ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2009.
Вип. 71. С. 71–77

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech. Math. 2009.
Is. 71. P. 71–77

УДК 517.547

ОБЕРНЕНІ ФОРМУЛИ ДЛЯ КОЕФІЦІЄНТІВ ФУР'Є МЕРОМОРФНИХ У КІЛЬЦЯХ ФУНКЦІЙ

Мар'яна ГОЛДАК[1], **Андрій ХРИСТІЯНИН**[2]

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: [1]*marianagoldak@rambler.ru,* [2]*khrystiyanyn@ukr.net*

Отримано обернені формули для коефіцієнтів Фур'є мероморфних у кільцях функцій.

Ключові слова: коефіцієнти Фур'є, коефіцієнти Фур'є-Стільтьєса, аналітична функція, мероморфна функція.

1. Вступ. Метод вивчення асимптотичних властивостей цілих і мероморфних функцій, який ґрунтується на використанні ряду Фур'є для функції $\log|f(te^{i\theta})|$ як функції від θ, застосовують у працях багатьох математиків ([1]-[6]). Оскільки коефіцієнти Фур'є такої функції виражаються через її нулі та полюси, то за допомогою цих коефіцієнтів можна досліджувати їхній розподіл, а також асимптотичну поведінку функції.

Прямі формули для коефіцієнтів Фур'є функції $\log|f(te^{i\theta})|$, де f мероморфна в кільці, виявили в [6]. У цій праці ми доводимо обернені формули. Для мероморфних у крузі функцій аналогічні співвідношення довели в ([7, с. 106-107]). У [8], [9] отримано відповідні співвідношення для δ-субгармонійних у півплощині функцій.

2. Обернені формули для коефіцієнтів Фур'є мероморфних у кільцях функцій. Нехай f – мероморфна функція в $A = \{z : 1/R_0 < |z| < R_0\}$, $1 < R_0 \le +\infty$, з послідовністю нулів $\{a_j\}$ і послідовністю полюсів $\{b_j\}$. Через $c_k(t, f)$ позначимо коефіцієнти Фур'є функції $\log|f(te^{i\theta})|$,

$$c_k(t, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\theta}\log|f(te^{i\theta})|\,d\theta, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \frac{1}{R_0} < t < R_0. \tag{1}$$

Позначимо $a_j = |a_j|e^{i\gamma_j}$,

$$n_k(t, f) = \sum_{\frac{1}{t}\leqslant|a_j|\leqslant t} e^{-ik\gamma_j},$$

$$N_k(r,f) = \int\limits_1^r \frac{n_k(t,f)}{t}\,dt, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Для початку розглянемо аналітичну в A функцію f і припустимо, що жоден з її нулів не лежить на одиничному колі. Тоді її логарифмічна похідна допускає розвинення в ряд Лорана

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \beta_k z^k, \tag{3}$$

в деякому кільцевому околі одиничного кола.

Через A^* позначимо A без променів $\{z = \tau a, \tau \geq 1\}$, якщо $|a| > 1$, та $\{z = \tau a, 0 \leq \tau \leq 1\}$, якщо $|a| < 1$, де a є нулем функції.

Існує $m = m(f)$ ([6, с.14]) таке, що можна вибрати однозначну гілку $\log F$, $F(z) = z^{-m} f(z)$ в A^*. Оскільки F не має нулів на одиничному колі, то $\log F(z)$ голоморфна в деякому кільцевому околі одиничного кола, тому допускає розвинення в ряд Лорана

$$\log F(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k z^k. \tag{4}$$

З (4) випливає, що

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{k\neq 0} k\,\alpha_k z^{k-1}, \tag{5}$$

або

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z} + \sum_{k\neq 0} k\,\alpha_k z^{k-1}, \tag{6}$$

в деякому кільцевому околі одиничного кола. Порівнюючи (3) та (6), з єдиності розвинення в ряд Лорана знаходимо $\beta_{k-1} = k\,\alpha_k$, коли $k \neq 0$ і $\beta_{-1} = m$.

Наступні співвідношення ([6, с.58]) пов'язують коефіцієнти $c_k(r,f)$ з нулями функції f та послідовністю $\{\alpha_k\}$

$$c_0(r,f) + c_0(\frac{1}{r}, f) - 2c_0(1,f) = N_0(r,f),$$

$$c_k(t,f) = \frac{1}{2}(\alpha_k t^k + \overline{\alpha}_{-k} t^{-k}) + \frac{\operatorname{sign}(t-1)}{2k} \sum_{\substack{\max(1,\frac{1}{t})<|a_j|\leqslant \\ \leqslant\max(1,t)}} \left(\left(\frac{t}{a_j}\right)^k - \left(\frac{\overline{a_j}}{t}\right)^k \right), \tag{7}$$

$k \neq 0$, $\frac{1}{R_0} < t < R_0$.

