ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2009. *Ser. Mech. Math. 2009.*
Вип. 71. С. 27–42 *Is. 71. P. 27–42*

УДК 517.574

УЗАГАЛЬНЕНА ТЕОРЕМА ВЕЙЄРШТРАССА ДЛЯ δ-СУБГАРМОНІЙНИХ В $\mathbb{C}$ ФУНКЦІЙ

Оксана БРОДЯК[1], **Ярослав ВАСИЛЬКІВ**[2]

[1]*Національний університет "Львівська політехніка",*
79013, Львів, вул. Степана Бандери, 12
[2]*Львівський національний університет імені Івана Франка,*
79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: yavvasylkiv@gmail.com

Запропоновано універсальний спосіб побудови канонічних інтегралів Вейєрштрасса з найкращими оцінками зверху на зростання їхньої неванліннової характеристики. Такі оцінки природно виникають в точних оцінках зверху модулів коефіцієнтів Фур'є $c_k(r;\mu,\alpha),\ r>0,\ k\in\mathbb{Z}$, пари (μ,α), де μ – довільний борелевий заряд (тобто дійснозначна міра) в $\mathbb{C}$ такий, що $\mathbb{D}:=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}\cap\operatorname{supp}\mu=\emptyset$, а α – деяка послідовність комплексних чисел (а саме послідовність коефіцієнтів розвинення в степеневий ряд в $\mathbb{D}$ канонічного інтеграла Вейєрштрасса, побудованого за зарядом μ).

Ключові слова: δ-субгармонійна функція, канонічний інтеграл Вейєрштрасса, найкращі мажоранти зростання, метод рядів Фур'є, коефіцієнти Фур'є.

1. Вступ. Основна теорема алгебри дає підстави записати довільний поліном $P(z)$ степеня (порядку) n у вигляді

$$P(z)=C\,z^m\prod_{j=m+1}^{n}\left(1-\frac{z}{a_j}\right),$$

де a_j – нулі $P(z)$, відмінні від $z=0$. Цю теорему поширено на цілі функції. Оскільки цілі функції в загальному випадку мають нескінченну кількість нулів, то скінченний добуток замінюється на нескінченний, до якого треба приєднати певні множники, щоб забезпечити його збіжність. Без втрати загальності вважатимемо, що $a_j\neq 0$ (бо замість цілої функції f можна розглянути функцію $f(z)z^{-m}$, де m – порядок нуля f в точці $z=0$).

Отже, нехай $\mathcal{Z} = \{a_j\}_{j=1}^{+\infty}$ – послідовність комплексних чисел така, що $0 < |a_1| \leqslant |a_2| \leqslant \ldots$ і $\lim\limits_{j\to+\infty} |a_j| = +\infty$. Класична теорема Вейєрштрасса [1] стверджує, що існує ціла функція $\Pi(z)$, нулями якої є числа a_j (з врахуванням їхньої кратності) і така функція має вигляд

$$\Pi(z) = \prod_{j=1}^{+\infty} E\left(\frac{z}{a_j}, p_j\right), \tag{1}$$

де $E(s,0) = 1-s,\ E(s,p) = (1-s)\exp\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} s^k\right)$, – первісні множники Вейєрштрасса роду $p \in \mathbb{Z}_+$, а $\{p_j\}_{j=1}^{+\infty}$ – деяка послідовність невід'ємних чисел, яка забезпечує збіжність нескінченного добутку.

Добре відомо (див. [2]), що вибір $p_j = j$, або $p_j = [\log j]$, або $p_j = [\alpha \log j / \log |a_j|]$, де $\alpha > 1$, гарантує збіжність нескінченного добутку (1). Тут і надалі вираз $[x]$ означатиме цілу частину числа x.

У 1897 р. Е. Борель [3] з'ясував, що за умови $\sigma < +\infty$, де $\sigma := \limsup\limits_{r\to+\infty} \frac{\log n(r;\mathcal{Z})}{\log r}$, $n(r;\mathcal{Z}) = \max\{j : |a_j| \leqslant r\}$ – лічильна функція точок послідовності $\mathcal{Z}$, рід p канонічного добутку (1) можна вибрати таким, що дорівнює $p = p_j := [\sigma],\ \forall j \in \mathbb{N}$.

