm{Gal}\,(\bar{K}/K)$. Стандартно позначимо через $\mathrm{Div}(X)$ групу дивізорів кривої X над K, $\mathrm{Div}^0(X)$ – підгрупу дивізорів степеня 0, $P := \mathrm{Pic}\,(X)$ – групу класів дивізорів та через $\mathrm{Pic}^0(X)$ – підгрупу класів дивізорів степеня 0. Відомо, що $A := \mathrm{Pic}^0(X)$, якобіан кривої X, є абелевим многовидом. Для розширення L/K поля K позначимо через X_L криву, отриману з X розширенням скалярів з K до L, $P(L) = \mathrm{Pic}\,(X_L)$ та $A(L) = \mathrm{Pic}^0(X_L)$. Маємо точну послідовність

$$0 \longrightarrow A(\bar{K}) \longrightarrow P(\bar{K}) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z} \longrightarrow 0. \tag{1}$$

Γ-модулів. Переходячи в цій послідовності до Γ-інваріантних елементів, отримуємо точні послідовності

$$0 \longrightarrow A(K) \longrightarrow P(K) \longrightarrow \delta'\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \tag{2}$$

$$\mathrm{Div}^0(X)^\Gamma \longrightarrow A(K) \longrightarrow H^1(\Gamma, K(X)/K^*), \tag{3}$$

де $K(X)$ – поле раціональних функцій на кривій X. З означення груп $\mathrm{Div}^0(X)$ і $\mathrm{Pic}^0(X)$ одержуємо точні послідовності

$$0 \longrightarrow K(X_{\bar{K}})^*/\bar{K}^* \longrightarrow \mathrm{Div}^0(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}^0(X) \longrightarrow 0 \tag{4}$$

$$0 \longrightarrow K(X_{\bar{K}})^*/\bar{K}^* \longrightarrow \mathrm{Div}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}\,(X) \longrightarrow 0. \tag{5}$$

Звідси отримуємо точні послідовності

$$0 \to K(X_K)^*/K^* \to \mathrm{Div}^0(X_K) \to A(K) \to A(K)/\mathrm{Pic}^0(X_K) \to 0 \tag{6}$$

$$0 \to K(X_K)^*/K^* \to \mathrm{Div}(X_K) \to P(K) \to P(K)/\mathrm{Pic}\,(X_K) \to 0. \tag{7}$$

Розглянемо точну послідовність когомологій, відповідну точній послідовності (4)

$$\mathrm{Div}^0(X)^\Gamma \xrightarrow{\alpha} (\mathrm{Pic}^0(X))^\Gamma \longrightarrow H^1(\Gamma, \bar{K}(X)^*/\bar{K}^*). \tag{8}$$

Враховуючи, що $\mathrm{Pic}^0(X)^\Gamma = A(K)$ і образ гомоморфізму α дорівнює $\mathrm{Pic}^0(X_K)$, з точної послідовності (3) отримуємо, що $A(K)/\mathrm{Pic}^0(X_K)$ є підгрупою групи $H^1(\Gamma, \bar{K}(X)^*/\bar{K}^*)$.

Лема 1. *Групи $A(K)/\mathrm{Pic}^0(X_K)$ і $P(K)/\mathrm{Pic}\,(X_K)$ скінченні.*

Доведення. Зауважимо спочатку, що група $A(K)/\mathrm{Pic}^0(X_K)$ скінченно породжена. Нехай $(A^{K/k}(k), \tau_K)$ та $P^{K/k}(k), \tau_K)$ – K/k-сліди [14] многовидів $A(K)$ і $\mathrm{Pic}^0(X_K)$ відповідно. Знайдеться скінченне розширення L/K, над яким крива X має

L-раціональні точки. Нехай l поле констант поля L. Тоді $A(L) = \mathrm{Pic}^0(X_L)$ і многовиди $P(K)$ та $\mathrm{Pic}^0(X_K)$ мають однакові сліди $(A^{L/l}(l), \tau_L)$, якщо їх розглядати над полем L. Розглянемо таку діаграму підгруп групи $A(K)$:

$$\begin{array}{ccccc} A(K) & \supset & \tau_L(A^{L/l}(l)) \cap A(K) & \supset & \tau_K(A^{K/k}(k)) \\ \cup & & & & \cup \\ \mathrm{Pic}^0(X_K) & \supset & \tau_L(P^{K/k}(k)) \cap \mathrm{Pic}^0(X_K) & \supset & \tau_K(P^{K/k}(k)). \end{array}$$

