ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2009.
Вип. 71. С. 43–49

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech. Math. 2009.
Is. 71. P. 43–49

УДК 519.8, 336.761.6

ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ ОПТИМІЗАЦІЇ ФОНДОВОГО ПОРТФЕЛЯ ОПЦІОНІВ

Микола БУГРІЙ

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: ol_buhrii@i.ua*

У рамках нечітко-множинної теорії запропоновано метод розв'язування задачі оптимізації фондового портфеля опціонів європейського стилю на акції.

Ключові слова: фондовий портфель, опціони.

1. Вступ. Звичайною інвестиційною практикою в розвинутих країнах є розміщення коштів на фондовому ринку, оскільки сьогодні це більш вигідно, ніж інвестування, наприклад, у нерухомість. Така тенденція притаманна і фондовому ринку України, який, певною мірою, вже сформувався і перебуває в стадії інтенсивного розвитку й удосконалення.

Відомо, що вкладання коштів в цінні папери достатньо ризикова фінансова операція. Формуючи портфель цінних паперів, можна практично звести до нуля його несистематичний ризик: якщо деякі типи компонент портфеля матимуть низьку дохідність, то інші типи можуть певною мірою компенсувати втрати інвестора. Чим більш диверсифікований фондовий портфель ризикових цінних паперів, тим менший його рівень несистематичного ризику. Оптимальну диверсифікацію портфеля можна провести, зокрема класичними методами Марковіца [1] або Шарпа [2].

Значно складніша задача зменшення систематичного ризику фондового портфеля, який породжується невизначеністю зовнішнього середовища. Цього ризику практично неможливо уникнути, однак зменшити його рівень можна шляхом хеджування (або форсування) компонент портфеля ризикових цінних паперів похідними цінними паперами (деривативами), зокрема опціонами. Такі фондові портфелі умовно називають розширеними. Стосовно таких портфелів можна формулювати задачу про оптимальний вибір не тільки часткового співвідношення його компонент, а й глибини хеджування (або форсування) кожної ризикової компоненти опціонами.

Зазвичай під час формування розширених фондових портфелів опціони комбінують з підлеглим активом, на який вони виписані. Однак сьогодні учасники фондового ринку з метою отримання додаткових прибутків все частіше використовують стратегію формування фондового портфеля, який містить лише опціони, виписані на активи, практично відсутні в портфелі. Такі портфелі іноді називають фондовими портфелями опціонів на "віртуальні" активи.

Фондові портфелі опціонів досить ризикові. Однак за сприятливої кон'юктури фондового ринку такі портфелі можуть приносити їхнім власникам прибутки, які значно перевищують початкові затрати. Цей відомий факт спонукає до формування та оптимізації фондових портфелів опціонів не тільки фізичних, а й спеціальних інституційних інвесторів, яких називають хедж-фондами.

Якщо дохідності компонент портфеля опціонів вважати випадковими величинами з відомими ймовірнісними розподілами, то щільність розподілу дохідності портфеля можна знайти, наприклад, відомим чисельним методом Монте-Карло. Проте цей метод передбачає громіздку обчислювальну процедуру – десятки тисяч операцій на одну точку межі ефективності портфеля. Для об'ємних фондових портфелів чисельне розв'язування задачі оптимізації займає невиправдано багато оперативного часу.

Одним з можливих варіантів виходу з цієї ситуації є модельна зміна способу врахування невизначеності під час формулювання задачі оптимізації: перехід від випадкових величин до нечітких величин у рамках нечітко-множинної теорії [3]. Зокрема, в [4] в рамках цієї теорії запропоновано чисельний метод розв'язування задачі про оптимізацію фондового портфеля опціонів на "віртуальні" акції. В основу цього методу покладено ітераційний вибір часткового співвідношення у фондовому портфелі опціонів європейського стилю на акції з наступним уточненням глибини покриття кожної акції опціонами.

У рамках нечітко-множинної теорії пропонуємо один з можливих варіантів зведення задачі про оптимізацію фондового портфеля опціонів європейського стилю на акції до еквівалентної задачі математичного програмування. Це дає змогу (в загальному випадку на підставі методу дефазифікації [5]) не тільки ефективно використовувати стандартні прикладні пакети для розв'язування таких задач оптимізації, а й дає змогу значно зменшити затрати оперативного часу на цю процедуру.

