ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2009.
Вип. 71. С. 62–70

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech. Math. 2009.
Is. 71. P. 62–70

УДК 517.547

ДВОПАРАМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗРОСТАННЯ НЕВІД'ЄМНИХ І МЕРОМОРФНИХ У КІЛЬЦІ ФУНКЦІЙ

[1]Оксана ГНАТЮК, [2]Ольга ГРЕШКО, [3]Остап СТАШИШИН

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: [1]*oksanka.gnatyuk@gmail.com,* [2]*olgagreshko@gmail.com,*
[3]*ostap.stashyshyn@gmail.com*

Для невід'ємних зростаючих функцій від однієї змінної $\varphi(t)$ характеристиками зростання є порядок і тип. Якщо $\exists\ t_0\ \forall\ t > t_0(\alpha)\ \varphi(t) \leqslant t^\alpha$, то функція $\varphi(t)$ називається функцією скінченного порядку (зростання), а infimum таких α називається порядком функції $\varphi(t)$. Отже, якщо ρ – порядок функції $\varphi(t)$, то

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\, t_0(\varepsilon) \quad \forall\, t > t_0(\varepsilon) \quad \varphi(t) < t^{\rho+\varepsilon}.$$

Узагальнено поняття порядку зростання для невід'ємних функцій двох змінних і застосовуються введені поняття спряжених порядків до вивчення характеристик зростання голоморфних та мероморфних функцій.

Ключові слова: множина істинних порядків, пара істинних порядків, аналітична функція, мероморфна функція.

1. Характеристики зростання невід'ємних функцій.

1.1. Означення, приклади, геометричне тлумачення. Нехай $Q(\alpha_0, \beta_0) = \{(\alpha, \beta)\ :\ \alpha \geqslant \alpha_0,\ \ \beta \geqslant \beta_0\}$ і $Q = Q(0,0)$, функція $F(\tau, r)$ – невід'ємна при $\tau \geqslant 1$, $r \geqslant 1$. Нехай також

$$K(F) = \{(\alpha, \beta) \in Q\ :\ \exists\,(\tau_0, r_0)\quad \forall\,(\tau, r)\quad (\tau > \tau_0,\quad r > r_0)\quad F(\tau, r) \leqslant \tau^\alpha + r^\beta\}. \quad (1)$$

Зауважимо, що тут τ_0 та r_0 залежать від α і β. Через $\overset{\circ}{K}(F)$ позначимо внутрішність множини $K(F)$.

Означення 1. *Множина X з $\mathbb{R}^2$ називається квадрантотвореною, якщо разом з кожною точкою (α_0, β_0) вона містить квадрант $Q(\alpha_0, \beta_0)$.*

З означення $K(F)$ випливає, що $K(F)$ квадрантотворена множина. Справді, нехай $(\alpha_0, \beta_0) \in K(F)$. Тоді $F(\tau, r) \leqslant \tau^{\alpha_0} + r^{\beta_0} \leqslant \tau^\alpha + r^\beta$ при $\tau > \tau_0$, $r > r_0$, $\alpha \geqslant \alpha_0$, $\beta \geqslant \beta_0$. Отже, $Q(\alpha_0, \beta_0) \subset K(F)$.

Приклад 1. Розглянемо функцію $F(\tau, r) = \tau r$, $\tau \geqslant 1$, $r \geqslant 1$. Застосуємо добре відому нерівність Юнга

$$\tau r \leqslant \frac{\tau^\alpha}{\alpha} + \frac{r^\beta}{\beta}$$

при $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. З неї випливає, що множина пар (α, β) таких, що $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ належить до $K(F)$, тобто, $F(\tau, r) \leqslant \tau^\alpha + r^\beta$ при $\tau \geqslant 1, r \geqslant 1$, бо $\alpha > 1$ і $\beta > 1$.