Теорема Морделла-Вейля для функціональних полів [14] стверджує, що групи $A(K)/\tau_K(A^{K/k}(k))$ та $\mathrm{Pic}^0(X_K)/\tau_K(P^{K/k}(k))$ скінченно породжені. Групи $\tau_K(A^{K/k}(k))$ та $\tau_K(P^{K/k}(k))$ ізоморфні, оскільки над полем L кожна з них ізоморфна $A^{L/l}(l)$ над l. Отже, $A^{K/k}(k)$ та $P^{K/k}(k)$ є l-ізоморфними головними однорідними просторами. Оскільки група головних однорідних просторів тривіальна для абелевих многовидів над псевдоскінченним полем, то $A^{K/k}(k) \simeq P^{K/k}(k)$, тому у попередній діаграмі $\tau_K(A^{K/k}(k)) \simeq \tau_K(P^{K/k}(k))$. Звідси випливає, що група $A(K)/\mathrm{Pic}^0(X_K)$ скінченно породжена. Оскільки ця група є підгрупою групи кручення $H^1(\Gamma, \bar{K}(X)^*/\bar{K}^*)$, то вона скінченна. Застосовуючи лему про "змію" до точної послідовності

$$0 \to \mathrm{Pic}^0(X_K) \to \mathrm{Pic}\,(X_K) \to s\mathbb{Z} \to 0$$

та точної послідовності (2) з природними вкладеннями в ролі вертикальних гомоморфізмів, отримуємо точну послідовність

$$0 \to t\mathbb{Z} \to A(K)/\mathrm{Pic}^0(X_K) \to P(K)/\mathrm{Pic}\,(X_K) \to \mathbb{Z}/r\mathbb{Z} \to 0,$$

де s, r і t підходящі натуральні числа. Оскільки групи $A(K)/\mathrm{Pic}^0(X_K)$ та $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ скінченні, такою ж є і група $P(K)/\mathrm{Pic}\,(X_K)$, що і треба було довести. $\square$

Лема 2. *Нехай X – крива, визначена над псевдоглобальним полем K. Тоді для майже всіх нормувань v поля функцій на X, $\delta_v = \delta(X_{K_v}) = 1$.*

Доведення. Не обмежуючи загальності, можна вважати, що для кожного v коефіцієнти рівняння кривої X належать $\mathcal{O}_v$-кільцю цілих елементів поля K_v. Редукуючи коефіцієнти кривої X за модулем максимального ідеала $\mathfrak{m}_v$, отримуємо криві $X(v)$ над псевдоскінченним полем $k' \supset k$. Для майже всіх v криві $X(v)$ непорожні. Крім того, для кожного v крива $X(v)$ має неособливу точку, бо особливих точок може бути лише скінченна кількість, а $X(v)$ має [7] нескінченно багато точок. Застосовуючи лему Гензеля, отримуємо, що X_{K_v} має раціональну точку, тому $\delta_v = 1$ за означенням індексу. $\square$

Наслідок 1. *Нехай крива X визначена над псевдоглобальним полем K. Тоді*

$$[P(K) : \mathrm{Pic}\,(X_K)] = (\delta/\delta')[A(K) : \mathrm{Pic}^0(X_K)].$$

Доведення. Достатньо застосувати лему про змію так, як це робиться у випадку глобального основного поля [8] до комутативної діаграми з точними рядками

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Div}^0(X_K) & \longrightarrow & \mathrm{Div}(X_K) & \longrightarrow & \delta\mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A(K) & \longrightarrow & P(K) & \longrightarrow & \delta'\mathbb{Z} & \longrightarrow & 0,
\end{array}$$

у якій нижній рядок є точною послідовністю (2), а верхній рядок отримуємо з точної послідовності

$$0 \to \mathrm{Div}^0(\bar{X}_K) \to \mathrm{Div}(\bar{X}_K) \to \delta\mathbb{Z} \to 0$$

за означенням індексу, переходячи до Γ-інваріантних елементів. $\square$

Тепер доведемо рівність $[A(K_v) : \mathrm{Pic}^0(X_{K_v})] = \delta'_v$, яка у поєднанні з наслідком 1 дає $[P(K_v) : \mathrm{Pic}^0(X_{K_v})] = \delta_v$. У випадку глобального основного поля доведення цієї рівності використовує невиродженість добутку Тейта-Шафаревича для абелевих многовидів над локальними полями. Відомо [1], що для еліптичної кривої, визначеної над псевдолокальним полем K, добуток Тейта-Шафаревича індукує двоїстість скінченних груп $A(K)/nA(K)$ і $H^1(K, A)_n$. Виявляється, що аналогічний факт виконується і для довільного абелевого многовиду, визначеного над повним дискретно нормованим полем з псевдоскінченним полем лишків. Покажемо це, використовуючи класичні методи та результати з [11] та [12]. Для цього сформулюємо спочатку один результат про двоїстість Тейта в когомологіях Галуа скінченних модулів над загальними локальними полями, тобто повними дискретно нормованими полями з квазіскінченними [17] полями (досконалими полями, які мають точно одне розширення степеня n для кожного натурального числа n) лишків.