Основний результат цієї статті – доведення обернених формул для коефіцієнтів Фур'є, які виражають коефіцієнти Фур'є-Стільтьєса $N_k(r,f)$ послідовності нулів $\{a_j\}$ у термінах послідовності $\{c_k(r,f)\}$.

Теорема 1. *Нехай функція f голоморфна в A з послідовністю нулів $\{a_j\}$, функції $c_k(r,f)$ та $N_k(r,f)$ визначені співвідношеннями (1) та (2) відповідно. Тоді*

$$N_0(r,f) = c_0(r,f) + c_0(\frac{1}{r}, f) - 2c_0(1,f),$$

$$N_k(r,f) = c_k(r,f) + c_k(\frac{1}{r}, f) - k^2 \int_1^r \frac{dt}{t} \int_{\frac{1}{t}}^{t} \frac{c_k(u,f)}{u} du + C_k(1,f), \tag{8}$$

де $C_k(r,f) = \frac{1}{k} \sum\limits_{|a_j|=1} e^{-ik\gamma_j} - c_k(1,f)$, $1 \leqslant r < R_0$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Доведення. Припустимо спочатку, що жоден з нулів функції f не лежить на одиничному колі. Маємо,

$$\int_1^r \frac{dn_k(t)}{t^k} = \sum_{1<|a_j|\leqslant r} \frac{e^{-ik\gamma_j}}{|a_j|^k} + \sum_{\frac{1}{r}\leqslant|a_j|\leqslant 1} |a_j|^k e^{-ik\gamma_j}.$$

Приймемо $A_k = \dfrac{\alpha_k + \overline{\alpha}_{-k}}{2}$. З (7) випливає

$$c_k(r,f) + c_k\left(\frac{1}{r}, f\right) = A_k\left(r^k + \frac{1}{r^k}\right) + \frac{1}{2\pi}\int_1^r \left[\left(\frac{r}{t}\right)^k - \left(\frac{t}{r}\right)^k\right] dn_k(t,f).$$

Інтегруючи частинами це співвідношення, отримаємо

$$c_k(r,f) + c_k\left(\frac{1}{r}, f\right) = A_k\left(r^k + \frac{1}{r^k}\right) + \frac{k}{2}\int_1^r \left[\left(\frac{r}{t}\right)^k - \left(\frac{t}{r}\right)^k\right] \frac{N_k(t,f)}{t} dt + N_k(r,f). \tag{9}$$

Ми можемо розглядати (9) як інтегральне рівняння стосовно $N_k(t,f)$. Для його розв'язання позначимо

$$\Phi_k(r,f) = \frac{k}{2}\int_1^r \left[\left(\frac{r}{t}\right)^k - \left(\frac{t}{r}\right)^k\right] \frac{N_k(t,f)}{t} dt, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{10}$$

Знаходячи похідну другого порядку $\Phi_k(r,f)$ стосовно $\log r$ отримуємо таке диференціальне рівняння

$$\frac{d^2\Phi_k(r,f)}{(d\log r)^2} = k^2\left(c_k(r,f) + c_k\left(\frac{1}{r}, f\right)\right) - A_k\left(r^k + \frac{1}{r^k}\right), \ \Phi_k(1,f) = 0, \ \Phi_k'(1,f) = 0. \tag{11}$$

Розв'язуючи диференціальне рівняння (11) і використовуючи (9) та (10), отримуємо

$$c_k(r,f) + c_k\left(\frac{1}{r}, f\right) = k^2 \int_1^r \left(\int_1^\tau \frac{c_k(t,f) + c_k(\frac{1}{t}, f)}{t} dt\right) \frac{d\tau}{\tau} + \alpha_k + \overline{\alpha}_{-k} + N_k(r,f). \tag{12}$$

З огляду на (4)

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log F(e^{i\theta}) e^{-ik\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log(e^{-im\theta} f(e^{i\theta})) e^{-ik\theta} d\theta.$$

Тому

$$\alpha_k + \overline{\alpha}_{-k} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \log|e^{-im\theta} f(e^{i\theta})| e^{-ik\theta} d\theta = 2c_k(1,f). \tag{13}$$

Зауважимо, що

$$\int_1^{\tau} \frac{c_k(\frac{1}{t}, f)}{t} dt = \int_{1/\tau}^{1} \frac{c_k(v, f)}{v} dv. \tag{14}$$

Співвідношення (2), (13) і (14) дають (8).

