ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2009.
Вип. 71. С. 92–101

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech. Math. 2009.
Is. 71. P. 92–101

УДК 519.21

ОПТИМІЗАЦІЯ РЕЖИМІВ ОБСЛУГОВУВАННЯ ДЛЯ СИСТЕМ M/M/1/m ТА M/M/1 З БЛОКУВАННЯМ ВХІДНОГО ПОТОКУ

Костянтин ЖЕРНОВИЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська 1,
e-mail: k_zhernovyi@yahoo.com

Вивчено системи обслуговування M/M/1/m і M/M/1, в яких відбувається перехід на "швидке" обслуговування і одночасне блокування вхідного потоку за умови перевищення кількості замовлень у системі деякого порогового рівня l. Визначено стаціонарні характеристики систем і розв'язано задачі оптимального вибору: 1) інтенсивності "швидкого" обслуговування; 2) порога перемикання на "швидке" обслуговування; 3) порога перемикання на режим блокування вхідного потоку; 4) інтенсивності обслуговування без переходу на "швидке" обслуговування.

Ключові слова: системи M/M/1/m і M/M/1, блокування вхідного потоку, оптимізація режимів обслуговування.

1. Вступ. Адекватною математичною моделлю процесів, які відбуваються в багатьох фрагментах і вузлах сучасних комп'ютерних мереж і мереж зв'язку, є системи обслуговування з керованим режимом функціонування [1; 2, § 2.6, 2.7]. Для таких систем, крім питання визначення стаціонарних характеристик, розглядають, зокрема, задачу оптимального вибору режимів обслуговування, пов'язану з мінімізацією деякого економічного функціонала якості функціонування системи (див. статтю [3] і огляд [1]). Задачі керування вхідним потоком замовлень вивчало багато авторів переважно у зв'язку з вибором пріоритетів в обслуговуванні [1, розд. 2, § 2.3].

Якщо система обслуговування може працювати в кількох режимах з різними інтенсивностями обслуговування, то задачі визначення її стаціонарних характеристик і оптимального вибору режимів обслуговування значно ускладнюються порівняно з такими задачами для класичних систем M/M/1/m і M/M/1. Застосування режиму блокування вхідного потоку дещо спрощує систему рівнянь для стаціонарних імовірностей станів системи і в деяких випадках дає підстави знаходити її розв'язки в явному вигляді.

Нижче ми розглянемо задачі оптимального керування системами обслуговування, в яких перехід до "швидкого" обслуговування відбувається одночасно з блокуванням вхідного потоку.

2. Стаціонарні характеристики системи з обмеженою чергою. Розглянемо одноканальну систему обслуговування, для якої довжина черги не може перевищувати числа m. Замовлення в систему надходять по одному, а проміжки часу між моментами надходження замовлень – незалежні випадкові величини, розподілені за показниковим законом з параметром λ.

Обслуговування замовлень може відбуватись у двох режимах. Час обслуговування в кожному з них розподілений за показниковим законом з параметрами μ_1 і μ_2 відповідно. Припускаємо, що $\mu_1 < \mu_2$, тобто перший режим "повільний", а другий "швидкий". "Швидке" обслуговування відбувається за умови, що в момент початку обслуговування чергового замовлення кількість замовлень у системі перевищує число l ($l = \overline{1, m-1}$). Під час роботи системи у "швидкому" режимі відбувається блокування вхідного потоку замовлень, тобто жодне замовлення не допускається в чергу.

Введемо нумерацію станів системи: s_0 – система вільна; s_k $(k = \overline{1, m+1}\,)$ – в системі є k замовлень, використовується режим "повільного" обслуговування; x_k $(k = \overline{l+1,\, m}\,)$ – в системі є k замовлень, обслуговування відбувається в "швидкому" режимі, вхідний потік заблокований.

