ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2009.
Вип. 71. С. 102–105

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech. Math. 2009.
Is. 71. P. 102–105

УДК 512.552.12

РЕГУЛЯРНІ КІЛЬЦЯ З ІДЕМПОТЕНТНОЮ ДІАГОНАЛЬНОЮ РЕДУКЦІЄЮ МАТРИЦЬ

Богдан ЗАБАВСЬКИЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: b_ zabava@franko.lviv.ua

Показано, що в класі регулярних кілець, кільцем з ідемпотентною діагональною редукцією матриць є лише одинично регулярне кільце.

Ключові слова: регулярне кільце, редукція матриць.

Нехай R – асоціативне кільце з $1 \neq 0$. Скажемо, що R є кільцем з ідемпотентною діагональною редукцією, якщо для довільної квадратної матриці A над R існують зворотні матриці P, Q такі, що $PAQ = E$ – діагональна матриця, причому $E^2 = E$ [1]. Очевидним прикладом такого кільця є довільне тіло. Комутативне регулярне кільце є також таким [2]. В наш час активно проводять дослідження про зведення регулярних матриць (тобто квадратна матриця A називається регулярною, якщо існує така матриця X, що $AXA = A$) до ідемпотентної діагональної матриці [1, 3-6].

У цій праці показано, що в класі регулярних кілець, кільцем з ідемпотентною діагональною редукцією матриць є лише одинично регулярне кільце.

Нагадаємо, що кільце R називається одинично регулярним, якщо для довільного $a \in R$ існує зворотний елемент $u \in R$, такий що $aua = a$ [7].

Теорема 1. *В класі регулярних кілець одинично регулярне кільце є кільцем з ідемпотентною діагональною редукцією матриць і тільки воно є таким.*

Доведення. Нехай R – одинично регулярне кільце. Тоді згідно з [8] для довільної квадратної матриці A над R існують такі зворотні матриці відповідного розміру

P, Q, що

$$PAQ = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D.$$

Оскільки в одинично регулярному кільці для довільного елемента $a \in R$ існує ідемпотент e і зворотний елемент u такі, що $au = e$ [8]. Тоді нехай $d_i u_i = e_i$, $i = 1, 2, \dots, r$, де u_i – зворотний і $e_i^2 = e$ – ідемпотенти.

Нехай

$$D = \begin{pmatrix} e_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} U,$$

де

$$U = \begin{pmatrix} u_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ – зворотна матриця.}$$

Звідси

$$PAQU = \begin{pmatrix} e_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E,$$

причому $E^2 = E$, тобто ми довели, що одинично регулярне кільце є кільцем з ідемпотентною діагональною редукцією матриць.

Навпаки, нехай R – регулярне кільце, яке є ідемпотентно діагоналізованим, тобто для довільної квадратної матриці A над R існують зворотні матриці P і Q відповідних розмірів такі, що $PAQ = E$ – діагональна матриця, причому $E^2 = E$. Тоді $A = P^{-1}EQ^{-1}$, звідси

$$AQPA = P^{-1}EQ^{-1}QPP^{-1}EQ^{-1} = P^{-1}E^2Q^{-1} = P^{-1}EQ^{-1} = A.$$

Оскільки елемент A довільний, то ми бачимо, що кільце квадратних матриць довільного порядку $n > 1$ одинично регулярний. Це можливо лише тоді, коли R – одинично регулярне кільце. Справді, одинично регулярне кільце можна означити як регулярне кільце стабільного рангу 1 (тобто, якщо $aR+bR=R$, де $a,b\in R$, тоді існують елементи $x\in R$ і зворотний елемент u, такі що $a+bx=u$) [7]. Оскільки кільце матриць над кільцем стабільного рангу 1 є лише кільцем стабільного рангу 1 [9], а кільце матриць $M_n(R)$ є регулярне тоді і лише тоді, коли R – регулярне [7]. тоді, насправді, кільце R є одинично регулярним.

Теорему доведено. □

1. *Головачева Т.В.* О диагонализируемости регулярных матриц над кольцами / *Головачева Т.В.* // Фундаментальная и прикладная математика. – 1996. – Т. 2, №1. – С. 103-111.
2. *Gilman L, Henriksen M.* Some remarks about elementary divisor rings / *Gilman L, Henriksen M.* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1956. – Vol. 82. – P. 362-365.
3. *Ara P.* Diagonalization of matrices over regular rings / *Ara P., Goodearl K., O'Meara K.C., Pardo E.* // Linear Algebra and Appl. – 1987. – Vol. 256. – P. 147-163.
4. *Puystjens R.* On the diagonalization of von Neumann regular matrices / *Puystjens R., van Gell J.* // Acta Uniu. Coral. Math. Phy. – 1985. – Vol. 26, №2. – P. 51-56.
5. *Steger A.* Diagonability of idempotente matrices / *Steger A.* // Pacific J. Math. – 1966. – Vol. 19, №3. – P. 535-542.
6. *Huylebrouck D.* Diagonal and von Neumann regular matrices over a Dedeking domain / *Huylebrouck D.* // Portucal. Math. – 1994. – Vol. 51, №2. – P. 291-303.
7. *Goodeare K.R.* Von Neumann regular rings / *Goodeare K.R.* – Pitman, London-San, Francisco-Mellaume, 1979.
8. *Henriksen M.* On a class of regular rings that are elementary divisor rings / *Henriksen M.* // Arch. Mat. – 1973. – Vol. 24, №2. – P. 133-141.
9. *Vaserstein L.N.* Bass's first stable range condition / *Vaserstein L. N.* // J. Pure and Appl. Alg. – 1984. – Vol. 34. – P. 319-330.

REGULAR RINGS WITH AN IDEMPOTENT DIAGONAL REDUCTION OF MATRICES

Bogdan ZABAVSKY

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: b_zabava@franko.lviv.ua

It was shown, that only unit regular ring is a ring with an idempotent diagonal reduction in the class of regular ring.

Key words: regular ring, reduction of matrices.

РЕГУЛЯРНЫЕ КОЛЬЦА С ИДЕМПОТЕНТНОЙ ДИАГОНАЛЬНОЙ РЕДУКЦИЕЙ МАТРИЦ

Богдан ЗАБАВСКИЙ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000, Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: b_zabava@franko.lviv.ua

Доказано, что в классе регулярных колец, кольцом с идемпотентной диагональной редукцией матриц является только единично регулярное кольцо.

Ключевые слова: регулярное кольцо, редукция матриц.

Стаття надійшла до редколегії 10.02.2009

Прийнята до друку 16.12.2009