У загальному випадку, коли функція f має нулі $\{a_j\}$ на одиничному колі, розглянемо функцію

$$\widetilde{f}(z) = \frac{f(z)}{\prod\limits_{|a_j|=1} (1 - \frac{z}{a_j})}.$$

Тоді

$$c_k(\tau, \widetilde{f}) = c_k(\tau, f) - \sum_{|a_j|=1} c_k \left(\tau, 1 - \frac{z}{a_j}\right), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{15}$$

Функція $\widetilde{f}$ аналітична в A і не має нулів на одиничному колі. За теоремою 1

$$\begin{gathered} N_0(r, \widetilde{f}) = c_0(r, \widetilde{f}) + c_0 \left(\frac{1}{r}, \widetilde{f}\right) - 2c_0(1, \widetilde{f}), \\ N_k(r, \widetilde{f}) = c_k(r, \widetilde{f}) + c_k \left(\frac{1}{r}, \widetilde{f}\right) - k^2 \int_1^r \frac{dt}{t} \int_{\frac{1}{t}}^{t} \frac{c_k(u, \widetilde{f})}{u} du - 2c_k(1, \widetilde{f}), \end{gathered} \tag{16}$$

$1 \leqslant r < R_0$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Але

$$N_k(r, \widetilde{f}) = N_k(r, f) - n_k(1, f) \cdot \log r.$$

Отже, при $k = 0$, враховуючи (15), маємо згідно з (16)

$$N_0(r, f) = c_0(r, f) - \sum_{|a_j|=1} c_0 \left(r, 1 - \frac{z}{a_j}\right) + c_0 \left(\frac{1}{r}, f\right) - \sum_{|a_j|=1} c_0 \left(\frac{1}{r}, 1 - \frac{z}{a_j}\right) +$$

$$+ n_0(1, f) \log r - 2c_0(1, f), \quad r > 1.$$

Зауважимо, що

$$\sum_{|a_j|=1} c_0 \left(r, 1 - \frac{z}{a_j}\right) = n_0(1, f) \log r, \quad \sum_{|a_j|=1} c_0 \left(\frac{1}{r}, 1 - \frac{z}{a_j}\right) = 0, \quad r > 1,$$

(див., наприклад, [7, с. 10]).

Отож, одержуємо (8) для f при $k = 0$, оскільки $c_0(1, f) = c_0(1, \widetilde{f})$ (див. [10, с. 34]).

Нехай тепер $k \neq 0$. Маємо

$$c_k \left(\tau, 1 - \frac{z}{a_j}\right) = \begin{cases} -\dfrac{\tau^k}{2k} e^{-ik\gamma_j}, & 0 < \tau < 1, \\ -\dfrac{e^{-ik\gamma_j}}{2kr^k}, & \tau > 1. \end{cases} \tag{17}$$

Тоді (16) дає

$$N_k(r,f)=c_k(r,f)+\frac{1}{2k}\sum_{|a_j|=1}\frac{e^{-ik\gamma_j}}{r^k}+c_k\left(\frac{1}{r},f\right)+\frac{1}{2k}\sum_{|a_j|=1}\frac{e^{-ik\gamma_j}}{r^k}-\sum_{|a_j|=1}\frac{k^2e^{-ik\gamma_j}}{2k}\times$$

$$\times\int_1^r\frac{dt}{t}\left(\int_{\frac{1}{t}}^t\tau^{k-1}d\tau+\int_1^t\tau^{-k-1}d\tau\right)-k^2\int_1^r\frac{dt}{t}\int_{\frac{1}{t}}^t c_k(\tau,f)d\tau+n_k(1,f)\cdot\log r-2c_k(1,\widetilde{f})=$$

$$=c_k(r,f)+c_k\left(\frac{1}{r},f\right)-k^2\int_1^r\frac{dt}{t}\int_{\frac{1}{t}}^t c_k(\tau,f)d\tau-2c_k(1,\widetilde{f}). \tag{18}$$

Згідно з (15)

$$c_k(1,\widetilde{f})=c_k(1,f)-\sum_{|a_j|=1}c_k\left(1,1-\frac{z}{a_j}\right),\quad k\in\mathbb{Z}.$$

З огляду на неперервність коефіцієнтів $c_k(\tau,f)$, враховуючи (17), маємо

$$c_k\left(1,1-\frac{z}{a_j}\right)=-\frac{e^{-ik\gamma_j}}{2k}.$$

Підставляючи це у (18), одержимо (8). Теорему доведено. □

Якщо f мероморфна, то наявність полюсів суттєво не ускладнює доведення, і ми отримаємо таку загальнішу теорему.

