

УДК 539.4

## ВИКОРИСТАННЯ ПРЯМОГО МЕТОДУ ВИРІЗУВАННЯ ПРИ ДОСЛІДЖЕННІ ПОЗДОВЖНЬОГО ЗСУВУ ПІВПРСТОРУ З ДОВІЛЬНО ОРІЄНТОВАНОЮ СТРІЧКОВОЮ НЕОДНОРІДНІСТЮ

Кирил ВАСІЛЬЄВ<sup>1</sup>, Георгій СУЛИМ<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України,  
79060, Львів, вул. Наукова, 36  
e-mail: kirill.all@gmail.com*

<sup>2</sup> *Львівський національний університет імені Івана Франка,  
79000, Львів, вул. Університетська, 1  
e-mail: sulym@franko.lviv.ua*

Проаналізовано застосування прямого методу вирізування до задачі півпростору з орієнтованою під кутом стрічковою неоднорідністю. Показано, що орієнтація включення суттєво впливає на довжину моделюючих елементів. Наведено аналіз коефіцієнтів інтенсивності напружень неоднорідності для різних крайових умов і навантаження включення. Запропоновано також методи моделювання за допомогою прямого методу вирізування півпростору з навантаженням на нескінченості.

*Ключові слова:* метод вирізування, КІН, півпростір, стрічкове включення, антиплоска деформація.

**1. Вступ.** Одним із доволі поширених методів розв'язування двовимірних задач теорії пружності є метод інтегральних перетворень. Дослідник, що розв'язує задачу за допомогою цього методу переважно вирішує дві проблеми – вибір інтегрального перетворення, що найліпше підходить до досліджуваної області і форми неоднорідностей, а також проведення обернень аналітичними, чи аналітико-числовими методами. Наприклад, для смуги зі стрічковими неоднорідностями [1, 2] розв'язок можна побудувати за допомогою інтегрального перетворення Фур'є, для клина – за допомогою інтегрального перетворення Мелліна і т. ін. Використання “прямого методу вирізування” (ПМВ) [3] дає змогу дослідити задачі для скінченних і частково обмежених тіл різної форми з неоднорідностями без додаткових аналітичних викладок.

Цей метод полягає у моделюванні крайових умов обмеженого тіла за допомогою введення у розгляд тонкостінних об'єктів – тріщин (щілин) та абсолютно жорстких включень (АЖВ) великих, але скінченних лінійних розмірів. За допомогою таких неоднорідностей з простору ніби “вирізується” необхідне обмежене тіло. Крайові умови першого чи другого роду задають, навантажуючи береги моделюючої тріщини, чи переміщуючи береги моделюючого АЖВ відповідно. Як результат – обмежене тіло з включеннями при заданих на його межах крайових умовах моделюється задачею, зокрема для простору, з дещо збільшеною кількістю тонких неоднорідностей, для якого безпосередньо й розв'язується простіша за структурою система сингулярних інтегральних рівнянь (ССІР) збільшеного розміру.

Раніше [3] прямиий метод вирізування був апробований на низці прикладів задач дослідження напружено-деформованого стану шаруватих структур із симетрично навантаженими стрічковими тріщинами, які паралельні до межі області. Зокрема, розглядалися задачі для півпростору, смуги та з'єднаної з півпростором смуги за антиплоскої деформації. Зрозуміло, що симетрія стосовно осі і простий спосіб навантаження тріщини відіграли важливу роль у ефективному моделюванні тіла за допомогою методу вирізування. Виявилось, що коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН) тріщини, отриманий за допомогою ПМВ, вже за десятиразової, порівняно з основною неоднорідністю, довжини моделюючих елементів відрізняється від КІН тріщини, отриманого за безпосереднього розв'язування відповідних задач без використання методу вирізування менше, ніж на 0,01%. Результати застосування ПМВ до задач теорії тріщин виявилися дуже близькими до значень, отриманих у працях [4, 5], де для побудови інтегральних рівнянь задачі про півпростір із тунельними тріщинами було використано непрямий метод вирізування – моделювання межі тіла тріщиною безмежної довжини з наступним вилученням з системи рівнянь відповідної функції стрибка.

Цього разу метод вирізування апробуємо на антиплоскій задачі для півпростору з орієнтованими під кутом стрічковими неоднорідностями, оскільки ця задача є досить простою і добре відомою в літературі [1, 6].

**2. Простір з тонкими включеннями довільного розташування й орієнтації.** У працях [1, 3, 7] були подані формули для визначення напружено-деформованого стану простору, півпростору і двох ідеально з'єднаних півпросторів із довільною кількістю тонких стрічкових неоднорідностей стосовно функцій стрибків напружень і переміщень на осьових лініях неоднорідностей за антиплоскої деформації.