Покажемо, що множина $\{(\alpha, \beta) \, : \, \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} < 1\}$ належить до $K(F)$. Справді, $\frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha-1}{\alpha} = 1$ і $\beta > \frac{\alpha}{\alpha-1}$ для довільної точки з цієї множини. Тому ця точка належить до $Q(\alpha, \frac{\alpha}{\alpha-1})$. Оскільки $K(F)$ квадрантотворена, то $Q(\alpha, \beta) \subset K(F)$ і потрібне включення перевірено. Покажемо, що

$$(\alpha, \beta) \in \{Q \setminus \{(\alpha, \beta) \, : \, \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \leqslant 1\}\} \Rightarrow (\alpha, \beta) \notin K(F).$$

Візьмемо спочатку α_0 і β_0 такі, що $\frac{1}{\alpha_0} + \frac{1}{\beta_0} > 1$ і покажемо, що $(\alpha_0, \beta_0) \notin K(F)$. Нехай

$$\exists \, (\tau_0, r_0) \quad \forall \, (\tau, r) \quad (\tau > \tau_0, \quad r > r_0) \quad \tau r \leqslant \tau^{\alpha_0} + r^{\beta_0}. \tag{2}$$

Покажемо, що $\exists \, \alpha > \alpha_0$ і $\exists \, \beta > \beta_0$ такі, що $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, а саме

$$\alpha = \frac{2 + (\alpha_0 - \beta_0) + \sqrt{4 + (\alpha_0 - \beta_0)^2}}{2}, \quad \beta = \frac{\alpha}{\alpha - 1}. \tag{3}$$

Перевіримо нерівність $\alpha > \alpha_0$. Згідно з (3) вона еквівалентна такій нерівності:

$$\alpha_0 + \beta_0 - 2 < \sqrt{4 + (\alpha_0 - \beta_0)^2}. \tag{4}$$

Розглянемо 2 випадки:

а) $\alpha_0 + \beta_0 < 2$. Нерівність (4) правильна, бо її ліва частина від'ємна;

б) $\alpha_0 + \beta_0 > 2$. Тоді (4) еквівалентна $(\alpha_0 + \beta_0 - 2)^2 < 4 + (\alpha_0 - \beta_0)^2$, тобто

$$\alpha_0 \beta_0 < \alpha_0 + \beta_0. \tag{5}$$

Нерівність (5) рівносильна нерівності $\frac{1}{\alpha_0} + \frac{1}{\beta_0} > 1$.

Нерівність $\beta > \beta_0$ перевіряємо аналогічно до попередньої, оскільки

$$\beta = \frac{\alpha}{\alpha - 1} = \frac{2 + (\beta_0 - \alpha_0) + \sqrt{4 + (\beta_0 - \alpha_0)^2}}{2}.$$

Приймемо тепер у співвідношенні (2) $r = \tau^{\alpha - 1}$. Тоді його перепишемо так:

$$\tau^\alpha \leqslant \tau^{\alpha_0} + \tau^{(\alpha-1)\beta_0}, \tag{6}$$

де $\alpha > \alpha_0$ задане рівністю (3). Поділимо нерівність (6) на τ^α. Тоді

$$1 \leqslant \tau^{\alpha_0 - \alpha} + \tau^{(\alpha-1)\beta_0 - \alpha}. \tag{7}$$

Спрямовуючи $\tau \to \infty$, одержимо $1 \leqslant 0$, бо $\alpha_0 - \alpha < 0$ і

$$(\alpha - 1)\beta_0 - \alpha = (\alpha - 1)(\beta_0 - \frac{\alpha}{\alpha - 1}) = (\alpha - 1)(\beta_0 - \beta) < 0.$$

Ми отримали суперечність. Отож,

$$\{(\alpha_0, \beta_0) \, : \, \frac{1}{\alpha_0} + \frac{1}{\beta_0} > 1\} \not\subset K(F).$$

Отже,

$$K(F) = \{(\alpha, \beta) \ : \ \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \leqslant 1\}. \tag{8}$$

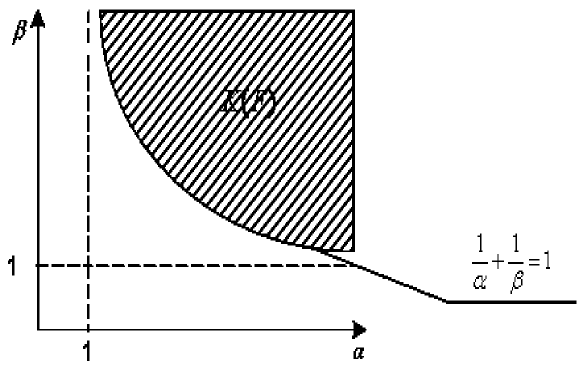

Рис. 1

Лема 1. *Якщо множина* $\overset{\circ}{K}(F)$ *непорожня, то вона однозв'язно необмежена область.*

Доведення. Необмеженість множини $\overset{\circ}{K}(F)$ безпосередньо випливає з її квадрантотвореності.