Нехай $p_k(t)$ $(q_k(t))$ – імовірність того, що система в момент часу t перебуває у стані s_k (x_k). Кількість станів системи скінченна, процес зміни станів транзитивний марковський, тому існують границі

$$p_k = \lim_{t\to\infty} p_k(t), \qquad q_k = \lim_{t\to\infty} q_k(t).$$

Користуючись графом станів системи, запишемо рівняння для визначення стаціонарних імовірностей p_k і q_k

$$\begin{gathered}
\mu_1 p_1 - \lambda p_0 = 0; \quad \lambda p_{k-1} + \mu_1 p_{k+1} - (\lambda+\mu_1) p_k = 0 \quad \left(k = \overline{1,\ l-1}\right); \\
\lambda p_{l-1} + \mu_1 p_{l+1} + \mu_2 q_{l+1} - (\lambda+\mu_1) p_l = 0; \\
\lambda p_{k-1} - (\lambda+\mu_1) p_k = 0 \quad \left(k = \overline{l+1,\ m}\right); \quad \lambda p_m - \mu_1 p_{m+1} = 0; \\
\mu_2 q_{k+1} + \mu_1 p_{k+1} - \mu_2 q_k = 0 \quad \left(k = \overline{l+1,\ m-1}\right); \quad \mu_1 p_{m+1} - \mu_2 q_m = 0; \\
\sum_{k=0}^{m+1} p_k + \sum_{k=l+1}^{m} q_k = 1.
\end{gathered} \tag{1}$$

Введемо позначення: $\beta = 1/\rho$, $\gamma = \mu_1/\mu_2$, де $\rho = \lambda/\mu_1$ – коефіцієнт завантаження системи у режимі "повільного" обслуговування. Якщо $\beta \neq 1$, то розв'язок системи (1) набуває вигляду

$$\begin{gathered}
p_k = \beta^{l+1-k}(1+\beta)^{m-l} p_{m+1} \qquad \left(k = \overline{0,\ l-1}\right); \\
p_k = \beta(1+\beta)^{m-k} p_{m+1} \qquad \left(k = \overline{l,\ m}\right);
\end{gathered}$$

$$q_k = \gamma \sum_{s=k+1}^{m+1} p_s = \gamma(1+\beta)^{m-k} p_{m+1} \qquad \left(k = \overline{l+1,\ m}\right); \tag{2}$$

$$p_{m+1} = \frac{\beta(\beta-1)}{\left(\beta(\beta^{l+2}-1)+\gamma(\beta-1)\right)(1+\beta)^{m-l}-\gamma(\beta-1)}.$$

Використовуючи розподіл станів (2), можемо знайти ергодичний розподіл довжини черги у системі. Позначимо через π_k стаціонарну ймовірність того, що довжина черги дорівнює k ($k = \overline{0, m}$). Тоді

$$\begin{gathered}\pi_0 = p_0 + p_1 = \beta^l (1+\beta)^{m-l+1} p_{m+1}; \qquad \pi_m = p_{m+1};\\ \pi_k = p_{k+1} = \beta^{l-k}(1+\beta)^{m-l} p_{m+1} \qquad \left(k = \overline{1,\ l-1}\right);\\ \pi_k = p_{k+1} + q_{k+1} = (\beta+\gamma)(1+\beta)^{m-k-1} p_{m+1} \qquad \left(k = \overline{l,\ m-1}\right).\end{gathered} \tag{3}$$

Середню довжину черги визначимо як математичне сподівання дискретної випадкової величини

$$\begin{aligned}\overline{r} = \sum_{k=1}^{m} k\pi_k = \frac{p_{m+1}}{\beta^2(\beta-1)^2}\big\{&\beta(\beta^{l+2} - l\beta^2 + l\beta - 2\beta + 1)(1+\beta)^{m-l} -\\ &-\beta(\beta-1)^2 + \gamma(\beta-1)^2\left((l\beta+1)(1+\beta)^{m-l} - m\beta - 1\right)\big\}.\end{aligned}$$

Стаціонарне значення ймовірності обслуговування замовлення, що надійшло на вхід системи, (відносну пропускну здатність системи) обчислимо як суму ймовірностей тих станів, в яких вхідний потік не заблокований,

$$P_{\text{обс}} = \sum_{k=0}^{m} p_k = \frac{\beta\left((\beta^{l+2}-1)(1+\beta)^{m-l} - \beta + 1\right)}{\left(\beta(\beta^{l+2}-1)+\gamma(\beta-1)\right)(1+\beta)^{m-l}-\gamma(\beta-1)}. \tag{4}$$