Лема 3. *Нехай K – загальне локальне поле, G_K – його абсолютна група, M – скінченний G_K-модуль, $(|M|, \mathrm{char} k) = 1$, і $\hat{M} = \mathrm{Hom}\,(M, K_s^*)$, де K_s^* мультиплікативна група сепарабельного замикання поля K. Тоді групи $H^i(K, M)$ і $H^i(K, \hat{M})$ скінченні для $0 \leqslant i \leqslant 2$ і двоїсті між собою стосовно $\cup$-добутку*

$$H^i(K, M) \times H^i(K, \hat{M}) \longrightarrow H^2(K, K_s^*) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Доведення. Див. [17], теорема 2 на ст. 111 та вправа 2 на ст. 113. $\square$

Лема 4. *Нехай K – загальне локальне поле, M – скінченний G_K-модуль, $(|M|, \mathrm{char} k) = 1$. Тоді групи $H^i(K, M)$ – скінченні і*

$$|H^0(K, M)| \cdot |H^2(K, M)| = |H^1(K, M)|.$$

Доведення. Див. [17], твердження 17 на ст. 115 та вправа на ст. 117. $\square$

Лема 5. *Нехай A – довільний абелевий многовид, визначений над псевдолокальним полем K з полем лишків k. Припустимо, що $(n, \mathrm{char}\, k) = 1$. Тоді $|A(K)/nA(K)| \geqslant$ $\geqslant |(A(K))_n|$.*

Доведення. Якщо A – абелевий многовид, визначений над полем лишків k, то рівність $|A(k)/nA(k)| = |(A(k))_n|$ випливає з точної когомологічної послідовності

$$0 \longrightarrow A(k) \xrightarrow{n} A(k) \longrightarrow H^1(k, A_n) \longrightarrow H^1(k, A)_n = 0,$$

відповідної точній послідовності $0 \to A_n(\bar{k}) \to A(\bar{k}) \xrightarrow{n} A(\bar{k}) \to 0$, враховуючи, що $H^1(k, A) = 0$ з огляду на псевдоскінченності поля k, і $|H^1(k, A_n)| = |H^0(k, A_n)| =$ $= |A_n(k)|$, оскільки $\mathrm{Gal}\,(\bar{k}/k) = \hat{\mathbb{Z}}$ (див., наприклад [18], лема 3, с. 322). Так само

$|T(k)/nT(k)| = |(T(k))_n|$ для алгебричного тора T, визначеного над псевдоскінченним полем k.

Нехай тепер A – абелевий многовид, визначений над псевдолокальним полем K з полем лишків k. Відомо, що існує скінченне розширення L поля K над яким A має напівстабільну редукцію A' над полем лишків l поля L, тобто $A'(l)$ є розширенням абелевого многовиду $B(l)$ за допомогою тора $T(l)$. Тому, застосувавши лему про змію до комутативної діаграми

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & T(l) \arrow[r] \arrow[d, "n"] & A'(l) \arrow[r] \arrow[d, "n"] & B(l) \arrow[r] \arrow[d, "n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & T(l) \arrow[r] & A'(l) \arrow[r] & B(l) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

і використовуючи, що, за доведеним,

$$|B(l)/nB(l)| = |B_n(l)| \text{ і } |T(l)/nT(l)| = |T_n(l)|,$$

отримуємо, що $|A'(l)/nA'(l)| = |A'_n(l)| = A_n(L)$. Крім того, відомо, що відображення редукції $A(L) \to A'(l)$ сюр'єктивне. Звідси випливає, що $|A(L)/nA(L)| \geqslant$ $\geqslant |A'(l)/nA'(l)| = |A'_n(l)| = |A_n(L)|$.

Припустимо, що $|A(L)/nA(L)| = |A_n(L)|$. Нехай A_{tor} – підгрупа кручення A. Група $A(L)/A_{\mathrm{tor}}(L)$ подільна. З іншого боку, нехай Q – коядро канонічного відображення $A(K) \to A(L)$. Тоді фактор-група Q/Q_{tor} також подільна за сюр'єктивністю відображення $A(L) \to Q$. Тому $[Q/nQ] = [Q_{\mathrm{tor}}/nQ_{\mathrm{tor}}]$. Оскільки група Q_{tor} скінченна, то також $[A_n(K)] = [A(K)/nA(K)]$.