Нехай γ проста Жорданова крива $\overset{\circ}{K}(F)$. За теоремою Жордана γ розбиває площину (α, β) на дві області, а саме: внутрішність $int\gamma$ і зовнішність $ext\gamma$, яка є необмеженою областю. Припустимо $(\alpha_0, \beta_0) \in int\gamma$. Розглянемо півпряму $l : \{(\alpha, \beta) : \alpha = \alpha_0, \beta \leqslant \beta_0\}$, яка має точку перетину з γ. Нехай $\beta^* = \sup\{\beta : \beta \in l \cap ext\gamma\} \leqslant \beta_0$. Покажемо, що $\beta^* \neq \beta_0$. Припустимо, що $\beta^* = \beta_0$. Тоді отримаємо $(\alpha_0, \beta^*) \notin int\gamma$. Звідси $(\alpha_0, \beta_0) \notin int\gamma$, що суперечить припущенню. Отже, $\beta^* < \beta_0 \Rightarrow (\alpha_0, \beta^*) \in \gamma$. Припустимо, що $(\alpha_0, \beta^*) \notin \gamma$. Якщо $(\alpha_0, \beta^*) \in ext\gamma$, то $\exists \ U_\varepsilon((\alpha_0, \beta^*)) \subset ext\gamma$, що суперечить означенню β^*. Тоді $(\alpha_0, \beta^*) \in int\gamma$, що також суперечить означенню β^*. Отже, $(\alpha_0, \beta^*) \in \gamma$. З квадрантотвореності $K(F)$ маємо включення $Q(\alpha_0, \beta^*) \subset \subset K(F)$. Отож, $(\alpha_0, \beta_0) \in Q(\alpha_0, \beta^*) \subset K(F)$. $\square$

Виникає питання чи область $\overset{\circ}{K}(F)$ опукла. Наступний приклад дає негативну відповідь на це запитання.

Приклад 2. Нехай

$$F(\tau, r) = \min(\tau, r) = \begin{cases} \tau, & 1 \leqslant \tau \leqslant r, \\ r, & 1 \leqslant r \leqslant \tau. \end{cases}$$

За означенням $K(F)$ маємо

$$\exists \ (\tau_0, r_0) \quad \forall \ (\tau, r) \quad (\tau > \tau_0, \quad r > r_0) \quad F(\tau, r) \leqslant \tau^1 + r^0,$$

оскільки

$$\min(\tau, r) = \begin{cases} \tau \leqslant \tau^1 + r^0, & \tau_0 < \tau \leqslant r, \\ r \leqslant \tau^1 + r^0, & r_0 < r \leqslant \tau. \end{cases}$$

Аналогічно

$$\exists\,(\tau_0, r_0)\quad \forall\,(\tau, r)\quad (\tau > \tau_0, \quad r > r_0)\quad F(\tau, r) \leqslant \tau^0 + r^1,$$

бо

$$\min(\tau, r) = \begin{cases} \tau \leqslant \tau^0 + r^1, & \tau_0 < \tau \leqslant r, \\ r \leqslant \tau^0 + r^1, & r_0 < r \leqslant \tau. \end{cases}$$

Отож, точки $(1, 0)$ і $(0, 1)$ належать до $K(F)$. Оскільки $K(F)$ квадрантотворена, то $Q(1, 0) \subset K(F)$ і $Q(0, 1) \subset K(F)$. Звідси $Q(1, 0) \cup Q(0, 1) \subset K(F)$. Покажемо, що $(\alpha, \beta) \in Q \setminus \{Q(1, 0) \cup Q(0, 1)\}$ не належить до $K(F)$.