2. Формулювання нечіткої задачі оптимізації та схема її розв'язування. Нехай на підставі експертних даних відомо, що ринкова ціна n типів акцій, наявних на фондовому ринку, протягом деякого періоду T зазнає різких коливань, однак експерти не можуть впевнено визначити напрям цих коливань. У цьому випадку учасники фондового ринку мають змогу отримати додатковий прибуток, сформувавши фондовий портфель лише з опціонів європейського стилю з різними цінами виконання терміном дії T на ці n типів акцій. Така опціонна стратегія має назву "стренгл" (strangle) [6].

Отже, в зазначених умовах інвестор формує фондовий портфель, який складається лише з n наборів call-опціонів і n наборів put-опціонів європейського стилю терміном дій T на n типів "віртуальних" акцій.

Позначимо через x_i $(i=\overline{1,n})$ – відносну частку в портфелі call-опціону з i-го набору, який повністю форсує акцію i-го типу (call-опціон "покриває" кожну грошову одиницю вартості акції), а через x_i $(i=\overline{n+1,2n})$ – відносну частку в портфелі put-опціону з i-го набору, який повністю хеджує акцію i-го типу (put-опціон "покриває" кожну грошову одиницю вартості акції). Всього фондовий портфель опціонів міститиме $2n$ компонент з відносними частками x_i $(i=\overline{1,2n})$, причому

$$\sum_{i=1}^{2n} x_i = 1, \tag{1}$$

$$0 \leqslant x_i \leqslant 1. \tag{2}$$

Нехай у момент формування фондового портфеля опціонів стосовно основних фінансових параметрів, які його характеризують, наявна така інформація.

1. Ринкова ціна акції i-го типу становить $S_{i,0}$ $(i=\overline{1,n})$.
2. На підставі експертних даних показано, що на момент часу T ринкова ціна акції i-го типу лежатиме в інтервалі $[S_{i,min}, S_{i,max}]$ $(i=\overline{1,n})$, тобто буде нечітким числом прямокутного вигляду [3].
3. Ринкова ціна call-опціону з i-го набору, який форсує акцію i-го типу на 100%, становить $C_{i,c}$ $(i=\overline{1,n})$.
4. Ціна виконання call-опціону з i-го набору, який форсує акцію i-го типу на 100%, становить $X_{i,c}$ $(i=\overline{1,n})$, причому $S_{i,min} < X_{i,c} < S_{i,max}$ $(i=\overline{1,n})$.
5. Ринкова ціна put-опціону з i-го набору, який хеджує акцію i-го типу на 100%, становить $C_{i,p}$ $(i=\overline{n+1,2n})$.
6. Ціна виконання put-опціону з i-го набору, який хеджує акцію i-го типу на 100%, становить $X_{i,p}$ $(i=\overline{n+1,2n})$, причому $S_{i-n,min} < X_{i,p} < S_{i-n,max}$ $(i=\overline{n+1,2n})$.

На підставі цих експертних даних можна обчислити нечітку дохідність (інтервал дохідності) фондового портфеля опціонів, який розглядають у момент часу T.

Позначимо через r_i^c $(i=\overline{1,n})$ – фінальну дохідність call-опціону з i-го набору в момент часу T, r_i^p $(i=\overline{n+1,2n})$ – фінальну дохідність put-опціону з i-го набору в момент часу T, $I_{i,c},(i=\overline{1,n})$ – абсолютний прибуток в момент часу T від фінансової операції купівлі call-опціону європейського стилю з i-го набору за умови 100% форсування відповідної акції i-го типу, $I_{i,p},(i=\overline{n+1,2n})$ – абсолютний прибуток в момент часу T від фінансової операції купівлі put-опціону європейського стилю з i-го набору в момент часу T за умови 100% хеджування відповідної акції i-го типу.