Задачі оцінки зростання характеристик

$$\log M(r,\Pi) := \max_{|z|=r} \log|\Pi(z)|, \quad T(r,\Pi) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |\Pi(re^{i\theta})|d\theta,$$

де $\log^+ x = \log\max\{1,x\}$, канонічних добутків Вейєрштрасса (1) в термінах лічильних функцій $n(r;\mathcal{Z})$ чи $N(r;\mathcal{Z}) := \int_0^r n(t;\mathcal{Z})t^{-1}dt$, або їхніх мажорант $\nu(r)$, є класичними. Їхньому розв'язанню присвячена значна кількість праць, включно з класичними роботами Е. Бореля, Д. Пойя, Г. Валірона, Д. Адамара, П. Бутру, Е. Майлета, А. Крафта, О. Блюменталя, А. Данжуа (див. короткий огляд в [2], а також монографії [4, 5]). Тут ми звернемо увагу лише на новіші праці [6]-[15], в яких, на наш погляд, отримано оптимальні результати. Аналіз цих робіт свідчить про те, що зазначені вище оцінки зовні певних виняткових множин, або й для всіх $r > 0$, здебільшого (за винятком [12, 13, 15], де застосовано метод рядів Фур'є) здобувають за подібними схемами, вибираючи належну послідовність $\{p_j\}_{j=1}^{+\infty}$ в (1) у випадку $\sigma = +\infty$. Проте питання найкращого вибору послідовності $\{p_j\}_{j=1}^{+\infty}$ до цього часу залишається відкритим. Якщо ж $\sigma < +\infty$, то ця задача повністю розв'язана в працях [3, 16, 17, 13, 15].

Добре відомо, що функція $\log|\Pi|$ належить до більш широкого класу – класу субгармонійних в $\mathbb{C}$ функцій, гармонійних в деякому околі точки $z = 0$ (див., наприклад, [18]). У класах субгармонійних на площині функцій аналогом канонічних добутків Вейєрштрасса $\Pi(z)$ з $1 \leqslant |a_j|,\ j \in \mathbb{N}$, є канонічні інтеграли Вейєрштрасса (див. [18, с. 159])

$$u(z) = \int\limits_{|a|\geqslant 1} K_{p(|a|)-1}(z,a)\, d\mu(a), \qquad z \in \mathbb{C}, \tag{1'}$$

де

$$K_p(z,a) = \log\left|1-\frac{z}{a}\right| + \operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k}\left(\frac{z}{a}\right)^k\right)$$

при $p \in \mathbb{N}$ і $K_0(z,a) = \log\left|1-\dfrac{z}{a}\right|$ – канонічні ядра Вейєрштрасса роду $p \in \mathbb{Z}_+$; $p(t)$ – довільна неспадна, додатна, цілочисельна функція, для якої інтеграл $\int_1^{+\infty}\left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)} d\,n(t;\mu)$ скінченний для довільного $r > 0$; μ – довільна додатна борелева міра в $\mathbb{C}$, $\operatorname{supp}\mu \cap \mathbb{D} = \emptyset$; $n(t;\mu) = \mu(\{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant t\})$; $\operatorname{supp}\mu$ – носій міри μ.

Зрозуміло, що вищезгадані задачі також розглядали й для канонічних інтегралів Вейєрштрасса ($1'$) (див., наприклад, [18, 19]). З недавніх результатів зазначимо праці [20]-[22], де на основі методу рядів Фур'є доведено загальні аналоги класичної теореми Вейєрштрасса в так званих класах субгармонійних на площині функцій скінченного λ-типу чи скінченного (λ,ε)-типу, тобто класів субгармонійних в $\mathbb{C}$ функцій w, гармонійних у деякому околі початку координат таких, що відповідно виконуються нерівності

$$w(z) \leqslant A\lambda(B|z|) \quad \text{чи} \quad w(z) \leqslant a(\varepsilon(|z|))^{-\alpha}\lambda(|z| + \beta\varepsilon(|z|)|z|)$$

при деяких додатних сталих A, B, a, α, β. Тут $\lambda(r)$ – невід'ємна, зростаюча до $+\infty$, неперервна на $[0,+\infty)$ функція, $\lambda(0) = 0$, а $\varepsilon(r)$ – незростаюча на $[0,+\infty)$ функція така, що $\varepsilon(0) = 1$ і при деякому $\eta > 1$ для всіх достатньо великих $r > 0$ виконується нерівність $\varepsilon(r + \varepsilon(r)) \geqslant (\varepsilon(r))^\eta$. Зокрема, в [20] з'ясовано, що довільна невід'ємна борелева міра μ в $\mathbb{C}$, $0 \notin \operatorname{supp}\mu$, є мірою Ріса субгармонійної на площині функції w (тобто $\mu_w = \mu$, де $\mu_w = (2\pi)^{-1}\Delta\, w$, Δ – оператор Лапласа в $\mathbb{C}$, а рівність розуміють у сенсі узагальнених функцій [18]) скінченного λ-типу при

$$\lambda(r) = \int_1^{+\infty}\left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)} d\,n(t;\mu),$$