З наступного результату випливатиме, що насправді $|A(L)/nA(L)| = |A_n(L)|$ і $|A(K)/nA(K) = |A_n(K)|$. $\square$

Теорема 2. *Нехай A – абелевий многовид, визначений над псевдолокальним полем K, $\hat{A}$ – двоїстий многовид. Тоді добуток Тейта-Шафаревича індукує двоїстість скінченних груп $A(K)/nA(K)$ і $H^1(K, \hat{A})_n$.*

Доведення. Припустимо спочатку, що $|A(K)/nA(K)| \geqslant |A_n(K)|$. Нехай i_n та j_n – гомоморфізми з точних послідовностей

$$0 \longrightarrow A(K)/nA(K) \xrightarrow{i_n} H^1(K, A_n) \longrightarrow H^1(K, A)_n \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow \hat{A}(K)/n\hat{A}(K) \longrightarrow H^1(K, \hat{A}_n) \xrightarrow{j_n} H^1(K, \hat{A})_n \longrightarrow 0,$$

які одержують з точної послідовностості когомологій Галуа, відповідні точній послідовності G_K-модулів $0 \to A_n \to A \to A \to 0$ та аналогічної точної послідовності для $\hat{A}$. Згідно з твердженням 9 з [19] одержуємо комутативну діаграму

$$\begin{tikzcd}
H^1(K, A_n) & \times & H^1(K, \hat{A}_n)' \arrow[r, "W"] \arrow[d, "j_n"] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\
A(K)/nA(K) \arrow[u, "i_n"] & \times & H^1(K, \hat{A})_n \arrow[r, "T"] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z},
\end{tikzcd}$$

де добуток W' індукований добутком Вейля (означення добутку Вейля можна знайти у [19]), а добуток T індукований добутком Тейта-Шафаревича. Добуток W' є двоїстістю скінченних груп, тому з комутативної діаграми (2) випливає, що добуток T невироджений зліва. Для того, щоб вивести звідси його двобічну невиродженість, достатньо показати, що $|A(K)/nA(K)| \geqslant |H^1(K,A)_n|$. Маємо, використовуючи леми 4-5, ізоморфізм A_n і $\hat{A}_n$ та точну послідовність (2)

$$|A(K)/nA(K)| \cdot |\hat{A}(K)/n\hat{A}(K)| \geqslant |A(K)_n| \cdot |\hat{A}(K)_n| = \\ = |H^0(K,\hat{A}_n)| \cdot |H^0(K,A_n)| = |H^0(K,\hat{A}_n)| \cdot |H^2(K,\hat{A}_n)| = \\ = |H^1(K,\hat{A}_n)| = |\hat{A}(K)/n\hat{A}(K)| \cdot |H^1(K,\hat{A})_n|.$$

Звідси випливає, що $|A(K)/nA(K)| \geqslant |H^1(K,\hat{A}_n)|$, оскільки добуток T невироджений зліва, то насправді $|A(K)/nA(K)| \geqslant |H^1(K,\hat{A}_n)|$, і це завершує доведення теореми 2 у випадку, коли $|A(K)/nA(K)| \geqslant |A_n(K)|$. □

Ще один потрібний нам результат – це аналог теореми Роккета про період та індекс кривих.

Теорема 3. *Нехай K – псевдолокальне поле. Тоді порядок підгрупи* $\mathrm{Br}\,(K)$*, що складається з тих класів алгебр, які розкладаються в полі функцій $K(X)$ на кривій X, дорівнює індексу кривої X.*

Доведення. Розглянемо відому точну послідовність (доведення її точності можна знайти, наприклад, у [11]))

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}\,(X) \longrightarrow H^0(G,\mathrm{Pic}\,(\bar{X})) \longrightarrow \mathrm{Br}\,(k) \longrightarrow \mathrm{Br}\,(X) \\ \longrightarrow H^1(G,\mathrm{Pic}\,(\bar{X})) \longrightarrow H^3(G,\bar{k}^*). \quad (9)$$

