ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2009.
Вип. 71. С. 106–112

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech. Math. 2009.
Is. 71. P. 106–112

УДК 517.95

ПРО ЄДИНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ ОДНІЄЇ ЕВОЛЮЦІЙНОЇ ВАРІАЦІЙНОЇ НЕРІВНОСТІ ВИЩОГО ПОРЯДКУ З ТЕОРІЇ ПЛАСТИН

Павло ЗАГОРБЕНСЬКИЙ, Микола БУГРІЙ, Олег БУГРІЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: ol_buhrii@i.ua

Розглянуто півлінійну еволюційну варіаційну нерівність вищого порядку. Показано, що вона описує коливні процеси в теорії пластин. Знайдено умови єдиності розв'язку цієї нерівності.

Ключові слова: теорія пластин, варіаційна нерівність вищого порядку, єдиність розв'язку.

1. Мішані задачі для рівняння

$$u_{tt} + (-1)^m \Delta^m u + c|u|^{p-2}u + g|u_t|^{q-2}u_t = f \tag{1.1}$$

розглядали багато авторів. У випадку $m = 1$ такі задачі досліджували в [1]-[3]. Якщо $m \geq 2$, то таким задачам присвячені праці [2], [4], [5]. Відповідні варіаційні нерівності вивчено в [1], [6]-[8]. Останнім часом згадані задачі почали розглядати для p та q, які є функціями незалежних змінних (див., наприклад, [9]). Наша мета – розглянути варіаційну нерівність для рівняння типу (1.1) з $m = 2$, $c = 0$, $q = q(x)$, яка виникає в теорії пластин і довести теорему єдиності її розв'язку.

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область з межею $\partial\Omega \subset C^1$, $Q_{t_1,t_2} = \Omega \times (t_1, t_2)$, $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$. Розглянемо варіаційну нерівність

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[u_{tt}(v - u_t) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leq 2} a_{\alpha\beta} D^\alpha u (D^\beta v - D^\beta u_t) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leq 1} b_{\alpha\beta} D^\alpha u_t (D^\beta v - D^\beta u_t) +$$

$$+ g|u_t|^{q(x)-2} u_t (v - u_t) \Big]\, dxdt + \int\limits_0^\tau \varphi(v(t))\, dt - \int\limits_0^\tau \varphi(u_t(t))\, dt \geq \int\limits_{Q_{0,\tau}} f(v - u_t)\, dxdt, \tag{1.2}$$

де $\tau \in (0, T]$, v – пробна функція; φ – деякий функціонал з початковими умовами

$$u|_{t=0} = u_0, \qquad u_t|_{t=0} = u_1. \tag{1.3}$$

У другій частині статті розглянуто одну задачу з теорії пластин для рівняння вигляду (1.1) з $q = q(x)$. Показано, що її узагальнений розв'язок задовольняє варіаційну нерівність типу (1.2). Третя частина статті присвячена знаходженню умов єдиності розв'язку (1.2). Для спрощення розглянуто лише випадок однієї просторової змінної.

Якщо $\varphi \equiv 0$, $q \equiv 2$, то при деяких додаткових обмеженнях існування та єдиність розв'язку (1.2) доведено в [8].

2. Про одну модель з теорії пластин. Розглянемо одну задачу з теорії пластин (див [1, с. 191-201]). Пластину ототожнимо з множиною точок

$$\Pi = \Big\{ x \ \Big| \ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \ \ (x_1, x_2) \in \Omega, \ \ -\frac{h}{2} < x_3 < \frac{h}{2} \Big\},$$

де $h > 0$ – товщина пластини; $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – обмежена область з межею $\partial\Omega \subset C^1$. Нехай $u(x_1, x_2, t)$ – це вертикальне відхилення серединної поверхні пластини від горизонтальної площини в момент часу t.