де $p(t)$ – деяка неспадна, невід'ємна функція така, що інтеграл скінченний для довільної міри μ. Такі функції $p(t)$ існують для довільної міри μ. Наприклад, $p(t) = n(t;\mu)$ або $p(t) = \log(n(t;\mu)+1)$. Зауважимо, що з огляду на теорему Вейєрштрасса про зображення (див. [18, с. 159]), згаданий вище результат дає, зокрема, оцінку зверху на зростання канонічного інтеграла Вейєрштрасса ($1'$). Крім того, в [21] показано, що довільна борелева міра $\mu \geqslant 0$ в $\mathbb{C}$, $0 \notin \operatorname{supp}\mu$, є мірою Ріса деякої субгармонійної функції скінченного (λ,ε)-типу при

$$\lambda(r) = \int_0^{r}\left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)-1} d\,n(t;\mu) + \int_r^{+\infty}\left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)} d\,n(t;\mu).$$

Тут $p(t)$ – неспадна, додатна, цілочисельна функція така, що другий інтеграл в останньому співвідношенні скінченний для довільного $r > 0$.

Мета нашої праці – на підставі методики, розробленої в [15, 20, 21, 22], запропонувати універсальний спосіб побудови канонічних інтегралів Вейєрштрасса, які відповідають довільному борелевому заряду μ в $\mathbb{C}$, $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \cap \operatorname{supp}\mu = \emptyset$, з апріорі найкращими мажорантами на зростання їхньої неванліннової характеристики. Такі апріорні мажоранти знаходимо, оцінюючи зверху модулі коефіцієнтів Фур'є $\{c_k(r;\mu,\alpha),\ r>0,\ k\in\mathbb{Z}\}$ пари (μ,α) (див. означення 1 та зауваження 1). Крім того, як застосування запропонованого нами підходу подамо δ-субгармонійні версії двох результатів з праць [7, 9], в яких зовні певних виняткових множин зрайдено точні оцінки зверху на зростання функцій $w=\log|\Pi|$, де Π – канонічний добуток Вейєрштрасса (1).

2. Формулювання результатів. Нехай $\mu=\mu^+-\mu^-$ – дійснозначна борелева міра (тобто заряд) в $\mathbb{C}$, $|\mu|=\mu^++\mu^-$ – повна варіація μ. Тут μ^+ та μ^- – додатна та від'ємна варіації μ відповідно. Скрізь надалі припускатимемо, що $\mathbb{D}:=\{z\in\mathbb{C}: |z|<1\}\bigcap \operatorname{supp}\mu=\emptyset$, де $\operatorname{supp}\mu$ – носій заряду μ. Клас таких зарядів позначатимемо через $\mathcal{M}$.

Означення 1. *Нехай $\mu\in\mathcal{M}$, $\alpha:=\{\alpha_k,\ k\in\mathbb{N}\}$ – деяка послідовність комплексних чисел. Послідовність $\{c_k(r;\mu,\alpha),\ k\in\mathbb{Z}\}$, де*

$$c_0(r;\mu,\alpha)=\int\limits_{|a|\leqslant r}\log\frac{r}{|a|}d\,\mu(a):=N(r;\mu);$$

$$c_k(r;\mu,\alpha)=\frac{1}{2}\alpha_k\,r^k+\frac{1}{2k}\int\limits_{|a|\leqslant r}\left(\left(\frac{r}{a}\right)^k-\left(\frac{\overline{a}}{r}\right)^k\right)d\,\mu(a);$$

$$c_{-k}(r;\mu,\alpha)=\overline{c}_k(r;\mu,\alpha),\quad k\in\mathbb{N},\quad 0<r<+\infty;$$

*називається **послідовністю коефіцієнтів Фур'е пари** (μ,α).*

Нехай $n(r;|\mu|)=|\mu|(\overline{\mathbb{D}}_r)$ – повна маса заряду замкненого круга $\overline{\mathbb{D}}_r:=\{z\in\mathbb{C}: |z|\leqslant r,\ r>0\}$. Для довільної невід'ємної, неспадної, необмеженої функції $\nu(r)$, визначеної на $\mathbb{R}_+$ і $\nu(r)=0$ при $0\leqslant r<1$, через $\mathcal{M}(\nu)$ будемо позначати підклас $\mathcal{M}$ такий, що для довільного $\mu\in\mathcal{M}$ виконується нерівність $n(r;|\mu|)\leqslant\nu(r)$ для всіх $r>0$. Якщо ж, крім того, невід'ємна функція $\beta(r):=\nu(r)-n(r;|\mu|)$ не спадає, то такий підклас $\mathcal{M}(\nu)$ позначатимемо через $\mathcal{M}^*(\nu)$.