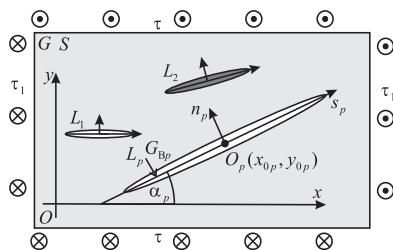


Рис. 1. Простір зі стрічковими неоднорідностями за дії однорідного навантаження

Нагадаємо методику побудови розв'язку для найпростішого випадку – простору з довільною кількістю включень, яка потрібна для моделювання однорідного тіла, зокрема з включеннями, обмеженого прямолінійними лініями. У просторі з модулем пружності  $G$ , переріз якого площиною  $z = 0$  дає площину  $S$ , розміщено  $N + 1$  стрічкове включення. Позначимо  $L'_p$  – осьові лінії перерізу включень площиною  $xOy$ , які належать осям  $L_p$  ( $p = \overline{0, N}$ ). Координати центру кожної з неоднорідностей –  $(x_{0p}, y_{0p})$ ; кут орієнтації осі –  $\alpha_p$ ; ширина –  $2h_p$ ; довжина –  $2a_p$ ; модуль зсуву –  $G_{Bp}$  ( $p = \overline{0, N}$ ) (рис. 1). Вважаємо, що на нескінченності задане стале навантаження  $\sigma_{xz}^\infty = \tau, \sigma_{yz}^\infty = \tau_1$ .

Згідно з принципом суперпозиції, напружено-деформований стан (НДС) простору з  $N + 1$  включенням зводиться до суми: 1) однорідного розв'язку, породженого зовнішнім навантаженням простору без включень (позначатимемо його нулем серед верхніх індексів); 2) основного збуреного розв'язку, породженого включеннями у безмежному середовищі (позначатимемо його циркумфлексом (“^”) і нулем серед верхніх індексів). Однорідний розв'язок, породжений однорідним навантаженням, подамо у вигляді

$$\sigma_{yz}^0 + i\sigma_{xz}^0 = \tau + i\tau_1. \quad (1)$$

Збурений розв'язок подається через заздалегідь невідомі функції стрибків напружень і похідних переміщень  $f_{3p}, f_{6p}$  ( $p = \overline{0, N}$ ) на осьових лініях неоднорідностей у просторі [1, 3]. Тому НДС простору з  $N + 1$  включенням у декартовій системі координат характеризує вираз

$$\sigma_{yz} + i\sigma_{xz} = \sigma_{yz}^0 + i\sigma_{xz}^0 + (\hat{\sigma}_{yz}^0 + i\hat{\sigma}_{xz}^0), \quad (2)$$

де

$$\hat{\sigma}_{yz}^0 + i\hat{\sigma}_{xz}^0 = \frac{i}{2\pi} \sum_{p=0}^N \int_{L'_p} \frac{f_{3p}(t) + iGf_{6p}(t)}{t \exp(i\alpha_p) - (z - z_{0p})}, \quad z_{0p} = x_{0p} + iy_{0p}. \quad (3)$$

Для визначення невідомих функцій стрибка  $f_{3p}, f_{6p}$  треба скористатися умовами взаємодії матриці з  $p$ -м включенням. Наприклад, у випадку симетричного навантаження берегів тріщини напруженнями  $\tau_{Bp}$  умови взаємодії матимуть простий вигляд  $\{\sigma_{nz}^{p+} + \sigma_{nz}^{p-} = 2\tau_{Bp}, \sigma_{nz}^{p+} - \sigma_{nz}^{p-} = 0\}$ . Дещо складнішими, проте й універсальнішими є умови взаємодії для ненавантаженого включення з довільним модулем зсуву [1, 8] та узагальнені на випадок прикладеного до берегів  $p$ -го включення симетричного напруження  $-\tau_{Bp}$  умови взаємодії [3]

$$(\sigma_{sz}^{p+} + \sigma_{sz}^{p-}) + \frac{G}{G_{Bp}h_p} \int_{-a_p}^{s_p} (\sigma_{nz}^{p+} - \sigma_{nz}^{p-}) d\xi = 2 \frac{G}{G_{Bp}} \sigma_{sz}^{cp}(-a_p), \quad (4)$$

$$(\sigma_{nz}^{p+} + \sigma_{nz}^{p-} + 2\tau_{Bp}) - \frac{G_{Bp}}{Gh_p} \int_{-a_p}^{s_p} (\sigma_{sz}^{p+} - \sigma_{sz}^{p-}) d\xi = w_p^* \frac{G_{Bp}}{h_p} + G_{Bp} \left( \frac{\sigma_{nz}^{0p+}}{G} + \frac{\sigma_{nz}^{0p-}}{G} \right).$$

Тут  $s_p O_p n_p$  – локальна система координат відповідного включення з початком у центрі неоднорідності;  $\sigma_{nz}^{p\pm}, \sigma_{sz}^{p\pm}$  – напруження на верхньому (+) і нижньому (–) берегах  $p$ -го включення;  $\sigma_{nz}^{0p\pm}, \sigma_{sz}^{0p\pm}$  – однорідні напруження у тілі без включень у місцях берегів  $p$ -го дефекту, записані у його локальній системі координат;  $\sigma_{sz}^{cp}(-a_p), w_p^*$  –