Оскільки значення параметрів $I_{i,c},(i=\overline{1,n})$, $I_{i,p},(i=\overline{n+1,2n})$, відповідно можна обчислити за формулами [6]

$$I_{i,c} = \max\{0, S_i - X_{i,c}\} - C_{i,c} = \begin{cases} S_i - X_{i,c} - C_{i,c}, & S_i > X_{i,p}, \\ -C_{i,c}, & S_i \leqslant X_{i,c}, \end{cases}$$

$$I_{i,p} = \max\{0, X_{i,p} - S_{i-n}\} - C_{i,p} = \begin{cases} X_{i,p} - S_{i-n} - C_{i,p}, & X_{i,p} > S_{i-n}, \\ -C_{i,p}, & X_{i,p} \leqslant S_{i-n}, \end{cases}$$

де S_i $(i=\overline{1,n})$ – ринкова ціна акції i-го типу в момент часу T, то дохідність call-опціону з i-го набору і put-опціону з i-го набору в момент часу T відповідно характеризується такими нечіткими числами r_i^c, r_i^p прямокутного вигляду (інтервалами):

$$r_i^c=[r_{i,min}^c,r_{i,max}^c]=\left[-\frac{1}{T},\ \frac{S_{i,max}-X_{i,c}-C_{i,c}}{T\cdot C_{i,c}}\right]\quad (i=\overline{1,n}),\tag{3}$$

$$r_i^p=[r_{i,min}^p,r_{i,max}^p]=\left[\frac{X_{i,p}-S_{i-n,min}-C_{i,p}}{T\cdot C_{i,p}},-\frac{1}{T}\right]\quad (i=\overline{n+1,2n}).\tag{4}$$

Тепер на підставі (3), (4) знайдемо, що дохідність фондового портфеля опціонів в момент часу T характеризується нечітким числом r прямокутного вигляду

$$r=[r_{\min},r_{max}]=\Bigg[-\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=n+1}^{2n}x_i\frac{X_{i,p}-S_{i-n,min}-C_{i,p}}{T\cdot C_{i,p}},\\ \sum_{i=1}^{n}x_i\frac{S_{i,max}-X_{i,c}-C_{i,c}}{T\cdot C_{i,c}}-\frac{1}{T}\sum_{i=n+1}^{2n}x_i\Bigg].\tag{5}$$

Формуючи фондовий портфель опціонів, інвестор найперше обов’язково фіксує нормативний параметр – нижню межу дохідності портфеля. У випадку, який розглядається, нижню межу дохідності портфеля задамо у вигляді нечіткого прямокутного числа

$$r^P=[r_{min}^P,r_{max}^P].\tag{6}$$

Оскільки ступінь ризику інвестицій у портфель опціонів залежатиме від того, наскільки дохідність портфеля буде нижчою від нормативної, очевидно, що рівень ризику інвестицій у портфель опціонів з дохідністю (5) буде визначатися взаємним розміщенням інтервалів (5), (6). У цьому зв’язку ризик того, що дохідність фондового портфеля опціонів, який розглядається, буде нижчою (вищою) від нормативної, можна обчислити за такою формулою [7]:

$$R=\begin{cases}0, & r_{max}^P\leqslant r_{min},\\ \dfrac{(r_{max}^P-r_{min})^2}{2(r_{max}^P-r_{min}^P)(r_{max}-r_{min})}, & r_{min}^P<r_{min}<r_{max}^P\leqslant r_{max},\\ \dfrac{r_{min}^P+r_{max}^P-2r_{min}}{2(r_{max}-r_{min})}, & r_{min}\leqslant r_{min}^P<r_{max}^P\leqslant r_{max},\\ \dfrac{2r_{max}^P-r_{min}-r_{max}}{2(r_{max}^P-r_{min}^P)}, & r_{min}^P\leqslant r_{min}<r_{max}\leqslant r_{max}^P,\\ 1-\dfrac{(r_{max}-r_{min}^P)^2}{2(r_{max}^P-r_{min}^P)(r_{max}-r_{min})}, & r_{min}\leqslant r_{min}^P\leqslant r_{max}\leqslant r_{max}^P,\\ 1, & r_{max}\leqslant r_{min}^P.\end{cases}\tag{7}$$