Довільній неспадній, невід'ємній, необмеженій функції $g(r)$, $g(r)=0$ при $0\leqslant r<1$, поставимо у відповідність функцію

$$\lambda(r;g,p_g):=\int\limits_0^r\left(\frac{r}{t}\right)^{p_g(t)-1}d\,g(t)+\int\limits_r^{+\infty}\left(\frac{r}{t}\right)^{p_g(t)}d\,g(t),\tag{2}$$

де $p_g(t)$ – неспадна, додатна, цілочисельна функція така, що другий інтеграл в (2) скінченний для довільного $r>0$. Такі функції $p_g(t)$ існують для довільних функцій зростання $g(t)$, наприклад, $p_g(t)=[g(t)]+1$, або $p_g(t)=[\log^+g(t)]+2$, або $p_g(t)=[(1+\delta)\widehat{\rho}(t)]+1$, $\forall\,\delta>0$, де $\widehat{\rho}(t)=\sup\limits_{\tau\leqslant t}\log^+g(\tau)/\log\tau$.

Нехай

$$\rho_g:=\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\log^+g(r)}{\log r},\qquad 0\leq\rho_g\leqslant+\infty,$$

– порядок функції зростання $g(r)$. Якщо $0 \leqslant \rho_g < +\infty$, то у такому випадку приймемо $p_g(t) := [\rho_g] + 1$ і

$$\lambda(r; g, p_g) = r^{[\rho_g]} \int\limits_0^r \frac{d\,g(t)}{t^{[\rho_g]}} + r^{[\rho_g]+1} \int\limits_r^{+\infty} \frac{d\,g(t)}{t^{[\rho_g]+1}} =$$

$$= [\rho_g] r^{[\rho_g]} \int\limits_0^r \frac{g(t)}{t^{[\rho_g]+1}}\,d\,t + ([\rho_g]+1) r^{[\rho_g]+1} \int\limits_r^{+\infty} \frac{g(t)}{t^{[\rho_g]+2}}\,d\,t. \tag{3}$$

Зауваження 1. Побудова коефіцієнтів Фур'є $c_k(r; \mu, \alpha)$ пари (μ, α), $\mu \in \mathcal{M}$, з

$$\alpha_k = -\frac{1}{k} \int\limits_{|a| \leqslant p^{-1}(k)} a^{-k} d\,\mu(a), \qquad k \in \mathbb{N},$$

$$p^{-1}(k) = \sup\{t : p(t) \leq k\}, \qquad \sup \varnothing = 0, \qquad k \in \mathbb{N},$$

рівносильна до побудови канонічного інтеграла Вейєрштрасса

$$w(z) = \int\limits_{|a| \geqslant 1} K_{p(|a|)-1}(z, a)\,d\,\mu(a), \qquad z \in \mathbb{C}, \tag{4}$$

де $p(t) := p_n(t)$ – довільна неспадна, додатна, цілочисельна функція, для якої інтеграл $\int\limits_r^{+\infty} \left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)} d\,n(t; |\mu|)$ скінченний для довільного $r > 0$.

Справді, за теоремою Вейєрштрасса [18] функція $w(z)$, визначена співвідношенням (4), є δ-субгармонійною в $\mathbb{C}$. Далі, нехай $0 < |z| < 1 \leqslant |a|$. Тоді

$$K_{p(|a|)-1}(z, a) = \mathrm{Re}\Big(-\sum_{k \geqslant p(|a|)} \frac{1}{k}\Big(\frac{z}{a}\Big)^k\Big).$$

Отже,

$$\alpha_k = -\frac{1}{k} \int\limits_{|a| \leqslant p^{-1}(k)} a^{-k} d\,\mu(a), \qquad k \in \mathbb{N},$$

і, враховуючи результати [23] (див. також [24]), для такої w співвідношення $c_k(r, w) = c_k(r; \mu, \alpha)$ є правильними для всіх $k \in \mathbb{Z}$, $r > 0$, де

$$c_k(r, w) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{-ik\theta}\, w(re^{i\theta})\,d\,\theta, \qquad k \in \mathbb{Z}, \qquad 0 < r < +\infty.$$

Нехай (u, v) – канонічна декомпозиція δ-субгармонійної функції w [25, 23], тобто $w = u - v$ на множині $E \subset \mathbb{C}$, де u і v не дорівнюють водночас $-\infty$ і $\mu_u = \mu_w^+$, $\mu_v = \mu_w^-$. Тут $\mu_w = \dfrac{1}{2\pi} \Delta\, w$, де Δ – оператор Лапласа в $\mathbb{C}$, а рівність розуміють у сенсі узагальнених функцій (тобто розподілів Л. Шварца). Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що $\mathbb{D}\bigcap \operatorname{supp}\mu_w = \emptyset$ і $w(0) = u(0) = v(0) = 0$. Нехай також

$$T(r,w) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \max\{u(re^{i\theta}),\, v(re^{i\theta})\}d\,\theta, \qquad 0 < r < +\infty;$$

$$m_q(r,w) = \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left|w(re^{i\theta})\right|^q d\,\theta\right)^{1/q}, \quad 1 \leqslant q < +\infty, \quad 0 < r < +\infty.$$