Припустимо протилежне

$$\exists\,(\tau_0, r_0)\quad \forall\,(\tau, r)\quad (\tau > \tau_0, \quad r > r_0)\quad \min(\tau, r) \leqslant \tau^\alpha + r^\beta.$$

Приймемо $r = \tau$, тоді $\tau \leqslant \tau^\alpha + \tau^\beta$. Поділимо цю нерівність на τ

$$1 \leqslant \tau^{\alpha-1} + \tau^{\beta-1}.$$

Спрямуємо $\tau \to \infty$, тоді одержимо $1 \leqslant 0$, бо $\alpha - 1 < 0$ і $\beta - 1 < 0$. Ми отримали протиріччя. Отже,

$$K(F) = \{(\alpha, \beta)\ :\ (\alpha, \beta) \in Q(1, 0) \cup Q(0, 1)\}. \tag{9}$$

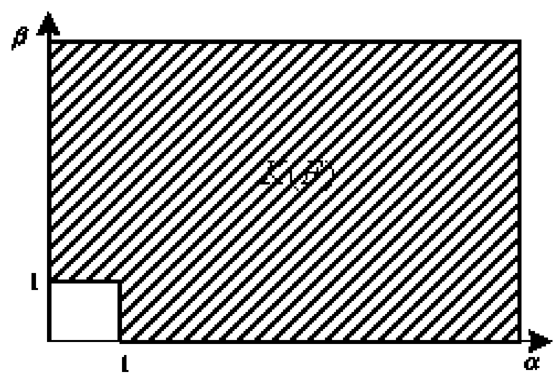

Рис. 2

Означення 2. *Кривою спряжених порядків функції* $F(\tau, r)$ *називається межа* $\partial K(F)$ *множини* $\overset{\circ}{K}(F)$.

Означення 3. *Нехай* $K(F) \neq \emptyset$. *Точка* $(\alpha_0, \beta_0) \in \partial K(F)$ *називається нормальною, якщо*

$$(\alpha < \alpha_0 \Rightarrow (\alpha, \beta_0) \notin \overline{K(F)}) \wedge (\beta < \beta_0 \Rightarrow (\alpha_0, \beta) \notin \overline{K(F)}).$$

Означення 4. *Сукупність нормальних точок множини* $\partial K(F)$ *будемо називати множиною істинних порядків і позначати* $OrdF$.

Означення 5. *Якщо* $OrdF$ *містить лише один елемент* (ρ_1, ρ_2), *то він називається парою істинних порядків функції* $F(\tau, r)$.

Зауважимо таке: якщо функція $F(\tau, r)$ має пару істинних порядків (ρ_1, ρ_2), то

$$\rho_1 = \inf\{\alpha \;:\; (\alpha, \beta) \in \partial K(F)\},$$
$$\rho_2 = \inf\{\beta \;:\; (\alpha, \beta) \in \partial K(F)\}.$$

Знайдемо множину істинних порядків $OrdF$ для прикладів 1 та 2.

Розглянемо функцію $F(\tau, r) = \tau r$. Покажемо, що $OrdF = \partial K(F)$, де $K(F)$ визначено співвідношенням (8). Нехай $\alpha < \alpha_0$ і $(\alpha_0, \beta_0) \in \partial K(F)$, тобто $\frac{1}{\alpha_0} + \frac{1}{\beta_0} = 1$. Тоді

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta_0} > \frac{1}{\alpha_0} + \frac{1}{\beta_0} = 1.$$

Отже, з огляду на (8), $(\alpha, \beta_0) \notin K(F)$. Випадок $\beta < \beta_0$ перевіряємо аналогічно. Тому точка (α_0, β_0) нормальна згідно з означенням 3 і $\partial K(F) \subset OrdF$. Оскільки $OrdF \subset \partial K(F)$, за означенням 4, то $OrdF = \partial K(F)$.

Покажемо, що $OrdF = \{(1,0) \cup (0,1)\}$ для функції $F(\tau, r) = \min(\tau, r)$, де $K(F)$ задане співвідношенням (9). Нехай $(\alpha_0, \beta_0) \in \partial K(F)$. З квадрантотвореності $Q(1,0)$ та $Q(0,1)$ множини $\{\alpha : \alpha < \alpha_0 \wedge (\alpha, \beta) \in Q(1,0)\}$, $\{\beta : \beta < \beta_0 \wedge (\alpha, \beta) \in Q(0,1)\}$ належать до $K(F)$, тому достатньо розглянути лише вершини квадрантів $Q(1,0)$ та $Q(0,1)$. З огляду на (9) множини $\{(\alpha, 0) : \alpha < 1\}$, $\{(0, \beta) : \beta < 1\}$ не належать до $K(F)$, тоді, за означенням 3, точки $(1,0)$ та $(0,1)$ є нормальними. Отже, $OrdF = \{(1,0) \cup (0,1)\}$.