Припустимо, що:

- товщина пластини $h > 0$ мала;
- матеріал, з якого зроблена пластина, ізотропний і задовольняє закон Гука, тобто (див [1, с. 194])

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu}\Big[\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\,\varepsilon_{\kappa\kappa}\delta_{ij}\Big], \tag{2.1}$$

  де ν – коефіцієнт Пуассона; E – модуль Юнга; σ_{ij} – елементи тензора напружень в Π; ε_{ij} – елементи тензора деформацій в Π.
- сили, що діють на пластину нормальні і мають об'ємну густину $(0, 0, g_3)$.

Аналогічно як в [1, с. 192] введемо усереднені силу G_3, тензори напружень Σ_{ij} і моментів M_{ij} за формулами

$$G_3 = \int\limits_{-h/2}^{h/2} g_3\,dx_3, \qquad \Sigma_{ij} = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij}\,dx_3, \qquad M_{ij} = \int\limits_{-h/2}^{h/2} x_3 \sum_{k=1}^{3} \sigma_{i3k}\sigma_{kj}\,dx_3.$$

За певних додаткових обмежень (див. [1, с. 195, 196]) матимемо, що

$$\Sigma_{ij} = O(h^3), \quad i = 1,2,3, \quad j = 1,2,$$

$$\begin{aligned}
M_{11} &= \frac{E}{1+\nu}\frac{h^3}{12}u_{x_1x_2} + O(h^4),\\
M_{22} &= -\frac{E}{1+\nu}\frac{h^3}{12}u_{x_1x_2} + O(h^4),\\
M_{12} &= \frac{E}{1-\nu^2}\frac{h^3}{12}(\nu u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}) + O(h^4),\\
M_{21} &= -\frac{E}{1-\nu^2}\frac{h^3}{12}(u_{x_1x_1} + \nu u_{x_2x_2}) + O(h^4).
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Якщо $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – модуль жорсткості пластини на згин, то для знаходження функції u (див [1, с. 196, 200]) отримаємо рівняння

$$I + D\,\Delta^2 u = G_3, \tag{2.3}$$

де I – сила інерції. Нехай ρ – поверхнева густина пластини в недеформованому стані. Тоді $I = \rho\, h\, u_{tt}$. Припустимо, що зовнішня сила G_3 містить складову, залежну від швидкості руху пластини u_t, а саме, що G_3 має такий вигляд:

$$G_3(x_1, x_2, t) = f(x_1, x_2, t) - g(x_1, x_2, t)|u_t(x_1, x_2, t)|^{\alpha(x_1,x_2)} u_t(x_1, x_2, t), \tag{2.4}$$

де f, g, α – відомі функції. В цьому випадку рівняння (2.3) набуде вигляду

$$\rho\, h\, u_{tt} + D\Delta^2 u + g|u_t|^{\alpha(x_1,x_2)} u_t = f. \tag{2.5}$$

Доповнимо його крайовими умовами

$$\Delta u|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0, \tag{2.6}$$

$$\left.\frac{\partial(D\,\Delta u)}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega\times(0,T)} = \Phi(u) \tag{2.7}$$

та початковими умовами (1.3). Тут Φ – неперервна неспадна функція, $u_0, u_1 \in L^2(\Omega)$.

Покажемо, що узагальнений розв'язок цієї задачі задовольняє певну інтегральну варіаційну нерівність. Припустимо для спрощення, що $\rho h = 1$ та що подальші перетворення законні. Нехай ν – орт зовнішньої нормалі до $\partial\Omega$,

$$\langle A\, z, v\rangle = \int\limits_{\Omega} [D\,\Delta z(x)\,\Delta v(x) + g|z_t|^{\alpha(x_1,x_2)} z_t v]\, dx,$$

u – розв'язок задачі (2.5)-(2.7), (1.3). Домножимо (2.5) на $\omega = \omega(x)$ і проінтегруємо по Ω. Одержимо рівність

$$\int\limits_{\Omega} u_{tt}(t)\omega\, dx + \int\limits_{\Omega} [D\,\Delta^2 u(t) + g(t)|u_t(t)|^{\alpha(x_1,x_2)} u_t(t)]\omega\, dx = \int\limits_{\Omega} f(t)\omega\, dx. \tag{2.8}$$