Зауваження 2. Маємо

$$m_2(r,w) \geq m_1(r,w) = 2T(r,w) - N(r;|\mu|), \qquad \forall\, r > 0.$$

Отже,

$$T(r,w) \leqslant \frac{1}{2}\,N(r;|\mu|) + \frac{1}{2}\,m_2(r,w), \qquad \forall\, r > 0. \tag{5}$$

Теорема 1. i) *Для довільного $\mu \in \mathcal{M}$ існує канонічний інтеграл Вейєрштрасса w (див. співвідношення (4)) такий, що його неванліннова характеристика $T(r,w)$ для всіх $r \geqslant 1$ задовольняє нерівність*

$$T(r,w) \leqslant N(r;|\mu|) + \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\,\lambda(r;n,p_n), \tag{6}$$

де функція $\lambda(r;n,p_n)$ задана співвідношенням (2) при $g(r) = n(r;|\mu|)$ у випадку $\rho_n = +\infty$ і співвідношенням (3) при $g(r) = n(r;|\mu|)$ у випадку $\rho_n < +\infty$ відповідно.

ii) *Для довільного $\mu \in \mathcal{M}^*(\nu)$ існує канонічний інтеграл Вейєрштрасса w (див. співвідношення (4)) такий, що його неванліннова характеристика $T(r,w)$ для всіх $r \geqslant 1$ задовольняє нерівність*

$$T(r,w) \leq N(r;|\mu|) + \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\,\lambda(r;\nu,p_\nu), \tag{7}$$

де функція $\lambda(r;\nu,p_\nu)$ задана співвідношенням (2) при $g(r) = \nu(r)$ у випадку $\rho_\nu = +\infty$ і співвідношенням (3) при $g(r) = \nu(r)$ у випадку $\rho_\nu < +\infty$ відповідно.

За допомогою теореми 1 виведемо теореми 2 та 3, які є δ-субгармонійними версіями двох результатів з праць [7] та [9] відповідно.

Нехай $\mu \in \mathcal{M}$. Приймемо в (2)

$$g(t) = n(t;|\mu|), \qquad p_g(t) = [2\psi(\log n(t;|\mu|))\log n(t;|\mu|)] + 1,$$

де

$$\psi(t) = \sup_{s\leqslant t}\phi(s)\sqrt{\int_s^{+\infty} d\,\tau/(\phi(\tau)\,\tau\,\log\tau)}$$

така, що $\int^{+\infty} d\,t/(\psi(t)\,t\,\log\,t) < +\infty$ і $\lim\limits_{t\to+\infty}\psi(t)/\phi(t) = 0$ для довільної додатної, неспадної функції $\phi(t)$, для якої $\int^{+\infty} d\,t/(\phi(t)\,t\,\log\,t) < +\infty$ (див. [7]). Тоді правильна така теорема.

Теорема 2. *Нехай $\phi(t)$ – додатна, неспадна функція така, що*

$$\int^{+\infty} \frac{d\,t}{\phi(t)\,t\,\log\,t} < +\infty.$$

Тоді для довільного $\mu \in \mathcal{M}$ такого, що

$$\liminf_{r\to+\infty} \frac{\log^+ n(r;|\mu|)}{\log\,r} > 0 \tag{8}$$

існує канонічний інтеграл Вейєрштрасса w (див. співвідношення (4)) такий, що $\mu_w = \mu$ і

$$\log\,T(r,w) = o((\log\,n(r;|\mu|))^2\phi(\log\,n(r;|\mu|))), \qquad r \to +\infty, \tag{9}$$

зовні множини $\mathcal{E} \subset [1,+\infty)$ такої, що $\int_{\mathcal{E}} d\,\log\,t < +\infty$.

Нехай $\mu \in \mathcal{M}$. Приймемо в (2) $g(t) = n(t;|\mu|)$, $p_g(t) = [n(t;|\mu|)] + 1$. Тоді правильна така теорема.

Теорема 3. *Для довільного $\mu \in \mathcal{M}$ існує канонічний інтеграл Вейєрштрасса w (див. співвідношення (4)) такий, що $\mu_w = \mu$ і*

$$T(r,w) \leqslant A\exp(B\,N(r;|\mu|)), \qquad r \notin E, \tag{10}$$

де A, $B > 0$, а $E \subset [1,+\infty)$ – деяка множина така, що $\int_E d\,t < +\infty$.