1.2. Властивості характеристик зростання. Наступні леми дають нам змогу дослідити випадки, коли множина $OrdF$ складається з одного елемента.

Лема 2. *Нехай $F(\tau, r) = F_1(\tau) + F_2(r)$, де $F_1(\tau)$ і $F_2(r)$ невід'ємні функції,*

$$\rho_1^* = \varlimsup_{\tau \to \infty} \frac{\log F_1(\tau)}{\log \tau} < \infty \;\; і \;\; \rho_2^* = \varlimsup_{r \to \infty} \frac{\log F_2(r)}{\log r} < \infty. \tag{10}$$

Тоді $F(\tau, r)$ має пару істинних порядків (ρ_1, ρ_2) і

$$\rho_1 = \rho_1^*, \;\; \rho_2 = \rho_2^*. \tag{11}$$

Доведення. Нехай (α, β) є елементом множини $K(F)$. За означенням 1

$$\exists\, (\tau_0, r_0) \in Q \quad \forall\, (\tau, r) \quad (\tau > \tau_0, \quad r > r_0) \quad F_1(\tau) + F_2(r) \leqslant \tau^{\alpha} + r^{\beta},$$

звідки

$$\frac{\log F_1(\tau)}{\log \tau} \leqslant \frac{\alpha \log \tau + \beta \log r + \log 2}{\log \tau}.$$

Зафіксувавши r і спрямувавши τ до $+\infty$, отримаємо $\rho_1^* \leqslant \alpha$. Аналогічно $\rho_2^* \leqslant \beta$. Отже,

$$K(F) \subset Q(\rho_1^*, \rho_2^*). \tag{12}$$

Доведемо протилежне включення. Згідно з (10) для довільного ε існує τ_0 таке, що виконується така нерівність:

$$\frac{\log F_1(\tau)}{\log \tau} \leqslant \rho_1^* + \varepsilon,$$

для довільного $\tau \geqslant \tau_0$. Звідси отримуємо

$$F_1(\tau) \leqslant \tau^{\rho_1^* + \varepsilon}.$$

Аналогічно

$$F_2(r) \leqslant r^{\rho_2^*+\varepsilon}, \quad r > r_0.$$

Тобто, для довільного ε існують τ_0, r_0 такі, що

$$F_1(\tau) + F_2(r) \leqslant \tau^{\rho_1^*+\varepsilon} + r^{\rho_2^*+\varepsilon}$$

для довільних $\tau \geqslant \tau_0$, $r \geqslant r_0$. З довільності ε і за означенням 1 маємо $(\rho_1^*, \rho_2^*) \in K(F)$. Тому

$$\mathring{Q}(\rho_1^*, \rho_2^*) \subset K(F). \tag{13}$$

З огляду на (12) та (13) отримаємо

$$\overline{K(F)} = Q(\rho_1^*, \rho_2^*).$$

Отже,

$$OrdF = (\rho_1^*, \rho_2^*).$$

Згідно з означенням 5 одержимо (11). □

Лема 3. *Нехай* $F(\tau, r) = \max(F_1(\tau), F_2(r))$, *де* $F_1(\tau)$ *і* $F_2(r)$ *невід'ємні функції,*

$$\rho_1^* = \varlimsup_{\tau\to\infty} \frac{\log F_1(\tau)}{\log \tau} < \infty \quad i \quad \rho_2^* = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\log F_2(r)}{\log r} < \infty.$$

Тоді $F(\tau, r)$ *має пару істинних порядків* (ρ_1, ρ_2) *і*

$$\rho_1 = \rho_1^*, \quad \rho_2 = \rho_2^*.$$

Доведення. Нехай $(\alpha, \beta) \in K(F)$. Правильні такі нерівності:

$$\frac{F_1(\tau) + F_2(r)}{2} \leqslant \max\left(F_1(\tau), F_2(r)\right) = F(\tau, r) \leqslant F_1(\tau) + F_2(r). \tag{14}$$

З лівої нерівності (14) випливає

$$F_1(\tau) + F_2(r) \leqslant 2(\tau^\alpha + r^\beta) \quad \forall\, \tau \geqslant \tau_0 \quad \forall\, r \geqslant r_0.$$

Аналогічно до початку доведення леми 2 одержимо включення

$$K(F) \subset Q(\rho_1^*, \rho_2^*).$$

Використовуючи праву нерівність (14), як і у доведенні леми 2, маємо протилежне включення

$$\mathring{Q}(\rho_1^*, \rho_2^*) \subset K(F).$$

□

2. Характеристики зростання голоморфних і мероморфних в кільцях функцій.