С. Ліхтенбаум розглядав у [11] таку комутативну діаграму з точними рядками і стовпчиками

$$\begin{tikzcd}
& & \mathrm{Br}\,(K) & & \\
& \mathrm{Br}\,(k) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Br}\,(k) \arrow[u] & & \\
0 \arrow[r] & H^0(G,\mathrm{Pic}^0(\bar{X})) \arrow[r] \arrow[u, "\theta"] & H^0(G,\mathrm{Pic}\,(\bar{X})) \arrow[r] \arrow[u] & \delta'\mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^0(G,\mathrm{Div}^0(\bar{X})) \arrow[r] \arrow[u, "\lambda_1"] & H^0(G,\mathrm{Div}\,(\bar{X})) \arrow[r] \arrow[u, "\lambda_2"] & \delta\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
& & & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Середній стовпчик – це частина точної послідовності (9), і лівий стовпчик, отриманий так само. Нехай M – коядро гомоморфізму λ_1, і N – коядро гомоморфізму λ_2. Теорема стверджує, що $|N| = \delta$. За лемою про змію, безпосередньо бачимо, $\delta|M| = \delta'|N|$, тому теорема еквівалентна твердженню, що $|M| = \delta'$. Але рівність

$\theta(x) = \rho_0(\alpha, x)$ разом з фактом, що ρ_0 є дуалізуючим добутком, і ми одержуємо, що $|M| =$ порядку $\alpha = \delta'$. $\square$

Лема 6.

$$[A(K_v) : \mathrm{Pic}^0(X_{K_v})] = \delta'_v, \quad [P(K_v) : \mathrm{Pic}\,(X_{K_v})] = \delta_v.$$

Доведення. Нехай $\Gamma_v = \mathrm{Gal}\,(\bar{K}_v/K_v)$. З когомологічної послідовності, асоційованої з точною послідовністю Γ_v-модулів $0 \to A(\bar{K}_v) \to P(\bar{K}_v) \overset{\deg}{\to} \mathbb{Z} \to 0$, отримуємо точну послідовність

$$0 \to \mathbb{Z}/\delta'_v\mathbb{Z} \to H^1(\Gamma_v, A) \to H^1(\Gamma_v, P) \to 0. \tag{10}$$

$\square$

Нам також буде потрібний певний варіант леми про змію. Розглянемо таку комутативну діаграму в категорії абелевих груп:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] \arrow[d] & A_2 \arrow[r, "f"] \arrow[d] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "\eta"] & A_4 \arrow[r] \arrow[d, "\lambda"] & A_5 \arrow[r] \arrow[d, "\mu"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_1 \arrow[r] & B_2 \arrow[r, "g"] & B_3 \arrow[r] & B_4 \arrow[r] & B_5 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{11}$$

Вона породжує комутативну діаграму

$$\begin{tikzcd}
 & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "\bar\eta"] & A_4 \arrow[r] \arrow[d, "\lambda"] & A_5 \arrow[r] \arrow[d, "\mu"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_3/\mathrm{Im} g \arrow[r] & B_4 \arrow[r] & B_5 \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

де $\bar\eta$ – композиція η з канонічним відображенням з B_3 в $B_3/\mathrm{Im}g$. Наступне твердження випливає з $\mathrm{Im}f \subset \mathrm{Ker}\,\bar\eta$ та леми про змію, застосованої до попередньої діаграми.

Лема 7. (Гонзалес-Авілес [8].) *Кожна комутативна діаграма вигляду (11) породжує точну послідовність*

$$0 \to \mathrm{Im}f \to \mathrm{Ker}\,\bar\eta \to \mathrm{Ker}\,\lambda \to \mathrm{Ker}\,\mu \to Coker\bar\eta,$$

де η визначено раніше. Крім того, існує точна послідовність

$$0 \to \mathrm{Ker}\,\eta \to \mathrm{Ker}\,\bar\eta \to \mathrm{Im}g \to \mathrm{Coker}\eta \to \mathrm{Coker}\bar\eta \to 0.$$

3. Доведення теореми. Всі когомологічні групи, які ми будемо розглядати, будуть або групами когомологій Галуа, або ж етальними когомологіями. Нехай Γ_v – підгрупа групи Γ, ототожнена з групою розкладу деякого фіксованого нормування поля $\bar{K}$, що породжує v. Для кожного v, $\mathrm{inv}_v : \mathrm{Br}\,(K_v) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ є звичайним відображенням інваріанта локальної теорії полів класів. n-кручення абелевої групи M будемо позначати $M_{n-\mathrm{tor}}$.