Скористаємося другою формулою Гріна

$$\int\limits_{\Omega} \Delta^2 u\,\omega\, dx = \int\limits_{\partial\Omega} \Big(\frac{\partial\Delta u}{\partial\nu}\omega - \Delta u\frac{\partial\omega}{\partial\nu}\Big)\, dS_x + \int\limits_{\Omega} \Delta u\,\Delta\omega\, dx.$$

Використавши умови (2.6), (2.7), з (2.8) після інтегрування за $t \in (0,\tau) \subset (0,T)$ отримаємо, що

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} u_{tt}\omega\, dxdt + \int\limits_0^{\tau} \langle Au, \omega\rangle\, dt + \int\limits_0^{\tau} dt \int\limits_{\partial\Omega} \Phi(u)\omega\, dS_x = \int\limits_{Q_{0,\tau}} f\omega\, dxdt. \tag{2.9}$$

Оскільки $\Phi(\lambda)$ є монотонно зростаючою функцією, то $\varphi(\lambda) = \int \Phi(\lambda)\, d\lambda$ – опукла функція. Тому $\varphi(\mu) - \varphi(\lambda) - \Phi(\lambda)(\mu - \lambda) \geq 0$. Якщо

$$\psi(z) = \int\limits_{\partial\Omega} \varphi(z(x))\, dS_x, \tag{2.10}$$

то

$$\psi(v) - \psi(u) - \int\limits_{\partial\Omega} \Phi(u)(v-u)\, dS_x = \int\limits_{\partial\Omega} [\varphi(v) - \varphi(u) - \Phi(u)(v-u)]\, dS_x \geq 0.$$

Додамо до обох частин (2.9) вираз $\int_0^\tau [\psi(v) - \psi(u)]\ dt$, де $v = v(x,t)$ – довільна функція, візьмемо $\omega = v - u$

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} u_{tt}(t)(v-u(t))\ dxdt + \int\limits_0^\tau \langle Au, v-u\rangle\ dt + \int\limits_0^\tau \psi(v)\ dt - \int\limits_0^\tau \psi(u)\ dt = \int\limits_{Q_{0,\tau}} f(v-u)\ dxdt +$$

$$+ \int\limits_0^\tau \Big[\psi(v) - \psi(u) - \int\limits_{\partial\Omega} \Phi(u)(v-u)\ dS_x\Big]\ dt \ge \int\limits_{Q_{0,\tau}} f(v-u)\ dxdt. \tag{2.11}$$

Отож, розв'язок задачі (2.5)-(2.7), (1.3) задовольняє еволюційну варіаційну нерівність типу (1.2) і відомо, що узагальненим розв'язком задачі (2.5)-(2.7), (1.3) можна вважати функцію u, яка задовольняє (2.11) для всіх $\tau \in (0,T]$ та для всіх пробних функцій v.

3. Варіаційна нерівність четвертого порядку. Перейдемо до чіткого формулювання та доведення основного результату нашої статті. Нехай для спрощення $\Omega = (0,1)$, $Q_{t_1,t_2} = \Omega \times (t_1,t_2)$, $0 \le t_1 < t_2 \le T$.