апріорні торцьові сталі, що визначаються формулами [1, 3, 8]

$$\sigma_{sz}^{cp}(-a_p) = \sigma_{sz}^{0p}(-a_p) \tau_{zp}, \quad \tau_{zp} = \frac{G_{Bp}}{\max(G_{Bp}, G)};$$

$$w_p^* = 2h_p(s_p) \sigma_{nz}^{0p}(s_p) w_{p-}^*, \quad w_{p-}^* = \frac{\min(G_{Bp}, G)}{G^2}.$$

Так звана основна модель взаємодії [8] враховує підкреслений у (4) доданок, плівкова модель його до відома не бере. Умови (4) у своїх граничних випадках дають умови взаємодії для навантаженої симетричними зусиллями  $\tau_{Bp}$  тріщини ( $G_{Bp} \rightarrow 0$ ) та для АЖВ ( $G_{Bp} \rightarrow \infty$ ). Для пружного включення з проміжними властивостями умови (4) є наближеними.

Для використання виразів напружень (2) в умовах взаємодії (4) треба знайти напруження на берегах кожної неоднорідності. Тому для кожного включення перейдемо від основної системи координат  $xOy$  до локальної  $s_pO_pn_p$  включення на підставі формул

$$\sigma_{nz}^p + i\sigma_{sz}^p = [\sigma_{yz} + i\sigma_{xz}] \exp(i\alpha_p),$$

$$z = x + iy = \tilde{z}_p \exp(i\alpha_p) + z_{0p} = (s_p + in_p) \exp(i\alpha_p) + (x_{0p} + iy_{0p}). \quad (5)$$

Згідно з формулою Сохоцького-Племелі [9] та урахуванням (2), (5), напружений стан на верхньому і нижньому берегах  $p$ -го включення матиме вигляд

$$\sigma_{nz}^{p\pm} + i\sigma_{sz}^{p\pm} = (\sigma_{nz}^{0p\pm} + i\sigma_{sz}^{0p\pm}) + (\hat{\sigma}_{nz}^{0p\pm} + i\hat{\sigma}_{sz}^{0p\pm}) + \sum_{k=0, k \neq p}^N (\hat{\sigma}_{nz}^{0pk} + i\hat{\sigma}_{sz}^{0pk}), \quad (6)$$

де

$$\hat{\sigma}_{nz}^{0p\pm} + i\hat{\sigma}_{sz}^{0p\pm} = \mp \frac{1}{2} [f_{3p}(t) + iGf_{6p}(t)] + \frac{i}{2\pi} \int_{L'_p} \frac{f_{3p}(t) + iGf_{6p}(t)}{t - s_p} dt \quad (7)$$

визначає напружено-деформований стан на верхньому (+) і нижньому (-) берегах  $p$ -го включення за відсутності інших неоднорідностей у просторі з модулем зсуву  $G$ ;

$$\hat{\sigma}_{nz}^{0pk} + i\hat{\sigma}_{sz}^{0pk} = \frac{i}{2\pi} \int_{L'_k} (f_{3k}(t) + iGf_{6k}(t)) / (t \exp[i(\alpha_k - \alpha_p)] - [s_p - (z_{0k} - z_{0p}) \exp(-i\alpha_p)]) dt \quad (8)$$

відповідає за збурення НДС на поверхні  $p$ -го включення від впливу  $k$ -го включення у локальній системі координат  $p$ -го включення. Підставляючи (6) в умови взаємодії (4) з урахуванням (7), (8) для  $N+1$  включення отримаємо  $2N+2$  сингулярні інтегральні рівняння (СІР) вигляду

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a_p}^{a_p} \frac{f_{3p}(t)}{t - s_p} dt - \frac{G}{G_{Bp} h_p} \int_{-a_p}^{s_p} f_{3p}(t) dt + 2\hat{\sigma}_{sz}^{1p}(s_p) = 2 \frac{G}{G_{Bp}} \sigma_{sz}^{cp}(-a_p) -$$

$$- [\sigma_{sz}^{0p+}(s_p) + \sigma_{sz}^{0p-}(s_p)],$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a_p}^{a_p} \frac{f_{6p}(t)}{t - s_p} dt - \frac{G_{Bp}}{G h_p} \int_{-a_p}^{s_p} f_{6p}(t) dt - \frac{2}{G} \hat{\sigma}_{nz}^{1p}(s_p) = -w_p^* \frac{G_{Bp}}{G h_p} -$$

$$- \frac{G_{Bp}}{G^2} (\sigma_{nz}^{0p+} + \sigma_{nz}^{0p-}) + \frac{1}{G} (\sigma_{nz}^{0p+}(s_p) + \sigma_{nz}^{0p-}(s_p)), \quad s_p \in [-a_p, a_p] \quad (p = \overline{0, N})$$