Середній час перебування замовлення в черзі визначимо за формулою Літтла, яка для системи з втратами замовлень набуває вигляду

$$\overline{t}_r = \frac{\overline{r}}{\lambda P_{\text{обс}}}. \tag{5}$$

Окремо випишемо формули для стаціонарних характеристик системи у випадку, коли $\beta = 1$,

$$\begin{gathered}p_k = 2^{m-l} p_{m+1} \quad \left(k = \overline{0,\ l-1}\right); \quad p_k = 2^{m-k} p_{m+1} \quad \left(k = \overline{l,\ m}\right);\\ q_k = \gamma 2^{m-k} p_{m+1} \quad \left(k = \overline{l+1,\ m}\right);\\ p_{m+1} = \frac{1}{(l+\gamma+2)2^{m-l}-\gamma}; \qquad P_{\text{обс}} = \frac{(l+2)2^{m-l}-1}{(l+\gamma+2)2^{m-l}-\gamma};\\ \overline{t}_r = \frac{\left(l^2+l+2+2\gamma(l+1)\right)2^{m-l-1} - \gamma(m+1) - 1}{\lambda\left((l+2)2^{m-l}-1\right)}.\end{gathered} \tag{6}$$

3. Стаціонарні характеристики системи з необмеженою чергою. Перейшовши до границі при $m \to \infty$ у співвідношеннях (2)-(5), одержимо ергодичні розподіли $\{p_k, q_k\}$ і $\{\pi_k\}$ та формули для стаціонарних характеристик відповідної системи обслуговування без обмежень на довжину черги у випадку, коли $\beta \neq 1$,

$$p_k = \frac{\beta^{l+2-k}(\beta-1)}{\beta(\beta^{l+2}-1)+\gamma(\beta-1)} \qquad \left(k=\overline{0,\ l-1}\right);$$

$$p_k = \frac{\beta^2(\beta-1)}{\big(\beta(\beta^{l+2}-1)+\gamma(\beta-1)\big)(1+\beta)^{k-l}} \qquad (k=l,\,l+1,\ldots);$$

$$q_k = \gamma p_k/\beta \qquad (k=l+1,\,l+2,\ldots);$$

$$\pi_0 = p_0+p_1; \qquad \pi_k = p_{k+1} \quad \left(k=\overline{1,\ l-1}\right);$$

$$\pi_k = p_{k+1}+q_{k+1} \qquad (k=l,\,l+1,\ldots);$$

$$P_{\text{обс}} = \frac{\beta(\beta^{l+2}-1)}{\beta(\beta^{l+2}-1)+\gamma(\beta-1)};$$

$$\overline{t}_r = \frac{\beta\big(\beta^{l+2}-l\beta^2+(l-2)\beta+1\big)+\gamma(\beta-1)^2(l\beta+1)}{\lambda\beta^2(\beta-1)(\beta^{l+2}-1)}.$$

Аналогічно зі співвідношень (6) матимемо відповідні формули для випадку, коли $\beta = 1$,

$$p_k = \frac{1}{l+\gamma+2} \quad \left(k=\overline{0,\ l-1}\right); \quad p_k = \frac{1}{(l+\gamma+2)2^{k-l}} \quad (k=l,\,l+1,\ldots);$$

$$q_k = \gamma p_k \quad (k=l+1,\,l+2,\ldots); \qquad P_{\text{обс}} = \frac{l+2}{l+\gamma+2};$$

$$\overline{t}_r = \frac{l^2+l+2+2\gamma(l+1)}{2\lambda(l+2)}.$$

Зауважимо, що ергодичний процес для системи без обмежень на довжину черги існує для будь-яких значень β на відміну від класичної системи M/M/1, для якої він існує лише при $\beta > 1$.

4. Задача оптимального вибору інтенсивності “швидкого” обслуговування. Розглянемо економічний функціонал якості функціонування системи обслуговування у вигляді

$$I_\gamma = c_r\overline{t}_r + c_1P_1 + c_2P_2, \tag{7}$$

де c_r – штраф за одиницю часу перебування у черзі; P_i – середній відносний час використання i-го режиму; c_i – вартість одиниці часу використання i-го режиму, $i = 1,\,2$. Зафіксуємо інтенсивність “повільного” обслуговування μ_1, тоді можна вважати, що $c_1 = const$. Припустимо, що $c_2 = c_2(\gamma) = c_1/\gamma$, де $\gamma = \mu_1/\mu_2$, $0 < \gamma < 1$. Вважаючи заданими параметри β і l, вибиратимемо параметр γ так, щоб мінімізувати середній ризик I_γ.