За цільову функцію в задачі оптимізації фондового портфеля опціонів європейського стилю природно вибрати верхню межу його дохідності (5). Оптимізувати портфель в такому формулюванні означає максимізувати максимум його дохідності в момент часу T при заданому (фіксованому) значенні ризику $R = R_0$. У цьому зв'язку формалізований запис задачі оптимізації фондового портфеля опціонів європейського стилю виглядатиме так:

$$r_{max}(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{S_{i,max} - X_{i,c} - C_{i,c}}{T \cdot C_{i,c}} - \frac{1}{T} \sum_{i=n+1}^{2n} x_i \to \max, \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{2n} x_i = 1, \tag{9}$$

$$0 \leqslant x_i \leqslant 1, \tag{10}$$

$$R(x_1, ..., x_{2n}, r^P_{min}, r^P_{max}) = R_0. \tag{11}$$

Для побудови розв'язку задачі (8)-(11) в загальному випадку потрібно врахувати те, що умова (11) має нестандартний ("гіллястий") вигляд: за відомої структури розширеного фондового портфеля притаманний йому рівень ризику обчислюється на підставі однієї з гілок формули (7) залежно від взаємного розміщення інтервалів дохідності (5), (6). Якщо ж структуру розширеного фондового портфеля знаходити шляхом розв'язування задачі оптимізації, то кожну з гілок формули (7) треба прийняти за обмеження на шуканий розв'язок. Тоді задача (8)-(11) в загальному випадку розбивається на шість задач математичного програмування, для кожної з яких умову (11) треба конкретизувати на підставі співвідношення (7).

Для теоретично безризикового портфеля опціонів ($R_0 = 0$) умову, яка еквівалентна (11), запишемо у вигляді

$$-\frac{1}{T} \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=n+1}^{2n} x_i \frac{X_{i,p} - S_{i-n,min} - C_{i,p}}{T \cdot C_{i,p}} \geqslant r^P_{max}. \tag{12}$$

Аналогічно, для портфеля опціонів з ризиком $R_0 = 1$ замість умови (11) потрібно розглянути умову

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{S_{i,max} - X_{i,c} - C_{i,c}}{T \cdot C_{i,c}} - \frac{1}{T} \sum_{i=n+1}^{2n} x_i \leqslant r^P_{min}. \tag{13}$$

Для визначення складових оптимального за дохідністю фондового портфеля опціонів у випадку, коли ризик портфеля $R_0 \in (0, 1)$, умову (11) в задачі оптимізації треба конкретизувати так.

Якщо $r^P_{min} < r_{min} < r^P_{max} \leqslant r_{max}$, то (11) потрібно замінити такими умовами:

$$(r^P_{max} - r_{min})^2 = 2R_0(r^P_{max} - r^P_{min})(r_{max} - r_{min}),$$

$$r_{min} > r^P_{min}, \quad r_{min} < r^P_{max}, \quad r_{max} \geqslant r^P_{max}. \tag{14}$$

Коли $r_{min} \leqslant r^P_{min} < r^P_{max} \leqslant r_{max}$, то замість умови (11) необхідно розглянути такі умови:

$$r^P_{min} + r^P_{max} - 2r_{min} = 2R_0(r_{max} - r_{min}),$$

$$r_{min} \leqslant r^P_{min}, \quad r^P_{min} < r^P_{max}, \quad r_{max} \geqslant r^P_{max}. \tag{15}$$

У випадку

$$r^P_{min} \leqslant r_{min} < r_{max} \leqslant r^P_{max}$$

умова (11) еквівалентна умовам

$$2r^P_{max} - r_{min} - r_{max} = 2R_0(r^P_{max} - r^P_{min}),$$

$$r_{min} \geqslant r^P_{min}, \quad r_{min} < r_{max}, \quad r_{max} \leqslant r^P_{max}. \tag{16}$$

Якщо

$$r_{min} \leqslant r^P_{min} \leqslant r_{max} \leqslant r^P_{max},$$

то умову (11) треба замінити системою умов

$$(r_{max} - r^P_{min})^2 = 2(1-R_0)(r^P_{max} - r^P_{min})(r_{max} - r_{min}),$$

$$r_{min} \leqslant r^P_{min}, \quad r_{max} \leqslant r^P_{max}, \quad r_{max} \geqslant r^P_{min}. \tag{17}$$

Зауважимо, що співвідношення (12)-(17) явно записують через невідомі частки x_i $(i = \overline{1,2n})$ відповідних компонент фондового портфеля опціонів, оскільки через ці параметри явно виражаються функції r_{min}, r_{max} з (5).

