ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2009.
Вип. 71. С. 88–91

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech. Math. 2009.
Is. 71. P. 88–91

УДК 512.522.12

ПРАВЕ КВАЗІДУОКІЛЬЦЕ СЛАБКОГО СТАБІЛЬНОГО РАНГУ 1 Є ЛІВИМ КВАЗІДУОКІЛЬЦЕМ

Ольга ДОМША

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: olya.domsha@i.ua

Лам і Дугас сформулювали задачу знаходження правого квазідуокільця, яке не є лівим квазідуокільцем. Введено поняття кільця слабкого стабільного рангу 1 і показано, що область Безу слабкого стабільного рангу 1 є кільцем елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли вона є дуообластю. Доведено також, що праве квазідуокільце слабкого стабільного рангу 1 є лівим квазідуокільцем.

Ключові слова: кільце стабільного рангу 1, кільце слабкого стабільного рангу 1, квазідуокільце, кільце елементарних дільників.

Стабільний ранг кільця – один з найважливіших інваріантів K-теорії. Введене Х. Басом [1] поняття і сьогодні відіграє важливу роль у розв'язанні багатьох важливих проблем не тільки K-теорії, а й теорії кілець [2-4]. Особлива роль серед кілець належить кільцям стабільного рангу 1, тобто кільцям, в яких для довільних елементів $a, b \in R$ таких, що $Ra + Rb = R$ існує елемент $t \in R$ такий, що $a + tb$ – зворотний елемент кільця R [5-7]. Виділимо в цьому класі кілець підклас, який назвемо кільцем слабкого стабільного рангу 1.

Означення 1. *Кільце R називається кільцем слабкого стабільного рангу 1, якщо для довільних елементів $a, b \in R$ таких, що $Ra + Rb = R$ існує елемент $t \in R$ такий, що $a + tb = 1$.*

Прикладом такого кільця є довільне кільце стабільного рангу 1, в якому група зворотних елементів двоелементна.

Нагадаємо, що кільце є правим (лівим) квазідуокільцем, якщо довільний максимальний правий (лівий) ідеал кільця двобічний і кільце називається квазідуокільцем, якщо воно є правим і лівим квазідуокільцем [8]. Вартий уваги такий відомий результат про квазідуокільця.

Теорема 1. *Для довільного кільця R такі твердження еквівалентні:*
1) R-праве (ліве) квазідуокільце;
2) для довільних елементів $a, b \in R$ якщо $Ra + Rb = R$ ($aR + bR = R$), то $aR + bR = R$ ($Ra + Rb = R$).

Теорема 2. *Нехай R праве квазідуокільце слабкого стабільного рангу 1. Тоді R є квазідуокільцем.*

Доведення. Нехай елементи $a, b \in R$ такі, що

$$aR + bR = R.$$

Оскільки кільце слабкого стабільного рангу 1 є кільцем стабільного рангу 1, то існує такий елемент $t \in R$, що $a + bt = u$, де $u \in U(R)$. Тобто $Ra + Rb = R$.

Згідно з означенням кільця слабкого стабільного рангу 1 існує елемент $x \in R$ такий, що $xa + t = 1$. Звідси $t = 1 - xa$, а отже, $a + b(1 - xa) = u$. Тоді

$$a + b - bxa = b + (1 - bx)a = u,$$

де u - зворотний елемент R, тобто $Ra + Rb = R$. Враховуючи теорему 1, R є лівим квазідуокільцем. □

Означення 2. [9] *Кільце R називається кільцем елементарних дільників, якщо для довільної матриці A порядку $n \times m$ над R існують такі зворотні матриці $P \in GL_n(R)$, $Q \in GL_m(R)$, що:*
1) $PAQ = D$ – діагональна матриця, $D = (d_i)$;
2) $Rd_{i+1}R \subseteq Rd_i \cap d_iR$.

Теорема 3. *Область Безу слабкого стабільного рангу 1 є кільцем елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли вона є дуообластю.*

Доведення. Достатність. Нехай R є дуообластю слабкого стабільного рангу 1. Враховуючи [2, 9], достатньо показати, що для довільних елементів $a, b, c \in R$ таких, що $aR + bR + cR = R$ матриця

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$$

володіє канонічною діагональною редукцією.

Нехай $Ra + Rb = Rd$. Тоді існує елемент $t \in R$ такий, що $ta + b = d$. Оскільки $dR = Rd$ і $aR + bR = dR$, $aR + bR + cR = R$, то $dR + cR = R$ та існує елемент s такий, що $d + cs = 1$. Тоді

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ ta + b & c \end{pmatrix}$$

і

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ ta + b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ ta + b + cs & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & c \end{pmatrix} = B.$$

Очевидно, що елементарними перетвореннями рядків і стовпців матриця B, а отже, і матриця A зводиться до канонічного діагонального вигляду. Тобто R є кільцем елементарних дільників.