Зрозуміло, що

$$P_1 = \sum_{k=1}^{m+1} p_k; \qquad P_2 = \sum_{k=l+1}^{m} q_k,$$

тому після підстановки виразів для $\overline{t}_r$, P_1 і P_2 у співвідношення (7) одержимо явну залежність функціонала I_γ від параметра γ. Задачу зведено до мінімізації функції $I_\gamma = I_\gamma(\gamma)$ на проміжку $0 < \gamma < 1$.

Достатні умови існування мінімуму функціонала (7) визначає теорема 1.

Теорема 1. *Якщо* $c_2 = c_1/\gamma$, *і*
1) для $m < \infty$, $\beta \neq 1$ *виконуються умови*

$$\frac{\big((l\beta+1)(1+\beta)^{m-l} - m\beta - 1\big)(\beta^{l+2}-1)^2(1+\beta)^{2(m-l)}}{\lambda\big((1+\beta)^{m-l}-1\big)\big((\beta^{l+2}-1)(1+\beta)^{m-l}-\beta+1\big)^2} < \frac{c_1}{c_r} < \\ < \frac{\big((l\beta+1)(1+\beta)^{m-l} - m\beta - 1\big)\big((\beta^{l+3}-1)(1+\beta)^{m-l}-\beta+1\big)^2}{\lambda\big((1+\beta)^{m-l}-1\big)\big((\beta^{l+2}-1)(1+\beta)^{m-l}-\beta+1\big)^2\beta^2}; \tag{8}$$

$$\gamma^* = \frac{\beta}{|\beta-1|\big((1+\beta)^{m-l}-1\big)}\left(\sqrt{\frac{c_1\lambda\big((1+\beta)^{m-l}-1\big)}{c_r\big((l\beta+1)(1+\beta)^{m-l}-m\beta-1\big)}}\times\right. \\ \left.\times|(\beta^{l+2}-1)(1+\beta)^{m-l}-\beta+1| - |\beta^{l+2}-1|(1+\beta)^{m-l}\right);$$

2) для $m < \infty$, $\beta = 1$ *виконуються умови*

$$\frac{(l+2)^2 2^{2(m-l)}\big((l+1)2^{m-l}-m-1\big)}{\lambda(2^{m-l}-1)\big((l+2)2^{m-l}-1\big)^2} < \frac{c_1}{c_r} < \\ < \frac{\big((l+3)2^{m-l}-1\big)^2\big((l+1)2^{m-l}-m-1\big)}{\lambda(2^{m-l}-1)\big((l+2)2^{m-l}-1\big)^2}; \tag{9}$$

$$\gamma^* = \big((l+2)2^{m-l}-1\big)\sqrt{\frac{c_1\lambda}{c_r(2^{m-l}-1)\big((l+1)2^{m-l}-m-1\big)}} - \frac{(l+2)2^{m-l}}{2^{m-l}-1};$$

3) для $m = \infty$, $\beta \neq 1$ *виконуються умови*

$$\frac{\beta l+1}{\lambda} < \frac{c_1}{c_r} < \frac{(\beta l+1)(\beta^{l+3}-1)^2}{\lambda\beta^2(\beta^{l+2}-1)^2}; \tag{10}$$

$$\gamma^* = \frac{\beta(\beta^{l+2}-1)}{\beta-1}\left(\sqrt{\frac{c_1\lambda}{c_r(\beta l+1)}}-1\right);$$

4) для $m = \infty$, $\beta = 1$ *виконуються умови*

$$\frac{l+1}{\lambda} < \frac{c_1}{c_r} < \frac{(l+1)(l+3)^2}{\lambda(l+2)^2}; \tag{11}$$

$$\gamma^* = (l+2)\left(\sqrt{\frac{c_1\lambda}{c_r(l+1)}}-1\right);$$

то мінімум функціонала I_γ *на множині* $\gamma \in (0;\,1)$ *існує і досягається для* $\gamma = \gamma^*$.