стосовно невідомих функцій стрибків  $f_{3p}, f_{6p}$  ( $p = \overline{0, N}$ ). Тут

$$\hat{\sigma}_{nz}^{1p}(s_p) + i\hat{\sigma}_{sz}^{1p}(s_p) = \sum_{k=0, k \neq p}^N (\hat{\sigma}_{nz}^{0pk} + i\hat{\sigma}_{sz}^{0pk}).$$

**3. Застосування методу вирізування.** Розв'язавши ССІР (9), зокрема методом колокацій [1, 10], можна визначити невідомі функції стрибка і за (2) знайти напружено-деформований стан простору зі стрічковими неоднорідностями. Дослідимо можливість застосування методу вирізування до тіл із довільно орієнтованими стрічковими включеннями та тріщинами. Зокрема, детально дослідимо задачі визначення напружено-деформованого стану півпростору з довільно орієнтованою неоднорідністю за різних крайових умов. Згідно з процедурою методу вирізування вільний край тіла моделюватимемо великою паралельною до осі  $Ox$  тріщиною за нульового навантаження на її берегах. Навантажений край тіла – тріщиною (щільною), береги якої навантажені бажаними напруженнями. Аналогічно защемлений край моделюється великим абсолютно жорстким включенням за нульового натягу його поверхні. Оскільки для універсальності схеми розв'язування ми використовуємо умови взаємодії для пружного включення з матрицею (4), то тріщини моделюватимемо тонкими включеннями певної товщини з дуже малим відносним модулем зсуву  $k_p = G_{Bp}/G$ . Застосовуючи метод вирізування, вивчатимемо збіжність КІН для досліджуваної неоднорідності до результатів, отриманих за допомогою асимптотичних методів [11], а також результатів, отриманих за допомогою безпосереднього розв'язування відповідних задач без використання методу вирізування на підставі [1, 6]. КІН для стрічкової неоднорідності обчислюємо згідно з [1, 6, 12] на підставі знайдених функцій стрибків напружень і переміщень на осевій лінії неоднорідності.

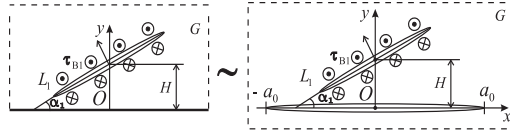


Рис. 2. Моделювання півпростору з тріщиною за допомогою простору і додаткової неоднорідності

Дослідимо збіжність ПМВ на прикладі дослідження напружено-деформованого стану півпростору  $y > 0$  зі симетрично навантаженою напруженнями  $\tau_{B1} = \text{const}$  тріщиною. Вважатимемо, що тріщина з осью ліній перерізу  $L'_1$  завдовжки  $2a_1$ , товщини  $2h_1$  із центром у  $(0, H)$ , нахилена під кутом  $\alpha_1$  до осі  $Ox$ .

Відповідно до методу розглянемо безмежний простір з такою самою неоднорідністю та навантаженням і додатковим вільним від навантаження (натягу) пружним включенням (рис. 2) з центром у  $(0, 0)$ , який має відносний модуль зсуву  $k_0 = 10^{-7}$  і моделює вільний край півпростору, або  $k_0 = 10^7$  у випадку моделювання жорстко защемленого краю. Спочатку проаналізуємо випадок вільного краю півпростору.

У таблиці подано деякі результати обчислення нормованого КІН  $K_{31}^{0\pm} = K_{31}^{\pm} / (\tau_{B1} \sqrt{\pi a_1})$  для правої (+) і лівої (-) вершин тріщини. Використовували такі параметри задач:  $a = a_0/a_1$  – відносна довжина моделюючого елемента;  $H = 1, 25a_1$  – відстань від центра досліджуваної неоднорідності до краю. Напруження на безмежності  $\tau = \tau_1 = 0$ , відносні товщини неоднорідностей  $h_k = 0, 1a_1$  ( $k = 0, 1$ ).

Значення нормованого КІН для тріщини у змодельованому півпросторі з вільним краєм для різних довжин моделюючого елемента

$\alpha_1$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$a$	$K_{31}^{0+}$			$K_{31}^{0-}$		
0,3	1,0026	1,0029	1,0009	1,0090	1,0178	1,0138
1	1,0191	1,0175	1,0169	1,0641	1,0780	1,1058
2	1,0391	1,0389	1,0423	1,0908	1,1175	1,1718
4	1,0558	1,0589	1,0657	1,1080	1,1442	1,2099
8	1,0620	1,0674	1,0765	1,1143	1,1539	1,2236
12	1,0632	1,0692	1,0790	1,1156	1,1559	1,2266
20	1,0639	1,0702	1,0803	1,1162	1,1570	1,2280
30	<b>1,0641</b>	<b>1,0705</b>	<b>1,0809</b>	<b>1,1165</b>	<b>1,1574</b>	<b>1,2285</b>
$\infty$	<b>1,0642</b>	<b>1,0707</b>	<b>1,0810</b>	<b>1,1166</b>	<b>1,1575</b>	<b>1,2288</b>
Формула (10)	1,0638	1,0730	1,0831	1,1090	1,1285	1,1472