Узагальнені простори Лебега були введені в [10] і досліджували, зокрема в [11]. Нехай $L^\infty_+(\Omega) = \{v \in L^\infty(\Omega) \mid \operatorname{ess\,inf}\limits_{x\in\Omega} v(x) > 1\}$, $q \in L^\infty_+(\Omega)$. Визначимо функціонал $\rho_q(\cdot,\Omega)$ рівністю $\rho_q(v,\Omega) = \int_\Omega |v(x)|^{q(x)}dx$, де v – деяка функція. Узагальненим простором Лебега $L^{q(x)}(\Omega)$ називатимемо множину таких вимірних функцій $v : \Omega \to \mathbb{R}^1$, для яких $\rho_q(v,\Omega) < +\infty$. Відомо, що функціонал ρ_q є слабко напівнеперервним знизу на $L^{q(x)}(\Omega)$ (див. [10, с. 208]). Крім того, $L^{q(x)}(\Omega)$ є рефлексивним банаховим простором з нормою

$$||v; L^{q(x)}(\Omega)|| = \inf\{\lambda > 0\ :\ \rho_q(v/\lambda,\Omega) \le 1\}.$$

Зауважимо таке: якщо $r(x) \ge q(x)$, то $L^{r(x)}(\Omega) \subset L^{q(x)}(\Omega)$. Аналогічно до $L^{q(x)}(\Omega)$ визначимо простір $L^{q(x)}(Q_{0,T})$, ввівши замість $\rho_q(\cdot,\Omega)$ функціонал $\rho_q(\cdot,Q_{0,T})$.

Нехай V – замкнений підпростір, $H^2_0(\Omega) \subset V \subset H^2(\Omega)$. Припустимо, що виконуються умови:

(A): $a, a_t \in L^\infty(Q_{0,T})$, $0 < a_0 \le a(x,t) < a^0$,
$|a_t(x,t)| \le a^1$ майже для всіх $(x,t) \in Q_{0,T}$;
(B): $b \in L^\infty(Q_{0,T})$, $b(x,t) \ge b_0 \ge 0$ майже для всіх $(x,t) \in Q_{0,T}$;
(C): $c, c_t \in L^\infty(Q_{0,T})$, $0 < c_0 \le c(x,t) < c^0$,
$|c_t(x,t)| \le c^1$ майже для всіх $(x,t) \in Q_{0,T}$;
(H): $h \in L^\infty(Q_{0,T})$, $|h(x,t)| \le h^0$ майже для всіх $(x,t) \in Q_{0,T}$;
(G): $g \in L^\infty(Q_{0,T})$, $0 < g_0 \le g(x,t) \le g^0$ майже для всіх $(x,t) \in Q_{0,T}$;
(Φ): $\varphi : V \to (-\infty, +\infty]$ – опукла функція, $\varphi \not\equiv +\infty$;
(F): $f \in L^2(Q_{0,T})$;
(U): $u_0 \in H^2(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$.

Означення 1. *Функція $u : Q_{0,T} \to \mathbb{R}^1$ називається розв'язком задачі*

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} [u_{tt}(v-u_t) + a(x,t)u_{xx}(v_{xx} - u_{xxt}) + b(x,t)u_{xt}(v_x - u_{xt}) + c(x,t)u(v-u_t) +$$

$$+ h(x,t)u_t(v-u_t) + g(x,t)|u_t|^{q(x)-2}u_t(v-u_t)]\ dxdt +$$

$$+\int_0^\tau \varphi(v(t))\,dt - \int_0^\tau \varphi(u_t(t))\,dt \geq \int_{Q_{0,\tau}} f(x,t)(v-u_t)\,dxdt, \tag{3.1}$$

$$u(0)=u_0, \qquad u_t(0)=u_1, \tag{3.2}$$

якщо $u \in L^2(0,T;V)$, $u_t \in L^2(0,T;V) \cap L^{q(x)}(Q_{0,T})$, $u_{tt} \in L^2(Q_{0,T})$ і u задовольняє початкові умови (3.2) та еволюційну варіаційну нерівність (3.1) для всіх $\tau \in (0,T]$ та для всіх $v \in L^2(0,T;V)$.

Головний результат нашої статті – така теорема.