Доведення. Похідна функції $I_\gamma(\gamma)$ має вигляд

$$I'_\gamma(\gamma) = a_1\big(a_2(a_3+a_4\gamma)^2 - a_5\big),$$

де сталі a_i ($i = \overline{1,5}$) додатні. Виконання умов (8)-(11) (своїх для кожного випадку відповідно) забезпечує належність кореня γ^* рівняння $I'_\gamma(\gamma) = 0$ проміжку

$(0;\,1)$. Графіком функції $y = y(\gamma) = I'_\gamma(\gamma)$ є парабола, гілки якої спрямовані вгору, а вершина перебуває в точці з координатами $(\gamma_0,\, y_0)$, де $\gamma_0 = -a_3/a_4 < 0$, $y_0 = y(\gamma_0) = -a_1 a_5 < 0$. Оскільки $y(\gamma^*) = 0$ і $\gamma^* \in (0;\,1)$, то $y(\gamma^* - \varepsilon) < 0$, $y(\gamma^* + \varepsilon) > 0$ для як завгодно малого $\varepsilon > 0$, а це означає, що в точці $\gamma = \gamma^*$ функція $I_\gamma(\gamma)$ досягає мінімуму. Теорему доведено.

Зауваження 1. Якщо розглядати мінімум функціонала I_γ для всіх $\gamma > 0$, то теорема 1 залишається правильною за умови виконання лише перших частин подвійних нерівностей (8)-(11).

5. Задача оптимального вибору порога перемикання на "швидке" обслуговування. Зі збільшенням порога перемикання на "швидке" обслуговування l значення функціонала вигляду (7) зростає, тому задача його мінімізації за параметром l не має нетривіального розв'язку. Якість функціонування системи обслуговування з втратами замовлень залежить від імовірності втрати замовлення, тому враховуватимемо її у виразі для економічного функціонала.

Вважаючи заданими параметри $\beta > 0$, $\gamma \in (0;\,1)$, для системи без обмежень на довжину черги ($m = \infty$) вибиратимемо параметр l так, щоб мінімізувати середній ризик

$$I_l = c_r \bar{t}_r + c_{\text{в}} P_{\text{в}},$$

де c_r – штраф за одиницю часу перебування у черзі; $P_{\text{в}} = 1 - P_{\text{обс}}$ – імовірність втрати замовлення; $c_{\text{в}}$ – штраф за втрату одного замовлення.

Після підстановки виразів для $\bar{t}_r$ і $P_{\text{в}}$ у співвідношення для I_l матимемо задачу мінімізації функції $I_l = I_l(l)$ цілочисельної змінної $l \geq 1$. Цю задачу ми зможемо розв'язати, якщо мінімізуємо функцію $I_l(l)$ для всіх дійсних $l \geq 1$.

Теорема 2. *1) Якщо $\beta \neq 1$ і*

$$\frac{c_{\text{в}}}{c_r} \geq \frac{\big(\beta(\beta^2+\beta+1)+\gamma\big)^2 \big(\gamma(\beta-1)-\beta\big)(\beta^3 - 1 - \beta^2 \ln\beta)}{\lambda\gamma\beta^5(\beta-1)(\beta^2+\beta+1)^2 \ln\beta}, \tag{12}$$

то мінімум функціонала I_l на множині дійсних $l \geq 1$ існує і досягається для $l = l^*$, де l^* – єдиний на проміжку $[1;\,\infty)$ дійсний корінь рівняння

$$\frac{\big(\beta(\beta^{l+2}-1)+\gamma(\beta-1)\big)^2 \Big(\big(\gamma(\beta-1)-\beta\big)\big(\beta^{l+2} - 1 - (l\beta+1)\beta^{l+1}\ln\beta\big) + \beta^{l+2}\ln\beta\Big)}{\lambda\gamma\beta^{l+4}(\beta-1)(\beta^{l+2}-1)^2\ln\beta} = \\ = \frac{c_{\text{в}}}{c_r}\,; \tag{13}$$

2) якщо $\beta = 1$ і

$$\frac{c_{\text{в}}}{c_r} \geq \frac{(\gamma+3)^2(2\gamma+5)}{18\lambda\gamma}, \tag{14}$$

то мінімум функціонала I_l на множині дійсних $l \geq 1$ існує і досягається для $l = l^*$, де l^* – єдиний на проміжку $[1;\,\infty)$ дійсний корінь рівняння

$$\frac{(\gamma+l+2)^2(l^2+4l+2\gamma)}{2\lambda\gamma(l+2)^2} = \frac{c_{\text{в}}}{c_r}. \tag{15}$$