3. Допоміжні результати і доведення теорем 1–3. Для доведення теореми 1 будемо використовувати таку лему.

Лема 1. i) *Для довільного $\mu \in \mathcal{M}$ існує послідовність α комплексних чисел така, що для всіх $|k| \in \mathbb{N}$, $r > 0$ виконується*

$$|c_k(r;\mu,\alpha)| \leq \frac{\lambda(r;n,p_n)}{|k|}. \tag{11}$$

ii) *Для довільного $\mu \in \mathcal{M}^*(\nu)$ існує послідовність $\widetilde{\alpha}$ комплексних чисел така, що для всіх $|k| \in \mathbb{N}$, $r > 0$ виконується*

$$|c_k(r;\mu,\widetilde{\alpha})| \leq \frac{\lambda(r;\nu,p_\nu)}{|k|}. \tag{12}$$

Доведення. Нехай $\mu \in \mathcal{M}$ і нехай $p(t) := p_n(t)$ – довільна неспадна, додатна, цілочисельна функція, для якої інтеграл $\int_r^{+\infty} \left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)} d\,n(t;|\mu|)$ скінченний для довільного $r > 0$. Якщо $\rho_n < +\infty$, то інтеграл $\int_r^{+\infty} n(t;|\mu|)t^{-[\rho_n]-2}\,d\,t < +\infty$ для всіх $r > 0$.

Для $k \in \mathbb{N}$ приймемо

$$p^{-1}(k) = \sup\{t : p(t) \leq k\}, \qquad \sup\varnothing = 0.$$

Зауважимо, що у випадку $\rho_n < +\infty$ маємо $p^{-1}(k) = +\infty$ для всіх $k \geq [\rho_n] + 1$.

Нехай

$$\alpha_k = -\frac{1}{k} \int\limits_{|a|\leq p^{-1}(k)} a^{-k}\,d\,\mu(a), \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{13}$$

У випадку $\rho_n < +\infty$

$$\alpha_k = -\frac{1}{k} \int\limits_{a\in\mathbb{C}} a^{-k}\, d\,\mu(a), \qquad \forall\, k \geq [\rho_n] + 1. \tag{14}$$

Тоді для $k \in \mathbb{N}$ з огляду на співвідношення (13) отримаємо

$$\alpha_k + \frac{1}{k} \int\limits_{|a|\leq r} a^{-k}\, d\,\mu(a) = \begin{cases} \dfrac{1}{k} \displaystyle\int\limits_{p^{-1}(k)<|a|\leq r} a^{-k}\, d\,\mu(a), & r > p^{-1}(k); \\ -\dfrac{1}{k} \displaystyle\int\limits_{r<|a|\leq p^{-1}(k)} a^{-k}\, d\,\mu(a), & r < p^{-1}(k); \end{cases}$$

а, у випадку $\rho_n < +\infty$, з огляду на співвідношення (14), для довільного $k \geq [\rho_n] + 1$ виконується

$$\alpha_k + \frac{1}{k} \int\limits_{|a|\leq r} a^{-k}\, d\,\mu(a) = -\frac{1}{k} \int\limits_{|a|>r} a^{-k}\, d\,\mu(a).$$

Отже, для $k \in \mathbb{N}$ правильна оцінка

$$\left|\alpha_k + \frac{1}{k} \int\limits_{|a|\leq r} a^{-k}\, d\,\mu(a)\right| \leq \begin{cases} \dfrac{1}{k} \displaystyle\int\limits_{p^{-1}(k)<|a|\leq r} |a|^{-k}\, d\,|\mu|(a), \ r > p^{-1}(k); & (15.1) \\ \dfrac{1}{k} \displaystyle\int\limits_{r<|a|\leq p^{-1}(k)} |a|^{-k}\, d\,|\mu|(a), \ r < p^{-1}(k); & (15.2) \end{cases}$$

і, у випадку $\rho_n < +\infty$, для довільного $k \geq [\rho_n] + 1$

$$\left|\alpha_k + \frac{1}{k} \int\limits_{|a|\leq r} a^{-k}\, d\,\mu(a)\right| \leq \frac{1}{k} \int\limits_{|a|>r} |a|^{-k}\, d\,|\mu|(a). \tag{16}$$

У нерівності (15.1) $p^{-1}(k) < |a|$. Звідси, за означенням $p^{-1}(k)$, маємо $k < p(|a|)$ і, завдяки цілочисельності функції $p(t)$, одержимо $k \leq p(|a|) - 1$. Отже,

$$\int\limits_{p^{-1}(k)<|a|\leqslant r} \left(\frac{r}{|a|}\right)^k d|\mu|(a) \leqslant \int\limits_{p^{-1}(k)}^{r} \left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)-1} dn(t;|\mu|) \leqslant \int\limits_{0}^{r} \left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)-1} dn(t;|\mu|). \tag{17}$$