Нагадаємо одну фундаментальну точну послідовність. Оскільки $H^q(X_{\bar{K}}, \mathbb{G}_m) = 0$ для всіх $q \geqslant 2$ [15], то зі спектральної послідовності Хохшільда-Серра

$$H^p(\Gamma, H^q(X_{\bar{K}}, \mathbb{G}_m)) \Rightarrow H^{p+q}(X_K, \mathbb{G}_m)$$

випливає [6, XV.5.11] точна послідовність

$$0 \to \mathrm{Pic}\,(X_K) \to P(K) \to \mathrm{Br}\,(K) \to \mathrm{Br}\,(X_K) \to H^1(\Gamma, P) \to 0, \tag{12}$$

де нуль справа у цій послідовності випливає з рівності $H^3(\Gamma, \bar{K}^*) = 0$ [2, 17]. (Тут ми використали відомі факти, що $\mathrm{Pic}\,(X_K) = H^1(X_K, \mathbb{G}_m)$ і що група Брауера кривої X дорівнює когомологічній групі Брауера цієї кривої.) Так само, для кожного нормування v існує точна послідовність

$$0 \to \mathrm{Pic}\,(X_{K_v}) \to P(K_v) \xrightarrow{g_v} \mathrm{Br}\,(K_v) \to \mathrm{Br}\,(X_{K_v}) \to H^1(\Gamma_v, P). \tag{13}$$

Лема 8. $\mathrm{Im}\, g_v = \mathrm{Br}\,(K_v)_{\delta_v-\mathrm{tor}}$ *для кожного нормування* v *поля* K.

Доведення. За лемою 6 $\mathrm{Im} g_v$ є підгрупою групи $\mathrm{Br}\,(K_v)$ порядку δ_v. З іншого боку, відображення inv_v породжує ізоморфізм $\mathrm{Br}\,(K_v)_{\delta_v-\mathrm{tor}} \xrightarrow{\sim} \delta_v^{-1}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$, звідки випливає твердження леми. □

Розглянемо комутативну діаграму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Pic}\,(X_K) \arrow[r] \arrow[d] & P(K) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Br}\,(K) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\eta}"] & {} \\
0 \arrow[r] & \oplus_v \mathrm{Pic}\,(X_{K_v}) \arrow[r] & \oplus_v P(K_v) \arrow[r, "g"] & \oplus_v \mathrm{Br}\,(K_v) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & \mathrm{Br}\,(X_K) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(\Gamma, P) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
{} \arrow[r] & \oplus_v \mathrm{Br}\,(X_{K_v}) \arrow[r] & \oplus_v H^1(\Gamma_v, P) \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

де прямі суми беруть за всіма нормуваннями поля K, вертикальні відображення є природними гомоморфізмами, і $g = \oplus g_v$. Ця діаграма має ту саму форму, що і діаграма (11), тому ми можемо застосувати до неї лему 7. Перед цим нам буде потрібна така лема.

Лема 9. *а) Для псевдоглобального поля* K *існує точна послідовність*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Br}\,(K) \xrightarrow{\eta} \oplus_v \mathrm{Br}\,(K_v) \xrightarrow{\Sigma \mathrm{inv}_v} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

б) Існує точна послідовність

$$0 \to \mathrm{Br}\,(X) \longrightarrow \mathrm{Br}\,(X_K) \longrightarrow \oplus_{v \notin S} \mathrm{Br}\,(X_{K_v}),$$

де S *– множина тих нормувань поля* K*, що не відповідають точкам непорожньої відкритої підсхеми* U *єдиної гладкої повної кривої над* k*, полем функцій якої є* K.

Доведення. Перше твердження – це один з ключових результатів теорії полів класів глобального поля. Для випадку псевдоглобального поля аналогічну точну послідовність виявили в [3]. Друге твердження доведене в [13, лема 2.6]. Наведене там доведення придатне і для нашого випадку – випадку псевдоглобального основного поля K, оскільки єдине місце у згаданому доведенні, де використовується специфіка основного поля, є тривіальність групи Брауера редукованої кривої для кривої X, визначеної над K. Проте група Брауера кривої над псевдоскінченним полем також тривіальна. □

Застосуємо лему 7 до попередньої діаграми, використовуючи у цьому разі попередню лему. Отримаємо точну послідовність

$$0 \longrightarrow P(K)/\mathrm{Pic}\,(X_K) \longrightarrow \mathrm{Ker}\ \bar{\eta} \longrightarrow \mathrm{Br}\,(X)' \longrightarrow Ш(P) \longrightarrow \mathrm{Coker}\,\bar{\eta},$$

де відображення $\bar{\eta} : \mathrm{Br}\,(K) \to \oplus_v \mathrm{Br}\,(K_v)/\mathrm{Im} g$ породжується відображенням η і

$$\mathrm{Br}\,(X)' = \mathrm{Ker}\,\left[\mathrm{Br}\,(X) \longrightarrow \oplus_{v\in S}\mathrm{Br}\,(X_{K_v})\right].$$

Згідно з наслідком 1 порядок $P(K)/\mathrm{Pic}\,(X_K)$ дорівнює $(\delta/\delta')\cdot[A(K) : \mathrm{Pic}^0(X_K)]$. Властивості ядра та коядра відображення $\bar{\eta}$ наведені в твердженні 1.