У передостанньому рядку таблиці зі значенням “ $a = \infty$ ” подано результати, які отримали внаслідок безпосереднього розв’язування методом колокацій ССІР задачі для півпростору  $y > 0$  з тріщиною  $L'_1$  [1]. В останньому рядку подано результати обчислень на основі асимптотичної залежності [11]

$$K_{31}^{0\pm} = 1 + \lambda^2/8 \mp \lambda^3 \sin \alpha/16 + \lambda^4 (2 - 9 \cos 2\alpha)/128 + O(\lambda^5), \quad \lambda = a_1/H. \quad (10)$$

Зазначимо, що зростання моделюючого елемента для цього прикладу супроводжується суттєвим збільшенням кількості  $N_1$  членів розкладів функцій стрибків у ряди згідно з методом колокацій [1, 10]. Наприклад, за вертикальної орієнтації тріщини для  $a = 2$  вистачає  $N_1 = 40$ , для  $a = 12 - N_1 = 200$ , а для  $a = 30 - N_1 = 800$  членів рядів за поліномами Чебишова для обчислень КІН з похибкою меншою за 0,1%. Для порівняння у випадку горизонтальної орієнтації тріщини для  $a = 30$  вистачає  $N_1 = 80$  членів ряду. Зрозуміло, що зближення неоднорідностей також приводить до збільшення кількості членів ряду  $N_1$ .

Як видно з таблиці, орієнтація неоднорідності суттєво впливає на необхідну для забезпечення бажаної точності обчислень довжину моделюючого елемента. Зокрема, для отримання похибки не більше 0,01% порівняно з результатом, отриманим без використання ПМВ, довжина моделюючого елемента повинна становити  $a_0 > 30a_1$ . Нагадаємо, що для тріщини, яка паралельна до межі півпростору, ця ж точність досягалася вже за  $a_0 = 10a_1$  [3]. Зазначимо також, що дещо більша, але цілком прийнятна похибка у 1% досягається вже за відносної довжини моделюючої тріщини  $a = 12$ . Зі зменшенням відносної довжини моделюючого елемента узагальнений КІН тріщини прямує до відповідних значень для одного дефекту в просторі (одиниці). Тобто, збурювальний вплив додаткової тріщини прямує до нуля. Спостерігаємо також, що зі збільшенням кута орієнтації досліджуваної тріщини за сталої довжини моделюючого елемента, відносна похибка отриманих результатів зростає. Наприклад, при значенні  $a = 12$  відносна похибка обчислення КІН  $K_{31}^{0-}$  для  $\alpha = \pi/4$  дорівнює приблизно 0,089%, а для  $\alpha = \pi/2$  – близько 0,179%. З даних таблиці також можна зробити висновок про міру точності асимптотичного розв’язку (10). Оскільки результати, отримані безпосереднім розв’язуванням задачі і за допомогою методу

вирізування практично збігаються, то відповідні результати можна вважати близькими до точних. Найбільше відхилення асимптотичних КІН від отриманих ПМВ результатів досягається за вертикальної орієнтації неоднорідності для вершини тріщини, що найближча до краю півпростору і дорівнює приблизно 7%.

Тепер розглянемо випадок моделювання півпростору з жорстко защемленим краєм і навантаженою однорідними зусиллями тріщиною за допомогою ПМВ і проаналізуємо вплив кута орієнтації тріщини на КІН (рис. 3). Для цього прикладу спостерігаємо протилежну тенденцію, а саме ліпшу збіжність для вертикальної орієнтації тріщини ( $\alpha = \pm\pi/2$ ), і гіршу для орієнтації, що близька до горизонтальної.

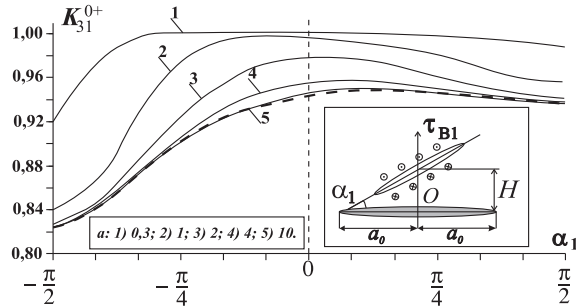


Рис. 3. Нормований КІН для тріщини, що навантажена однорідними зусиллями у змодельованому півпросторі з жорстко защемленим краєм

Зауважимо, що за відносної довжини  $a = 10$  моделюючого АЖВ (лінія 5 на рис. 3) КІН для тріщини практично збігається зі значенням КІН, отриманим безпосереднім розв'язуванням задачі без використання ПМВ (на рис. 3 – пунктирна лінія) з похибкою до 1%. Зазначимо також, що за горизонтальної орієнтації тріщини для досягнення похибки у 0,01% необхідно брати відносну довжину моделюючого АЖВ  $a > 30$ . Для порівняння аналогічна задача для півпростору з вільними краями і навантаженою горизонтальною тріщиною вимагає лише  $a \geq 10$  відносної довжини моделюючого елемента [3].