Доведення. Похідна функції $I_l(l)$ має вигляд

$$I_l'(l) = a(l)\big(c_r f_r(l) - c_в f_в(l)\big),$$

де $a(l) > 0$, $f_r(l) > 0$ і $f_в(l) > 0$ для всіх $l \geq 1$. Виявляється, що функція $F(l) = f_r(l)/f_в(l)$ монотонно зростає для всіх $l \geq 1$, тому на проміжку $[1; \infty)$ рівняння $I_l'(l) = 0$ має єдиний дійсний корінь $l = l^*$, якщо $c_в/c_r \geq F(1)$ (тобто виконуються умови (12) або (14) відповідно для $\beta \neq 1$ і $\beta = 1$).

Оскільки $F(l^*) = c_в/c_r$, то нерівність $I_l'(l^* - \varepsilon) < 0$ еквівалентна нерівності $F(l^*) > F(l^* - \varepsilon)$, а нерівність $I_l'(l^* + \varepsilon) > 0$ еквівалентна нерівності $F(l^*) < F(l^* + \varepsilon)$ для як завгодно малого $\varepsilon > 0$. Але функція $F(l)$ зростаюча, тому $I_l'(l^* - \varepsilon) < 0$ і $I_l'(l^* + \varepsilon) > 0$, тобто в точці $l = l^*$ функція $I_l(l)$ досягає мінімуму. Теорему доведено.

Зауваження 2. Щоб знайти відношення $c_в/c_r$, для якого досягається мінімум функціонала I_l при фіксованому цілому $l^* \geq 1$, достатньо це значення l^* підставити у ліву частину рівності (13) або (15) відповідно для $\beta \neq 1$ і $\beta = 1$.

Зауваження 3. Для великих значень l поведінка середнього часу перебування у черзі $\overline{t}_r$ і самого функціонала I_l сильно змінюється при переході значення β через одиницю. Безпосереднім обчисленням границь можна переконатися:
1) якщо $\beta \in (0; 1]$, то

$$\lim_{l\to\infty} \overline{t}_r(l) = +\infty; \qquad \lim_{l\to\infty} P_в(l) = \frac{\gamma(\beta - 1)}{\gamma(\beta - 1) - \beta}; \qquad \lim_{l\to\infty} I_l(l) = +\infty;$$

2) якщо $\beta > 1$, то

$$\lim_{l\to\infty} \overline{t}_r(l) = \frac{1}{\lambda\beta(\beta - 1)}; \qquad \lim_{l\to\infty} P_в(l) = 0; \qquad \lim_{l\to\infty} I_l(l) = \frac{c_r}{\lambda\beta(\beta - 1)}.$$

Зауваження 4. Оскільки для цієї системи обслуговування $P_2 = P_в$, то твердження теореми 2 виконується також для функціонала

$$\tilde{I}_l = c_r\overline{t}_r + c_2 P_2,$$

де P_2 – середній відносний час використання режиму "швидкого" обслуговування; c_2 – вартість одиниці часу використання цього режиму. У теоремі для функціонала $\tilde{I}_l$ треба лише замінити $c_в$ на c_2 у формулах (12)-(15).

6. Задача оптимального вибору порога перемикання на режим блокування вхідного потоку. Нехай $\gamma = 1$, тобто внаслідок перевищення порогового значення l відбувається лише блокування вхідного потоку, а режим обслуговування не змінюється. Вважаючи заданим параметр $\beta > 0$, для системи без обмежень на довжину черги ($m = \infty$) вибиратимемо параметр l так, щоб мінімізувати середній ризик, який враховує штрафи за час перебування у черзі та за втрату замовлень

$$I_{l1} = c_r\overline{t}_r + c_в P_в.$$

Теорема 3. *1) Якщо* $\beta \neq 1$ *і*

$$\frac{c_в}{c_r} \geq \frac{(\beta^4 - 1)^2\big(\beta^2(2\beta + 1)\ln\beta - \beta^3 + 1\big)}{\lambda\beta^5(\beta - 1)(\beta^3 - 1)^2\ln\beta},$$

то мінімум функціонала I_{l1} на множині дійсних $l \geq 1$ існує і досягається для $l = l^*$, де l^* – єдиний на проміжку $[1; \infty)$ дійсний корінь рівняння

$$\frac{(\beta^{l+3}-1)^2\big(\beta^{l+1}(\beta l+\beta+1)\ln\beta-\beta^{l+2}+1\big)}{\lambda\beta^{l+4}(\beta-1)(\beta^{l+2}-1)^2\ln\beta}=\frac{c_в}{c_r};$$