Твердження 1. *Правильна рівність*

$$[\mathrm{Ker}\ \bar{\eta}] = \prod \delta_v/\Delta,$$

і відображення $\Sigma\mathrm{inv}_v : \oplus\mathrm{Br}\,(K_v) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ *породжує ізоморфізм*

$$\mathrm{Coker}\,\bar{\eta} \cong \mathbb{Q}/\Delta^{-1}\mathbb{Z}.$$

Доведення. Поєднуючи леми 7, 8 та 9, отримуємо точну послідовність

$$0 \to \mathrm{Ker}\ \bar{\eta} \to \oplus\mathrm{Br}\,(K_v)_{\delta_v-\mathrm{tor}} \stackrel{\Sigma\mathrm{inv}_v}{\to} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to \mathrm{Coker}\,\bar{\eta} \to 0. \tag{14}$$

Для кожного v відображення інваріанта inv_v породжує ізоморфізм $\mathrm{Br}\,(K_v)_{\delta_v-\mathrm{tor}} \cong$ $\cong \delta_v^{-1}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$, тому ядро і коядро середнього відображення попередньої точної послідовності (14) можна ототожнити з ядром і коядром відображення Σ, визначеного перед лемою 6. Як наслідок, наше твердження випливає з властивостей відображення Σ, наведених перед лемою 6. □

Підсумовуючи отримані вище результати, бачимо, що існує точна послідовність

$$0 \longrightarrow T_0 \longrightarrow T_1 \longrightarrow \mathrm{Br}\,(X)' \to Ш(P) \longrightarrow \mathbb{Q}/\Delta^{-1}\mathbb{Z},$$

де T_0 та T_1 – скінченні групи порядків $[T_0] = (\delta/\delta')\cdot[A(K) : \mathrm{Pic}^0(X_K)]$ і $[T_1] = \prod \delta_v/\Delta$, що й завершує доведення теореми 1.

Наслідок 2. *Припустимо, що всі локальні індекси δ_v кривої X дорівнюють 1 і група $Ш(P)$ не має нескінченно подільних елементів. Якщо одна з груп $\mathrm{Br}'(X)$ або $Ш(P)$ скінченна, то такою є й інша, і їхні порядки зв'язані рівністю*

$$\delta^2|\mathrm{Br}'(X)| = |Ш(P)|.$$

Отримана під час доведення теореми 1 інформація дає підстави довести такий факт.

Теорема 4. *Припустимо, що числа δ_v' – попарно взаємно прості. Тоді*

$$A(K) = \mathrm{Pic}^0(X_K).$$

Доведення. Існує комутативна діаграма з точними рядками

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \longrightarrow & A(K)/\mathrm{Pic}^0(X_K) & \longrightarrow & \mathrm{Br}\,(K) \\
 & & \downarrow & & \downarrow\,\eta \\
0 & \longrightarrow & \oplus_v A(K_v)/\mathrm{Pic}^0(X_{K_v}) & \longrightarrow & \oplus_v\mathrm{Br}\,(K_v)
\end{array}$$

з природними вертикальними відображеннями, в якій нетривіальні горизонтальні гомоморфізми породжуються відображеннями

$$P(K)/\mathrm{Pic}\,(X_K) \to \mathrm{Br}\,(K) \ \text{ і } \ P(K_v)/\mathrm{Pic}\,(X_{K_v}) \to \mathrm{Br}\,(K_v)$$

з комутативних діаграм (12) та (13) відповідно. Міркуючи аналогічно до доведення леми 8, отримуємо, що для кожного v образ $A(K_v)/\mathrm{Pic}^0(X_{K_v})$ в $\mathrm{Br}\,(K_v)$ дорівнює $\mathrm{Br}\,(K_v)_{\delta'_v-\mathrm{tor}}$. Як наслідок, група $A(K)/\mathrm{Pic}^0(X_K)$ вкладається в $\mathrm{Ker}\ \bar{\eta}'$, де гомоморфізм

$$\bar{\eta}' : \mathrm{Br}\,(K) \to \oplus_v \mathrm{Br}\,(X_{K_v})/\mathrm{Br}\,(K_v)_{\delta'_v-\mathrm{tor}}$$