В нерівності (15.2) маємо $|a| \leq p^{-1}(k)$. Тому $p(|a|) \leq k$. Отож,

$$\int\limits_{r}^{p^{-1}(k)} \left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)} d\,n(t;|\mu|) \leqslant \int\limits_{r}^{+\infty} \left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)} d\,n(t;|\mu|). \tag{18}$$

У випадку ж $\rho_n < +\infty$ з огляду на (16) для всіх $k \geq [\rho_n] + 1$ відповідно виконується

$$r^k \left|\alpha_k + \frac{1}{k} \int\limits_{|a|\leq r} a^{-k} d\,\mu(a)\right| \leq \frac{1}{k} \int\limits_{r}^{+\infty} \left(\frac{r}{t}\right)^{[\rho_n]+1} d\,n(t;|\mu|). \tag{19}$$

Отож, у випадку $\rho_n = +\infty$, враховуючи співвідношення (15), (17), (18) та нерівність $n(r;|\mu|) \le \int\limits_0^r \left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)-1} d\,n(t;|\mu|)$, для довільного $k \in \mathbb{N}$ маємо

$$|c_k(r;\mu,\alpha)| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\alpha_k r^k + \frac{1}{k}\int\limits_{|a|\leqslant r}\left(\left(\frac{r}{a}\right)^k - \left(\frac{\overline{a}}{r}\right)^k\right) d\,\mu(a)\right| \leqslant \frac{r^k}{2}\left|\alpha_k + \frac{1}{k}\int\limits_{|a|\le r} a^{-k} d\,\mu(a)\right| +$$

$$+\frac{1}{2k}\int\limits_{|a|\le r}\left(\frac{|a|}{r}\right)^k d\,|\mu|(a) \leqslant \frac{1}{2k}\left(\int\limits_0^r \left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)-1} d\,n(t;|\mu|) + \int\limits_r^{+\infty}\left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)} d\,n(t;|\mu|)\right) +$$

$$+ \frac{n(r;|\mu|)}{2k} \le \frac{\lambda(r;n,p_n)}{k},$$

де функція $\lambda(r;n,p_n)$ визначається співвідношенням (2) при $g(r) = n(r;|\mu|)$.

У випадку ж $\rho_n < +\infty$, з огляду на співвідношення (15)–(19), відповідно одержуємо

$$|c_k(r;\mu,\alpha)| \le \frac{1}{k}\lambda(r;n,p_n), \quad \forall\, k = 1,2,...,[\rho_n];$$

$$|c_k(r;\mu,\alpha)| \le \frac{1}{k}\left(n(r;|\mu|) + \int\limits_r^{+\infty}\left(\frac{r}{t}\right)^{[\rho_n]+1} d\,n(t;|\mu|)\right) \leqslant \frac{1}{k}\lambda(r;n,p_n), \quad \forall\, k \ge [\rho_n]+1;$$

де функція $\lambda(r;n,p_n)$ визначається співвідношенням (3) при $g(r) = n(r;|\mu|)$.

Враховуючи, що $|c_{-k}(r;\mu,\alpha)| = |c_k(r;\mu,\alpha)|$ для довільних $k \in \mathbb{N}$ і $r > 0$, отримуємо співвідношення (11) для всіх $|k| \in \mathbb{N}$ і $r > 0$.

Нехай тепер $\mu \in \mathcal{M}^*(\nu)$ і нехай $p(t) = p_\nu(t)$ – довільна неспадна, додатна, цілочисельна функція, для якої інтеграл $\int\limits_r^{+\infty} \left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)} d\,\nu(t)$ скінченний для довільного $r > 0$. Для $k \in \mathbb{N}$ приймемо

$$p^{-1}(k) = \sup\{t : p(t) \le k\}, \qquad \sup\varnothing = 0.$$

Якщо $\rho_\nu < +\infty$, так само як й у випадку $\mu \in \mathcal{M}$, отримаємо $p^{-1}(k) = +\infty$ для всіх $k \ge [\rho_\nu] + 1$.