2) якщо $\beta = 1$ і

$$\frac{c_в}{c_r} \geq \frac{56}{9\lambda},$$

то мінімум функціонала I_{l1} на множині дійсних $l \geq 1$ існує і досягається для $l = l^*$, де l^* – єдиний на проміжку $[1; \infty)$ дійсний корінь рівняння

$$\frac{(l+3)^2(l^2+4l+2)}{2\lambda(l+2)^2}=\frac{c_в}{c_r}.$$

Доведення. Функціонал I_{l1} – це частковий випадок функціонала I_l при $\gamma = 1$. Теорема 2 залишається правильною і для $\gamma = 1$. Тому підставляючи $\gamma = 1$ у співвідношення (12)-(15), одержимо твердження теореми 3.

7. Задача оптимального вибору інтенсивності обслуговування без переходу на "швидке" обслуговування. Нехай, як і в попередньому пункті, $\gamma = 1$. Вважаючи заданим пороговий рівень l, для системи з необмеженою чергою ($m = \infty$) вибиратимемо параметр β так, щоб мінімізувати середній ризик

$$I_\beta = c_r\bar{t}_r + c_1(\beta)P_1,$$

де $P_1 = 1 - p_0$ – середній відносний час робочого режиму системи (коефіцієнт використання системи), $c_1(\beta)$ – вартість одиниці часу роботи системи в режимі обслуговування з фіксованою інтенсивністю $\mu_1 = \lambda\beta$. Загалом згідно з її економічним змістом залежність $c_1(\beta)$ зростаюча. Ми обмежимось випадком, коли $c_1(\beta) = c_1^*\beta^k$, де $k > 0,\ c_1^* = c_1(1)$.

Теорема 4. *Якщо $c_1(\beta) = c_1^*\beta^k$, то для функції $I_\beta = I_\beta(\beta)$ виконуються граничні співвідношення*

$$\lim_{\beta\to\infty} I_\beta(\beta) = \begin{cases} 0, & k \in (0; 1); \\ c_1^*, & k = 1; \\ +\infty, & k > 1. \end{cases} \tag{18}$$

Якщо $k > 1$, то мінімум функціонала I_β існує і досягається для $\beta = \beta^*$, де (залежно від значення l) β^* – єдиний або один з додатних коренів рівняння

$$F_1(\beta) = \frac{c_r}{c_1^*}, \tag{19}$$

$$F_1(\beta) = f_1(\beta)/f_r(\beta),$$

$$f_1(\beta) = \lambda\beta^{k+2}(\beta-1)^2(\beta^{l+2}-1)^2\big((k-1)\beta^{2l+5}+(l+3-k)\beta^{l+3}- \\ -(l+2+k)\beta^{l+2}+k\big);$$

$$f_r(\beta) = (\beta^{l+3}-1)^2\big((\beta^{l+3}-\beta^2-\beta-l\beta^2+l\beta+1)\big((l+5)\beta^{l+3}-(l+4)\beta^{l+2}- \\ -3\beta+2\big)-\beta(\beta-1)(\beta^{l+2}-1)\big((l+3)\beta^{l+2}-2\beta-2l\beta+l-1\big)\big),$$

який належить проміжку зростання функції $F_1(\beta)$.

Доведення. Співвідношення (18) випливають з того, що

$$\bar{t}_r = \frac{\beta^{l+3} - l\beta^3 + l\beta^2 - 2\beta^2 + \beta + (\beta-1)^2(l\beta+1)}{\lambda\beta^2(\beta-1)(\beta^{l+2}-1)}, \qquad P_1 = \frac{\beta^{l+2}-1}{\beta^{l+3}-1};$$

$$\lim_{\beta\to\infty} \bar{t}_r(\beta) = 0; \qquad \lim_{\beta\to\infty} \beta^k P_1(\beta) = \begin{cases} 0, & k \in (0;\,1); \\ 1, & k = 1; \\ +\infty, & k > 1. \end{cases}$$