Теорема 2. *Нехай f – мероморфна функція в $A=\{z\ :\ 1/R_0<|z|<R_0\}$, $R_0\le+\infty$, відмінна від тотожного нуля з послідовністю нулів $\{a_j\}$, $a_j=|a_j|e^{i\gamma_j}$ та послідовністю полюсів $\{b_j\}$, $b_j=|b_j|e^{i\delta_j}$. Тоді*

$$N_k(r,f)=c_k(r,f)+c_k\left(\frac{1}{r},f\right)-k^2\int_1^r\frac{dt}{t}\int_{\frac{1}{t}}^t\frac{c_k(u,f)}{u}du-2c_k(1,f)+$$

$$+\frac{1}{k}\sum_{|a_j|=1}e^{-ik\gamma_j}-\frac{1}{k}\sum_{|b_j|=1}e^{-ik\delta_j},$$

де

$$N_k(r,f)=\int_1^r\frac{n_k(t,f)}{t}dt,$$

$$n_k(t,f)=\sum_{\frac{1}{t}\le|a_j|\le t}e^{-ik\gamma_j}-\sum_{\frac{1}{t}\le|b_j|\le t}e^{-ik\delta_j},$$

$1\leqslant r<R_0$, $k\in\mathbb{Z}$.

---

1. *Rubel L.A.* A Fourier series method for entire functions / *Rubel L.A.* // Duke Math. J. – 1963. – Vol. 30. – P. 437-442.

2. *Rubel L.A.* A Fourier series method for meromorphic and entire functions / *Rubel L.A., Taylor B.A.* // Bull. Soc. Math. France. – 1968. – Vol. 96. – P. 53-96.
3. *Miles J.B.* Quotient representations of meromorphic functions / *Miles J.B.* // J. d'Analyse Math. – 1972. – Vol. 25. – P. 371-388.
4. *Khrystiyanyn A.Ya.* On the Nevanlinna theory for meromorphic functions on annuli, I / *Khrystiyanyn A.Ya., Kondratyuk A.A.* // Mat. Stud. – 2005. – Vol. 23, №1 – P. 19-30.
5. *Khrystiyanyn A.Ya.* On the Nevanlinna theory for meromorphic functions on annuli, II / *Khrystiyanyn A.Ya., Kondratyuk A.A.* // Mat. Stud. – 2005. – Vol. 24, №2 – P. 57-68.
6. *Kondratyuk A.* Meromorphic functions in multiply connected domains / *Kondratyuk A., Laine I.* – Joensuu-L'viv, 2006.
7. *Кондратюк А.А.* Ряды Фурье и мероморфные функции / *Кондратюк А.А.* – Львов: Выща шк., 1988.
8. *Malyutin K.G.* Fourier series and delta-subharmonic functions of zero-type in a halfplane / *Malyutin K.G., Malyutina T.I.* // Mat. Stud. – 2008. – Vol. 30, №2. – P. 132-138.
9. *Malyutin K.G.* Reverse formulae for Fourier coefficients of delta-subharmonic functions / *Malyutin K.G.* // Mat. Stud. – 2009. – Vol. 32, №2. (у друці)
10. *Гольдберг А.А.* Распределение значений мероморфных функций / *Гольдберг А.А., Островский И.В.* – Москва: Наука, 1970.

INVERSE FORMULAE FOR THE FOURIER COEFFICIENTS OF MEROMORPHIC FUNCTIONS ON ANNULI

Mariana GOLDAK[1], Andriy KHRYSTIYANYN[2]

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: [1]marianagoldak@rambler.ru, [2]khrystiyanyn@ukr.net

We establish inverse relations for the Fourier coefficients of meromorphic functions on annuli.

Key words: analytic function, meromorphic function, Fourier coefficients, Fourier-Stieltjes coefficients.

ОБРАТНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ МЕРОМОРФНЫХ В КОЛЬЦАХ ФУНКЦИЙ

Марьяна ГОЛДАК[1], Андрей ХРИСТИЯНИН[2]

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000, Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: [1]marianagoldak@rambler.ru, [2]khrystiyanyn@ukr.net

Получены обратные формулы для коэффициентов Фурье мероморфных в кольцах функций.

Ключевые слова: аналитическая функция, мероморфная функция, коэффициенты Фурье, коэффициенты Фурье-Стилтьеса.

Стаття надійшла до редколегії 20.10.2009

Прийнята до друку 16.12.2009