є породженим η. Застосовуючи ті самі міркування, що і в доведенні твердження 1, отримуємо, що порядок $\mathrm{Ker}\ \bar{\eta}'$ дорівнює $\prod \delta'_v/\Delta'$. Згідно з нашими припущеннями це відношення дорівнює 1, звідки і випливає твердження теореми. $\square$

1. *Андрийчук В.И.* Об эллиптических кривых над псевдолокальнымы полями / *Андрийчук В.И.* // Мат. сб. – 1979. – Т. 110, №9. – С. 88-101.
2. *Andriychuk V.* Algebraic curves over n-dimensional general local fields / *Andriychuk V.* // Mat. Stud. – 2001. – Vol. 15, №2. – P. 209-214.
3. *Andriychuk V.* On the algebraic tori over some function fields / *Andriychuk V.* // Mat. Stud. – 1999. – Vol. 12, №2. – P. 115-126.
4. *Андрійчук В.І.* Арифметика алгебричних многовидів: / *Андрійчук В.І.* Дис. ... докт. фіз.-мат. наук: Київ, 2002.
5. *Ax J.* The elementary theory of finite fields / *Ax J.* // Ann. Math. – 1968. – Vol. 88, №2. – P. 239-271.
6. *Cartan H.* Homological Algebra / *Cartan H., Eilenberg S.* – Princeton University Press, Princeton, N. J., 1956.
7. *Fried M.D.* Field Arithmetic / *Fried M.D., Jarden M.* – Springer, 2005.
8. *Gonzalez-Avilez C.D.* Brauer groups and Tate-Shafarevich groups / *Gonzalez-Avilez C.D.* // J. Math. Sci. Univ. Tokyo. – 2003. – Vol. 10. – P. 381-419.
9. *Grothendieck A.* Technique de descente et théorèmes d'existence en Géométrie Algébrique, V, VI. Les Schémas de Picard / *Grothendieck A.* // Sém. Bourbaki, 1961. – №232, 1962. – №236.
10. *Grothendieck A.* Le Groupe de Brauer I-II-III, in: Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas / *Grothendieck A.* – North-Holland, Amsterdam, 1968.
11. *Lichtenbaum S.* Duality theorems for curves over P-adic fields / *Lichtenbaum S.* // Invent. Math. – 1969. – Vol. 7. – P. 1209-1223.
12. *Milne J.S.* Weil-Chatelet groups over local fields / *Milne J.S.* // Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. – 1970. – Vol. 3. – P. 273-284. Addendum, Ibid. – 1972. – Vol. 5. – P. 261-264.
13. *Milne J.S.* Comparison of the Brauer group and the Tate-Šafarevič group / *Milne J.S.* // Journal of the Faculty of Science, the University of Tokyo. – 1982. – Vol. 28, №3. – P. 735-743.
14. *Ленг С.* Основы диофантовой геометрии / *Ленг С.* – М.: Мир, 1986.
15. *Милн Дж.* Этальные когомологии / *Милн Дж.* – М.: Мир, 1983.
16. *Milne J.S.* Arithmetic Duality Theorems. – Persp. in Math., 1 / *Milne J.S.* – Academic Press Inc., 1986.
17. *Серр Ж.-П.* Когомологии Галуа / *Серр Ж.-П.* – М.: Мир, 1968.
18. *Платонов В.П.* Алгебраические группы и теория чисел / *Платонов В.П., Рапинчук А.С.* – М.: Наука, 1991.

19. *Башмаков М.И.* Когомологии абелевых многообразий над числовым полем / *Башмаков М.И.* // Успехи матем. наук. – 1972. – Т. 28, Вып. 6. – С. 25-66.

ON THE BRAUER GROUPS AND THE TATE-SHAFAREVICH GROUPS OF CURVES OVER PSEUDOGLOBAL FIELDS

Lesya ZDOMSKA

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: lesyazdom@rambler.ru

The relation between the Brauer groups and the Tate-Shafarevich groups of curves over pseudoglobal fields are studied.

Key words: pseudoglobal field, algebraic curve, jacobian, Brauer group, Tate-Shafarevich group.

О ГРУППАХ БРАУЭРА И ТЭЙТА-ШАФАРЕВИЧА КРИВЫХ НАД ПСЕВДОГЛОБАЛЬНЫМИ ПОЛЯМИ

Леся ЗДОМСКАЯ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000, Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: lesyazdom@rambler.ru

Изучено соотношения между группами Брауэра и группами Тэйта-Шафаревича для кривых над псевдоглобальными полями.

Ключевые слова: псевдоглобальное поле, алгебраическая кривая, якобиан, группа Брауэра, группа Тэйта-Шафаревича.

Стаття надійшла до редколегії 26.05.2009

Прийнята до друку 16.12.2009