Теорема 1. *Якщо виконуються умови **(A)-(U)**, то задача (3.1), (3.2) не може мати більше одного розв'язку.*

Доведення. Нехай u^1 та u^2 – розв'язки задачі (3.1), (3.2), $\tau \in (0,T]$. В нерівності (3.1), записаній для u^1, приймемо $v=u_t^2$. В нерівності (3.1), записаній для u^2, приймемо $v=u_t^1$. Додавши отримані нерівності, одержимо

$$\begin{aligned}\int_{Q_{0,\tau}} [u_{tt}^1(u_t^2-u_t^1) + u_{tt}^2(u_t^1-u_t^2) + au_{xx}^1(u_{xxt}^2-u_{xxt}^1) + au_{xx}^2(u_{xxt}^1-u_{xxt}^2) + \\ + bu_{xt}^1(u_{xt}^2-u_{xt}^1) + bu_{xt}^2(u_{xt}^1-u_{xt}^2) + hu_t^1(u_t^2-u_t^1) + hu_t^2(u_t^1-u_t^2) + \\ + g|u_t^1|^{q(x)-2}u_t^1(u_t^2-u_t^1) + g|u_t^2|^{q(x)-2}u_t^2(u_t^1-u_t^2) + \\ + cu^1(u_t^2-u_t^1) + cu^2(u_t^1-u_t^2)]\,dxdt \geq 0,\end{aligned} \tag{3.3}$$

бо доданки з f та φ скоротяться. Перепишемо цю нерівність у вигляді

$$\begin{aligned}\int_{Q_{0,\tau}} \Big[(u_{tt}^2-u_{tt}^1)(u_t^2-u_t^1) + a(u_{xx}^2-u_{xx}^1)(u_{xxt}^2-u_{xxt}^1) + \\ + b|u_{xt}^2-u_{xt}^1|^2 + c(u^2-u^1)(u_t^2-u_t^1) + \\ + g(|u_t^1|^{q(x)-2}u_t^1 - |u_t^2|^{q(x)-2}u_t^2)(u_t^2-u_t^1)\Big]\,dxdt \leq -\int_{Q_{0,\tau}} h|u_t^1-u_t^2|^2\,dxdt.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Зінтегрувавши частинами та врахувавши початкові умови (3.2), отримаємо

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_\Omega \Big[|u_t^2(\tau)-u_t^1(\tau)|^2 + a(\tau)|u_{xx}^2(\tau)-u_{xx}^1(\tau)|^2 + c(\tau)|u^2(\tau)-u^1(\tau)|^2\Big]\,dx + \\ + \int_{Q_{0,\tau}} b|u_{xt}^2-u_{xt}^1|^2 dxdt \leq \frac{1}{2}\int_{Q_{0,\tau}} \Big[a_t|u_{xx}^2-u_{xx}^1|^2 + c_t|u^2-u^1|^2 - h|u_t^1-u_t^2|^2\Big]\,dxdt.\end{aligned}$$

Використавши умови теореми, одержимо нерівність

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Big[|u_t^2(\tau)-u_t^1(\tau)|^2 + a_0|u_{xx}^2(\tau)-u_{xx}^1(\tau)|^2 + c_0|u^2(\tau)-u^1(\tau)|^2\Big]\,dx \leq \\ \leq \int_{Q_{0,\tau}} \Big[a^1|u_{xx}^2-u_{xx}^1|^2 + c^1|u^2-u^1|^2 + 2h^0|u_t^1-u_t^2|^2\Big]\,dxdt.\end{aligned} \tag{3.5}$$

Позначимо

$$w(\tau) = \int\limits_{\Omega} \Big[|u_t^2(\tau) - u_t^1(\tau)|^2 + |u_{xx}^2(\tau) - u_{xx}^1(\tau)|^2 + |u^2(\tau) - u^1(\tau)|^2 \Big]\, dx, \quad \tau \in (0, T].$$

Тоді з (3.5) отримаємо, що $w(\tau) \le C_1 \int_0^\tau w(t)\, dt$ для всіх $\tau \in (0, T]$, де стала $C_1 > 0$ не залежить від w. Тому з леми Гроноулла-Белмана [12] маємо, що $w = 0$. Отже, $u^1 = u^2$ і теорему доведено. □

4. Висновки. В статті розглянуто математичну модель процесу коливання плоскої пластини. Показано, що узагальнений розв'язок мішаної задачі, яка у цьому разі виникає, задовольняє певну еволюційну варіаційну нерівність четвертого порядку. Для нерівності такого типу отримано умови єдиності її розв'язку.