2.1. Максимум модуля голоморфних в кільцях фунцій.

Означення 6. *Нехай* $A_{\frac{1}{\tau}r} = \{z \;:\; \frac{1}{\tau} < |z| < r\}$ *і нехай* f *голоморфна функція в* $\overline{A_{\frac{1}{\tau}r}}$. *Визначимо*

$$M(\tau, r; f) = \max\{|f(z)| \;:\; \frac{1}{\tau} \leqslant |z| \leqslant r\}, \;\; \tau \geqslant 1, r \geqslant 1;$$
$$M(t; f) = \max\{|f(z)| \;:\; |z| = t\}.$$

Теорема A [1]. *Якщо f голоморфна в $A_{\frac{1}{\tau}r}$ і $\frac{1}{\tau} < a < t < b < r$, тоді*

$$\log M(t; f) \leqslant \frac{\log \frac{b}{t}}{\log \frac{b}{a}} \log M(a) + \frac{\log \frac{t}{a}}{\log \frac{b}{a}} \log M(b).$$

Іншими словами, $\log M(t; f)$ *є опуклою функцією* $\log t$.

Теорема 1. *Нехай f голоморфна функція в $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Тоді $\log M(\tau, r; f)$ є неперервною, неспадною та опуклою стосовно логарифма по кожній зі змінних при фіксованій іншій. Якщо $K(\log M) \neq \emptyset$, то*

$$Ord \log M(\tau, r; f) = \{(\widetilde{\rho_1}, \widetilde{\rho_2})\}, \tag{15}$$

де

$$\widetilde{\rho_1} = \overline{\lim_{\tau\to\infty}} \frac{\log\log M(\frac{1}{\tau}; f)}{\log \tau}, \quad \widetilde{\rho_2} = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\log M(r; f)}{\log r}.$$

Доведення. Зафіксуємо одну зі змінних, нехай це буде τ. За теоремою Адамара про три кола, функція $\log M(r; f)$ є опуклою функцією $\log r$. Зафіксуємо тепер r. Функція $\log M(\frac{1}{\tau}; f)$ є опуклою стосовно $\log \tau$, оскільки правостороння похідна $\log M(\frac{1}{\tau}; f)$ за $\log \tau$, а саме

$$\log M(\frac{1}{\tau}; f)'_{\log \tau} = -\frac{1}{\tau} \log' M(\frac{1}{\tau}; f)$$

є неспадною при $\tau \geqslant 1$. За принципом максимуму модуля

$$M(\tau, r; f) = \max(M(\frac{1}{\tau}; f), M(r; f)). \tag{16}$$

Використовуючи (16) одержимо, що функція $\log M(\tau, r; f)$ опукла стосовно логарифма і неперервна по кожній зі змінних при фіксованій іншій.

Зафіксуємо τ. Звідси $A_{\frac{1}{\tau}r_1} \subset A_{\frac{1}{\tau}r_2}$ при $r_1 < r_2$, тоді $M(\tau, r_1; f) \leqslant M(\tau, r_2; f)$. Аналогічно для фіксованого r. Отже, функція $\log M(\tau, r; f)$ є неспадною по кожній зі змінних при фіксованій іншій.

Якщо $K(\log M) \neq \emptyset$, то рівність (15) одержуємо з леми 3. □

2.2. Пара істинних порядків неванліннової характеристики $T(\tau, r; f)$. Нехай функція f мероморфна в $\overline{A_{\frac{1}{\tau}r}}$.

Позначимо

$$m(\tau, r; f) = m(\frac{1}{\tau}, f) + m(r, f) - 2m(1, f),$$

де $m(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta$.