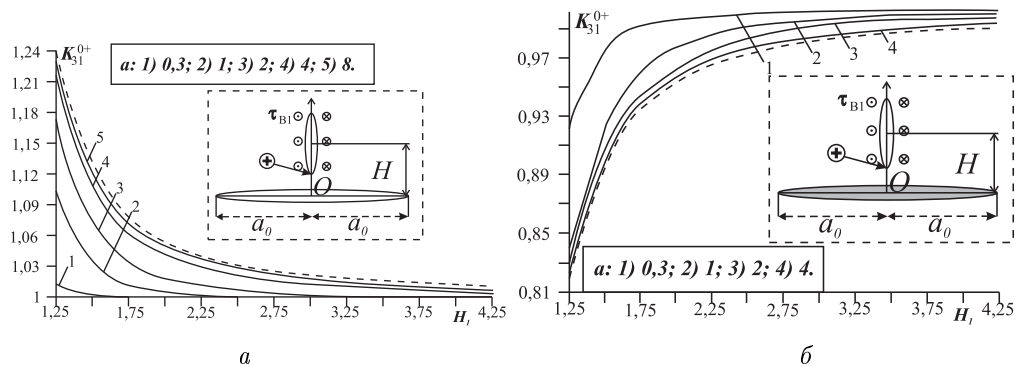


Рис. 4. Дослідження впливу відносної відстані  $H_1$  на нормований КІН тріщини у змодельованому ПМВ півпросторі для вільного  $a$  і защемленого  $b$  краю за різних відносних довжин моделюючого елемента  $a$

Проаналізуємо вплив відносної відстані  $H_1 = H/a_1$  заглиблення центра тріщини на вибір відносної довжини моделюючого елемента  $a$  для вертикальної орієнтації ( $\alpha = -\pi/2$ ) тріщини у півпросторі з вільними (рис. 4 а) чи защемленими (рис. 4 б) краями.

Пунктирною лінією на рис. 4 подано графік КІН для тріщини у півпросторі без застосування ПМВ. Як і очікувалося, зі збільшенням відносної відстані  $H_1$  вплив моделюючого елемента, чи берега півпростору зменшується, а отже, зменшується похибка обчислень КІН.

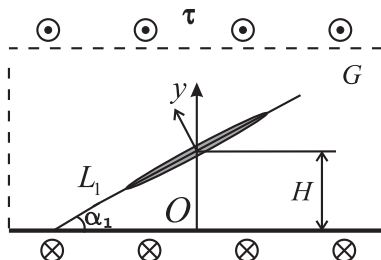


Рис. 5. Півпростір з пружним включенням і навантаженням на безмежності

Отже, ПМВ дає змогу отримати хороші результати для навантаженої тріщини у півпросторі. Тепер розглянемо випадок пружного включення і способи застосування ПМВ у задачах з однорідним навантаженням на безмежності. Дослідимо задачу для пружного включення з осью лінійного перерізу  $L'_1$  у півпросторі  $y > 0$ , навантаженому однорідним навантаженням  $\tau$  на безмежності (рис. 5) та проаналізуємо вплив модуля зсуву включення на КІН. Довжина включення  $2a_1$ , товщина  $2h_1$ , центр – у  $(0, H)$ , кут орієнтації щодо осі  $Ox$  дорівнює  $\alpha_1$ . Зображену на рис. 5 задачу можна за допомогою ПМВ змодельовати кількома способами.

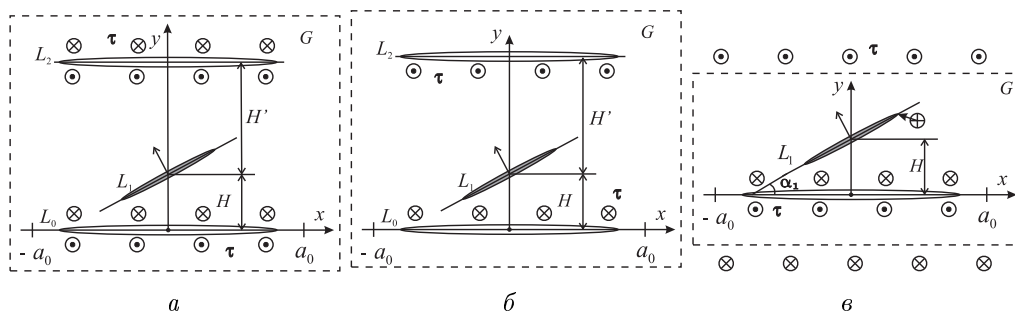


Рис. 6. Моделювання за допомогою ПМВ задачі для півпростору з пружним включенням і навантаженням на безмежності