Розглянемо випадок, коли $k > 1$. Похідна функції $I_\beta(\beta)$ має вигляд

$$I'_\beta(\beta) = a_1(\beta)\big(c_1^* f_1(\beta) - c_r f_r(\beta)\big),$$

де $a_1(\beta) > 0$, $f_1(\beta) > 0$, $f_r(\beta) > 0$ для всіх $\beta > 0$, тому рівняння $I'_\beta(\beta) = 0$ зводиться до вигляду (19). Функція $F_1(\beta)$ є монотонно зростаючою для $\beta > 0$ не для всіх $l \geq 1$. Але $F_1(0) = 0$, $F_1(\beta) > 0$ при $\beta > 0$ і $\lim\limits_{\beta\to\infty} F_1(\beta) = +\infty$, тому для функції $F_1(\beta)$ для всіх $l \geq 1$ обов'язково знайдеться хоча б один проміжок, на якому вона монотонно зростає. Це означає, що рівняння (19) має хоча б один додатний корінь, який належить проміжку зростання функції $F_1(\beta)$.

Якщо для деякого $l \geq 1$ рівняння (19) має єдиний корінь $\beta = \beta^*$, то він обов'язково належить проміжку зростання функції $F_1(\beta)$. Тому, враховуючи, що $\lim\limits_{\beta\to+0} I_\beta(\beta) = +\infty$, $\lim\limits_{\beta\to\infty} I_\beta(\beta) = +\infty$, і міркуючи так само, як у доведенні теореми 2, можна переконатись, що в точці $\beta = \beta^*$ функція $I_\beta(\beta)$ досягає мінімуму. Якщо ж для деякого $l \geq 1$ функція $F_1(\beta)$ має хоча б один інтервал, на якому вона спадає, то рівняння (19) може мати кілька додатних коренів, які належать інтервалам зростання $F_1(\beta)$. Кожен з них є точкою локального мінімуму функції $I_\beta(\beta)$. Абсолютний мінімум досягається для одного з цих коренів. Теорему доведено.

---

1. *Рыков В.В.* Управляемые системы массового обслуживания / *Рыков В.В.* // Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятн. Мат. стат. Теор. кибернет. – 1975. – Т. 12. – С.43-153.
2. *Дудин А.Н.* Практикум на ЭВМ по теории массового обслуживания: Учебное пособие. / *Дудин А.Н., Медведев Г.А., Меленец Ю.В.* – Минск, 2003.
3. *Соловьев А.Д.* Задача об оптимальном обслуживании / *Соловьев А.Д.* // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1970. – №5. – С. 40-50.

OPTIMIZATION OF MODES OF SERVICE FOR THE M/M/1/M AND M/M/1 QUEUEING SYSTEMS WITH BLOCKING OF AN INPUT FLOW

Kostyantyn ZHERNOVYI

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: k_zhernovyi@yahoo.com

The M/M/1/m and M/M/1 queueing systems with transition to a mode of "fast" service and simultaneous blocking of an input flow under condition of excess of number of customers in system of some threshold level l are examined. Stationary characteristics of systems are defined and following problems of an optimum choice are solved for: 1) intensity of "fast" service; 2) a threshold of switching on "fast" service; 3) a threshold of switching on a mode of blocking of an input flow; 4) intensity of service without transition to "fast" service.

Key words: the M/M/1/m and M/M/1 queueing systems, blocking of an input flow, optimization of modes of service.

ОПТИМИЗАЦИЯ РЕЖИМОВ ОБСЛУЖИВАНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ M/M/1/m И M/M/1 С БЛОКИРОВАНИЕМ ВХОДЯЩЕГО ПОТОКА

Константин ЖЕРНОВЫЙ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000, Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: k_zhernovyi@yahoo.com

Изучены системы обслуживания M/M/1/m и M/M/1, в которых осуществляется переход на "быстрое" обслуживание и одновременное блокирование входящего потока при условии превышения числа заявок в системе некоторого порогового уровня l. Определены стационарные характеристики систем и решены задачи оптимального выбора: 1) интенсивности "быстрого" обслуживания; 2) порога переключения на "быстрое" обслуживание; 3) порога переключения на режим блокирования входящего потока; 4) интенсивности обслуживания без перехода на "быстрое" бслуживание.

Ключевые слова: системы M/M/1/m и M/M/1, блокирование входящего потока, оптимизация режимов обслуживания.

Стаття надійшла до редколегії 07.10.2009

Прийнята до друку 16.12.2009