1. *Дюво Г.* Неравенства в механике и физике / *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* – Москва, 1980.
2. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейних краевых задач. / *Лионс Ж.-Л.* – М.: Мир, 1972.
3. *Lions J.-L.* Some non-linear evolution equations / *Lions J.-L., Strauss W.A.* // Bulletin de la S. M. F. – 1965. – Tome 93. – P. 43-96.
4. *Лавренюк С.П.* Існування і єдиність розв'язку нелінійного рівняння коливання пластини / *Лавренюк С.П.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1981. – Вип. 18. – С. 6-11.
5. *Лавренюк С.П.* Необмеженість розв'язків у скінченний момент часу одного слабко нелінійного рівняння четвертого порядку / *Лавренюк С.П., Торган Г.Р.* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – Т. 50, №3. – С. 88-93.
6. *Brezis H.* Problemes unilateraux / *Brezis H.* // J. Math. pures et appl. – 1972. – Vol. 51. – P. 1-168.
7. *Lavrenyuk S.* Variational hyperbolic inequality in the domains unbounded in spatial variables / *Lavrenyuk S., Pukach P.* // International J. of Evolution Equations. – 2007. – Vol. 3, №1. – P. 103-122.
8. *Бугрій О.М.* Параболічна варіаційна нерівність вищого порядку в обмеженій області / *Бугрій О.М.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2001. – Вип. 59. – С. 102-115.
9. *Lavrenyuk S.* The mixed problem for a semilinear hyperbolic equation in generalized Lebesgue spaces / *Lavrenyuk S., Panat O.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2006. – Вип. 66. – С. 243-260.
10. *Orlicz W.* Uber konjugierte Exponentenfolgen / *Orlicz W.* // Studia Mathematica (Lwow). – Vol. 3. – 1931. – P. 200-211.
11. *Buhrii O.M.* Uniqueness of solutions of the parabolic variational inequality with variable exponent of nonlinearity / *Buhrii O.M., Mashiyev R.A.* // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Appl. – 2009. – Vol. 70, № 6. – P. 2335-2331.
12. *Гаевский Х.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* – М., 1978.

ABOUT UNIQUENESS OF SOLUTION TO SOME EVOLUTIONAL HIGH ORDER VARIATIONAL INEQUALITY OF THE PLATE THEORY

Pavlo ZAHORBENS'KYI, Mykola BUHRII, Oleh BUHRII

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: ol_buhrii@i.ua

We consider semilinear evolutional high order variational inequality. This inequality describe some oscillation process of the plate theory. The condition of uniqueness of solution to inequality are find.

Key words: plate theory, high order variational inequality, uniqueness of solution.

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОГО ЭВОЛЮЦИОННОГО ВАРИАЦИОННОГО НЕРАВЕНСТВА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ИЗ ТЕОРИИ ПЛАСТИН

Павел ЗАГОРБЕНСКИЙ, Николай БУГРИЙ, Олег БУГРИЙ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000, Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: ol_buhrii@i.ua

Рассмотрено одно полулинейное вариационное неравенство высокого порядка. Показано, что оно моделирует колебательные процессы в теории пластин. Найдены условия единственности решения этого неравенства.

Ключевые слова: теория пластин, вариационное неравенство высокого порядка, единственность решения.

Стаття надійшла до редколегії 20.11.2009

Прийнята до друку 16.12.2009