Перший – у вільному від зовнішнього навантаження просторі з неоднорідністю за допомогою двох додаткових тріщин, береги яких можуть бути симетрично навантажені напруженнями  $\tau_{B0} = \tau_{B2} = \tau$ , (рис. 6 а), або може бути навантажений лише один з двох берегів моделюючих елементів (рис. 6 б). Відстань  $H'$  від центра досліджуваної неоднорідності до тріщини з віссю  $L_2$  для правильного моделювання повинна бути досить довгою порядку  $H' \geq 7a_1$ , щоб забезпечити відсутність впливу



берегів тріщини на досліджуване включення. Задача на рис. 6 а легко реалізується за допомогою розглянутих у частині 2 формул. Для задачі рис. 6 б треба або модифікувати умови взаємодії (4), або записати УВ для тріщини з заданим навантаженням лише одного берегу.

Оскільки доцільно, щоб ПМВ в загальному випадку міг працювати з довільною кількістю включень і використовувати довільні крайові умови, то модифікація УВ (4) для можливості задання довільного навантаження і натягу на берегах неоднорідності є необхідною умовою для універсалізації способу розв'язування. Оскільки досліджувану на рис. 5 задачу можна ефективно розв'язати за допомогою вже записаних формул, то такий підхід у цій праці розглядати не будемо.

Існує також другий простий спосіб (рис. 6 в), який найефективніший для дослідження за допомогою ПМВ розглядуваної задачі. Розглянемо простір із досліджуваним включенням, навантажений симетричними зусиллями  $\tau$  на безмежності. Навантажений вільний берег півпростору моделюємо за допомогою навантаженої симетричними зусиллями  $\tau_{B0} = \tau$  тріщини (рис. 6 в). При обчисленнях вважатимемо, що  $h = 0, 1a_1$  і включення розташоване на відстані  $H = 1, 25a_1$  від моделюючого елемента. Вважатимемо також, що  $K_{3j}^{0+} = K_{3j}^+ / (\tau \sqrt{\pi a_1})$  ( $j = 1, 2$ ).

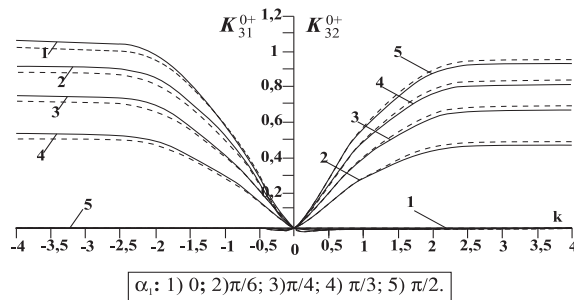


Рис. 7. Нормовані узагальнені КІН для неоднорідності залежно від відносного модуля зсуву включення

Суцільними лініями на рис. 7 побудовані графіки залежностей узагальнених КІН  $K_{31}^{0+}$  (ліва частина рисунка) і  $K_{32}^{0+}$  (права частина) від відносного модуля зсуву  $k = \lg(G_{B1}/G)$  для відносної довжини моделюючої тріщини  $a = 10$ . Можна зазначити, що така довжина забезпечила меншу від 0,1% похибку щодо результатів, отриманих без використання ПМВ. Для порівняння пунктирними лініями на рис. 7 показано графіки залежностей  $K_{3j}^{0+}$  від  $k$  за відносної довжини моделюючого елемента  $a = 1$ . Максимальна різниця між результатами, отриманими при  $a = 10$  і  $a = 1$ , дорівнює близько 4%. Причому з зростанням відносного модуля зсуву до нуля різниця між результатами обчислення КІН для  $a = 1$  і  $a = 10$  зменшується. Максимальна різниця отримується для крайніх випадків пружного включення – АЖВ і тріщини.

**4. Висновки.** У цій праці апробація прямого методу вирізування виконана на задачах тонких довільно орієнтованих стрічкових неоднорідностей (тріщин і включень) у півпросторі. Виявилось, що орієнтація неоднорідності та крайові умови задачі суттєво впливають на вибір параметрів методу вирізування, передусім довжину моделюючих елементів, які, для отримання результатів з похибкою не більше

0,1%, довелося доволі сильно збільшити (практично втричі порівняно з паралельною до границі області тріщиною [3]). Це призвело до суттєвого збільшення кількості розбиття за поліномами Чебишова у методі колокацій, а як наслідок – збільшення часу обчислення ССІР. Проте обчислення за допомогою ПМВ з прийнятною 1% похибкою виявилось сумірним за ефективністю з безпосереднім розв'язуванням задач без використання ПМВ. Також запропоновано й успішно апробовано простий спосіб моделювання за допомогою прямого методу вирізування задачі для півпростору з неоднорідністю і заданим на нескінченості навантаженням.