Необхідність. Нехай R є областю елементарних дільників слабкого стабільного рангу 1. Тоді для довільного $a \in R$ існують зворотні матриці $P = (p_{ij})_1^2$, $Q = (q_{ij})_1^2$, що

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} P = Q \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \tag{1}$$

де

$$RbR \subseteq zR \cap Rz. \tag{2}$$

Розглянемо (1)

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

$$ap_{11} = q_{11}z, ap_{21} = q_{21}z. \tag{3}$$

Із того, що матриці P, Q – оборотні, враховуючи (2), отримуємо

$$RaR = RbR. \tag{4}$$

Оскільки $Rp_{11}+Rp_{21} = R$, згідно з теоремою 1, $p_{11}R+p_{21}R = R$, тобто $p_{11}u+p_{21}v = 1$ для деяких елементів $u, v \in R$. Тоді з (2) отримуємо $a = q_{11}zu + q_{21}zv$. Отже,

$$a \in RzR. \tag{5}$$

Враховуючи (2) і (4), (5), одержуємо

$$RaR = zR = Rz. \tag{6}$$

Оскільки R – область, то на підставі (6) $a = za_0$, $a = a_1z$ для деяких елементів $a_0, a_1 \in R$, причому $Ra_0R = Ra_1R = R$. Відповідно до теореми 1 і [10] маємо, що елементи a_0, a_1 – оборотні, тобто a – дуоелемент. Отже, R є дуокільцем. $\square$

1. *Bass X.* K-theory and stable algebra / *Bass X.* // J. Haunts Etudes Scien. Publ. Math. – 1964. – №22. – P. 485-544.
2. *Zabavsky B.V.* Diagonalizability theorem for matrices with finite stable range / *Zabavsky B.V.* // Alg. Discr. Math. – 2005. – №1. – P. 134-148.
3. *Warfield R.B.* Cancellation of modules and groups and stable range of endomorphism rings / *Warfield R.B.* // Pacific. S. Math. – 1980. – Vol. 91, №2. – P. 457-485.
4. *Vasserstein L.N.* The stable rank of rings and dimensionability of topological spaces / *Vasserstein L.N.* // Functional Anal. Appl. – 1971. – №5. – P. 102-110.
5. *Vasserstein L.N.* Bass's first stable range conclusion / *Vasserstein L.N.* // Pure App. Alg. – 1984. – №34. – P. 319-330.
6. *Lam T.* A crash course on stable range, cancellation, substitution and exchange. / *Lam T.* – University of California, Berkeley, CA 94720.
7. *B.Goodearl K.* Stable range one for rings with many units / *B.Goodearl K., Menal P.* // Pure App. Alg. – 1949. – №54. – P. 261-287
8. *Lam T.* Quasi-Duo Rings and Stable Range Decent / *Lam T., Dugas A.* // J. Pure App. Alg. – 2005. – №195. – P. 243-259.
9. *Kaplansky I.* Elementary divisors and modules / *Kaplansky I.* // Trans. American. Math. Soc. – 1949. – №66. – P. 464-491.
10. *Brungs H. H.* Rings with a distributive lattice of right ideals / *Brungs H. H.* // S. Algebra. – 1976. – №40. – P. 392-400.

RIGHT QUASIDUO-RING WITH FAINT STABLE RANGE 1 IS LEFT QUASIDUO-RING

Ol'ha DOMSHA

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: olya.domsha@i.ua

The problem of discovering a right quasiduo-ring, which is not left quasiduo-ring, is proposed by Lam and Dugas. In this paper the notion of a ring with faint stable range 1 is introduced and showed that Bezout domain with faint stable range 1 is elementary divisors ring if and only if it is duo domain. It is also proved that right quasiduo-ring with faint stable range 1 is left quasiduo-ring.

Key words: ring with stable range 1, ring with faint stable range 1, quasiduo-ring, elementary divisor ring.

ПРАВОЕ КВАЗИДУОКОЛЬЦО СЛАБОГО СТАБИЛЬНОГО РАНГА 1 ЯВЛЯЕТСЯ ЛЕВЫМ КВАЗИДУОКОЛЬЦОМ

Ольга ДОМША

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000, Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: olya.domsha@i.ua

Лам и Дугас сформулировали задачу о поиске правого квазидуокольца, которое не является левым квазидуо. В этой работе дано определение кольца слабого стабильного ранга 1 и показано, что область Безу слабого стабильного ранга 1 является кольцом элементарных делителей тогда и только тогда, когда оно дуообласть. Доказано также, что правое квазидуокольцо слабого стабильного ранга 1 есть левым квазидуокольцом.

Ключевые слова: кольцо стабильного ранга 1, кольцо слабого стабильного ранга 1, кольцо элементарных делителей.

Стаття надійшла до редколегії 13.03.2009

Прийнята до друку 16.12.2009