Означення 7 [2]. *Функція*

$$T(\tau, r; f) = m(\tau, r; f) + N(\tau, r; f) + c_f \log \frac{\tau}{r}, \quad \tau \geqslant 1, \quad r \geqslant 1,$$

де

$$N(\tau, r; f) = \int_1^r \frac{n(\frac{1}{t}, 1; f)}{t} dt + \int_1^r \frac{n(1, t; f)}{t} dt + n(T; f) \log \sqrt{\tau r},$$

T – одиничне коло, $n(\frac{1}{\tau}, r; f)$ – кількість полюсів функції f в $A_{\frac{1}{\tau}r}$, $n(T; f)$ – кількість полюсів функції f на T.

$$c_f = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{E_f^+} Im(\frac{f'}{f}dz) + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{E_f^0} Im(\frac{f'}{f}dz),$$

$E_f^+ = \{z \in T : |f(z)| > 1\}, E_f^0 = \{z \in T : |f(z)| = 1\}$, *називається характеристикою Неванлінни функції f.*

Теорема B [2]. *Нехай $f(z)$ – мероморфна функція в кільці $A_{s_0 r_0}, s_0 < 1 < r_0$. Тоді функція $T(\tau, r, f)$, $\tau \geqslant 1$, $r \geqslant 1$ є невід'ємною, неперервною, неспадною і опуклою стосовно логарифма по кожній зі змінних при фіксованій іншій.*

Позначимо $T_1(\tau) = T(\tau, 1; f)$, $T_2(r) = T(1, r; f)$.

Теорема 2. *Нехай f мероморфна функція в $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Якщо $K(T) \neq \emptyset$, то*

$$OrdT(\tau, r; f) = \{(\rho_1^*, \rho_2^*)\},$$

де

$$\rho_1^* = \overline{\lim_{r\to\infty}}\ \frac{\log T_1(\tau, f)}{\log \tau}, \quad \rho_2^* = \overline{\lim_{r\to\infty}}\ \frac{\log T_2(r, f)}{\log r}.$$

Доведення. З означення 7 випливає, що $T(\tau, r; f) = T_1(\tau) + T_2(r)$. Якщо $A_{s_0 r_o} = \mathbb{C}\backslash\{0\}$, то з теореми B функція $T(\tau, r; f)$ є неспадною по кожній зі змінних при фіксованій іншій. Отож, функція $T_2(r)$ є неспадною. Аналогічно для $T_1(\tau)$. Отож, згідно з лемою 2 $T(\tau, r; f)$ має пару істинних порядків (ρ_1^*, ρ_2^*). $\square$

1. *Rudin W.* Real and Complex Analysis / *Rudin W.* – McGraw-Hill, 1970.
2. *Kondratyuk A.A.* Meromorphic functions with several essential singularities, I / *Kondratyuk A.A.* // Matematychni Studii. – 2008. – Vol. 30. – P. 125-131.

TWO-PARAMETER GROWTH CHARACTERISTICS OF NONNEGATIVE AND MEROMORPHIC FUNCTIONS IN THE ANNULUS

[1]Oksana GNATIUK, [2]Olga GRESHKO, [3]Ostap STASHYSHYN

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: [1]oksanka.gnatyuk@gmail.com, [2]olgagreshko@gmail.com,
[3]ostap.stashyshyn@gmail.com

The notion of growth order is generalized for nonnegative functions of two variables. It allowes to introduce and study two-parameter growth characteristics of holomorphic and meromorphic functions in annuli.

Key words: the set of veritable orders, the couple of veritable orders, analytic function, meromorphic function.

ДВУПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РОСТА НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ И МЕРОМОРФНЫХ В КОЛЬЦЕ ФУНКЦИЙ

[1]Оксана ГНАТЮК, [2]Ольга ГРЕШКО, [3]Остап СТАШИШИН

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000, Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: [1]*oksanka.gnatyuk@gmail.com,* [2]*olgagreshko@gmail.com,*
[3]*ostap.stashyshyn@gmail.com*

Понятие порядка роста обобщается для неотрицательных функций двух переменных. Это разрешает вводить и изучать двупараметрические характеристики роста голоморфных и мероморфных функций в кольце.

Ключевые слова: множество истинных порядков, пара истинных порядков, аналитическая функция, мереморфная функция.

Стаття надійшла до редколегії 26.05.2009

Прийнята до друку 16.12.2009