1. Сулим Г.Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями / Сулим Г.Т. – Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007.
2. Сулим Г.Т. Поздовжній зсув шаруватих анізотропних середовищ зі стрічковими неоднорідностями / Сулим Г.Т., Шевчук С.П. // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – Т. 41. – №3. – С. 90-97.
3. Васільєв К.В. Прямий метод вирізування для моделювання напружено-деформованого стану ізотропних шаруватих середовищ з тонкими неоднорідностями за антиплоского деформування / Васільєв К.В., Сулим Г.Т. // Машинознавство. – 2006. – №12. – С. 10-17.
4. Панасюк В.В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. – К.: Наук. думка, 1976.
5. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / Саврук М.П. – К.: Наук. думка, 1981.
6. Сулим Г.Т. Вплив пружного стрічкового включення на деформацію поверхні анізотропного півпростору за поздовжнього зсуву / Сулим Г.Т. // Мат. мет. та фіз.-мех. поля. – 2006. – Т. 49. – №3. – С. 125-130.
7. Божидарник В.В. Продольный сдвиг изотропной среды с системой туннельных разрезов / Божидарник В.В., Сулим Г.Т. // Вестн. Львов. политехн. ин-та. – 1990. – Вып. 243. – С. 10-12.
8. Сулим Г.Т. Антиплоская задача для системы линейных включений в изотропной среде / Сулим Г.Т. // Прикл. матем. и механика. – 1981. – Т. 45, №2. – С. 308-318.
9. Божидарник В.В. Елементи теорії пружності / Божидарник В.В., Сулим Г.Т. – Львів: Світ, 1994.
10. Божидарник В.В. Метод колокацій розв'язання системи сингулярних інтегральних рівнянь / Божидарник В.В., Сулим Г.Т. // Вісн. Львів. політехн. ін-ту. – 1990. – Вып. 242. – С. 8-13.
11. Саврук М.П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами / Саврук М.П. – К.: Наук. думка, 1988.
12. Божидарник В.В. Елементи теорії пластичності та міцності. Том. 2 / Божидарник В.В., Сулим Г.Т. – Львів: Світ, 1999.

**USE THE DIRECT CUTTING METHOD AT RESEARCH  
OF HALFSPACE WITH ARBITRARILY ORIENTED THIN  
BAND INCLUSION AT LONGITUDINAL SHEAR**

**Kyryl VASILEV<sup>1</sup>, Georgy SULYM<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Pidstryhach Institute for Applied Problem of Mechanics and Mathematics  
of National Academy of Science of Ukraine,  
79060, L'viv, Naukova Str., 3b  
e-mail: kirill.all@gmail.com*

<sup>2</sup>*Ivan Franko National University of L'viv,  
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1  
e-mail: sulym@franko.lviv.ua*

Use of a so-called direct method of a cutting to the task of halfspace with arbitrarily oriented thin band inclusion is investigated in the article. The cutting method consists in modelling of boundary conditions for the limited body with the help of thin objects – cracks and absolutely rigid inclusions. It was shown that the orientation of inclusion, and boundary conditions of the problem significantly affect to the choice of length of modelling elements. It was also suggested a simple method of modelling a halfspace with load at infinity by the method of a cutting.

*Key words:* halfspace, longitudinal shear, SIF, method of a cutting, thin band inclusion.

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРЯМОГО МЕТОДА ВЫРЕЗАНИЯ  
ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА  
ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ПРОИЗВОЛЬНО  
ОРИЕНТИРОВАННОЙ ЛЕНТОЧНОЙ  
НЕОДНОРОДНОСТЬЮ**

**Кирилл ВАСИЛЬЄВ<sup>1</sup>, Георгий СУЛИМ<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Институт прикладных проблем механики и математики  
им. Я. С. Подстригача НАН Украины,  
79060, Львов, ул. Наукова, 3б  
e-mail: kirill.all@gmail.com*

<sup>2</sup>*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,  
79000, Львов, ул. Университетская, 1  
e-mail: sulym@franko.lviv.ua*

Исследовано применение так называемого прямого метода вырезания к задаче полупространства с произвольно ориентированным ленточным включением. Метод вырезания состоит в моделировании краевых условий

для ограниченного тела с помощью тонкостенных объектов – трещин и абсолютно жестких включений. Было показано, что ориентация неоднородности, а также краевые условия задачи существенно влияют на выбор длины моделирующих элементов. Также предложен простой метод моделирования с помощью метода вырезания полупространства при нагрузке на бесконечности.

*Ключевые слова:* полуплоскость, продольный сдвиг, КИН, метод вырезания, тонкое ленточное включение.

Стаття надійшла до редколегії 01.07.2009

Прийнята до друку 16.12.2009