Отже, за заданих значень параметрів $S_{i,min}$, $S_{i,max}$, $C_{i,c}$, $X_{i,c}$, $(i = \overline{1,n})$, $C_{i,p}$, $X_{i,p}$ $(i = \overline{n+1,2n})$, r^P_{min}, r^P_{max}, T, R_0, складові x_i $(i = \overline{1,2n})$ фондового портфеля опціонів європейського стилю на акції повинні бути розв'язком однієї з задач (8), (9), (10), (12) - (8), (9), (10), (17) залежно від взаємного розміщення інтервалів (5), (6). Для побудови межі ефективності цього портфеля в системі координат "ризик недопустимо низької дохідності портфеля - максимум очікуваної дохідності портфеля", потрібно розв'язати відповідну задачу оптимізації, змінюючи параметр R_0 в межах $0 \leqslant R_0 \leqslant R_{0,max}$, де $R_{0,max}$ – ризик компоненти портфеля з найбільшою дохідністю.

3. Висновки. Заміна стандартного способу моделювання дохідності активів (як випадкових величин) нечіткими значеннями (інтервалами) дохідностей цих активів дала змогу сформулювати й описати схему розв'язування задачі оптимізації фондового портфеля опціонів європейського стилю на акції. Побудова розв'язку задачі оптимізації зводиться до розв'язування деякої задачі математичного програмування. Це допомагає не тільки побудувати межу ефективності портфеля в системі координат "ризик недопустимо низької дохідності портфеля - максимум очікуваної дохідності портфеля", але й значно зменшити затрати оперативного часу на розв'язування задачі оптимізації.

---

1. *Markovitz H.M.* Portfolio Selection / *Markovitz H.M.* // Journal of Finance. – 1952 (March). – Vol. 7. – P. 77-91.
2. *Sharpe W.F.* Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk / *Sharpe W.F.* // Journal of Finance. – 1964 (September). – Vol. 19. – P. 425-442.
3. *Заде Л.А.* Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенних решений / *Заде Л.А.* – М.: Мир, 1976.
4. *Недосекин А.О.* Оптимизация фондового портфеля, состоящего из одних опционов / *Недосекин А.О.* // Банки и Риски. – 2005. – №2. (http://www.sedok.narod.ru/s_files/2005/4.pdf)
5. *Сявавко М.* Математичне моделювання за умов невизначеності / *Сявавко М., Рибицька О.* – Львів: НВФ "Українські технології", 2000.
6. *Іващук Н.Л.* Ринок деривативів: економіко-математичне моделювання процесів ціноутворення / *Іващук Н.Л.* Львів: Вид-во Нац. ун-ту "Львівська політехніка", 2008.

7. *Недосекин А.О.* Оценка риска инвестиций для произвольно-размытых факторов инвестиционного проекта / *Недосекин А.О., Кокош А.М.* http://sedok.narod.ru/sc_group_2003.html

ABOUT SOME OPTIMIZATION'S PROBLEM OF THE EXTENDED PORTFOLIO

Mykola BUGRIY

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: ol_buhrii@i.ua

Using fuzzy-plural theory we find the method of solving of optimization's problems for the extended portfolio of the stocks. This stocks are hedging by the put-options of European style.

Key words: extended portfolio, option.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ ФОНДОВОГО ПОРТФЕЛЯ ОПЦИОНОВ

Николай БУГРИЙ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000, Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: ol_buhrii@i.ua

В рамках теории нечетких множеств предлагается метод решения задачи оптимизации фондового портфеля опционов европейского стиля на акции.

Ключевые слова: фондовый портфель, опционы.

Стаття надійшла до редколегії 20.11.2009

Прийнята до друку 16.12.2009