Нехай

$$\widetilde{\alpha}_k = -\frac{1}{k}\int\limits_{|a|\le p^{-1}(k)} a^{-k} d\,\mu(a).$$

Як і у випадку $\mu \in \mathcal{M}$ пересвідчуємося, що для $k \in \mathbb{N}$ правильні нерівності

$$r^k\left|\widetilde{\alpha}_k + \frac{1}{k}\int\limits_{|a|\le r} a^{-k} d\,\mu(a)\right| \le \begin{cases} \dfrac{1}{k}\int\limits_{p^{-1}(k)}^{r}\left(\dfrac{r}{t}\right)^k d\,n(t;|\mu|), & r > p^{-1}(k); \\[2ex] \dfrac{1}{k}\int\limits_{r}^{p^{-1}(k)}\left(\dfrac{r}{t}\right)^k d\,n(t;|\mu|), & r < p^{-1}(k); \end{cases}$$

а при $\rho_\nu < +\infty$, для довільного $k \geq [\rho_n] + 1$

$$r^k \left| \widetilde{\alpha}_k + \frac{1}{k} \int\limits_{|a| \leq r} a^{-k} d\,\mu(a) \right| \leq \frac{1}{k} \int\limits_r^{+\infty} \left(\frac{r}{t}\right)^k d\,n(t; |\mu|).$$

Зауважимо, що включення $\mu \in \mathcal{M}^*(\nu)$ імплікує для довільних $0 < t_1 < t_2 < +\infty$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, співвідношення

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \left(\frac{r}{t}\right)^k d\,n(t; |\mu|) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(\frac{r}{t}\right)^k d\,\nu(t) - \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(\frac{r}{t}\right)^k d\,(\nu(t) - n(t; |\mu|)) \leqslant \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(\frac{r}{t}\right)^k d\,\nu(t),$$

бо за умовою $d\,(\nu(t) - n(t; |\mu|)) \geq 0$. Враховуючи це твердження, так само, як і у випадку $\mu \in \mathcal{M}$, отримуємо співвідношення (12), якщо $\rho_\nu = +\infty$.

Якщо ж $\rho_\nu < +\infty$, то твердження пункту ii) цієї леми виконується для довільної $\mu \in \mathcal{M}(\nu)$. Лему доведено.

□

Доведення теореми 1. Передусім нагадаємо (див. зауваження 1), що для канонічного інтеграла Вейєрштрасса w, визначеного співвідношенням (4), одуржуємо $c_k(r, w) = c_k(r; \mu_w, \alpha)$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$, $\quad r > 0$, де послідовність $\alpha = \{\alpha_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ означена співвідношеннями (13) і (14) (останні правильні для всіх $k \geq [\rho_n] + 1$ у випадку $\rho_n < +\infty$).

З огляду на означення коефіцієнтів Фур'є $c_k(r; \mu_w, \alpha)$ пари (μ_w, α), рівність Парсеваля, нерівність Мінковського та співвідношення (5) і (11) знаходимо, що для всіх $r \geq 1$

$$T(r, w) \leq \frac{1}{2} N(r; |\mu|) + \frac{1}{2} \left(N^2(r; \mu) + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} |c_k(r; \mu_w, \alpha)|^2 \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq N(r; |\mu|) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \lambda(r; n, p_n) \leqslant N(r; |\mu|) + \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\, \lambda(r; n, p_n).$$

Твердження пункту ii) доводиться так само. Теорему 1 доведено.

Зауваження 3. У випадку $w = \log|f|$, f – ціла в $\mathbb{C}$ функція і $g(t) = n(t; \mathcal{Z})$, $\rho_n < +\infty$, або $g(t) = \nu(t)$, $\rho_\nu < +\infty$, функції зростання, задані сівввідношеннями (3), є так званими мінімальними мажорантами зростання (див. [13, 15, 26]).

Доведення теореми 2. Проведемо доведення цієї теореми за схемою, близькою ідейно до запропонованої для випадку цілих функцій в [7]. Нехай $\mu \in \mathcal{M}$ і нехай функція $\lambda(r; g, p_g)$ задана співвідношенням (2) з $g(t) = n(t; |\mu|)$ і $p_g(t) = = [2\psi(\log n(t; |\mu|)) \log n(t; |\mu|)] + 1$, де функція $\psi(t)$ така, що $\int\limits_{t_0}^{+\infty} d\,t/(\psi(t)\, t\, \log t) < +\infty$, $t_0 > 1$ і

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\psi(t)}{\phi(t)} = 0. \tag{20}$$

Спочатку покажемо, що інтеграл $\int_r^{+\infty}(r/t)^{p(t)}d\,n(t;|\mu|)$ скінченний для довільного $r>0$. Приймемо $R=r\exp\left(1/\psi(\log n(r;|\mu|))\right)$. Тоді

$$\int\limits_r^{+\infty}\left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)}d\,n(t;|\mu|)=\int\limits_r^{R}\left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)}d\,n(t;|\mu|)+\int\limits_R^{+\infty}\left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)}d\,n(t;|\mu|). \tag{21}$$

Зауважимо, що

$$\int\limits_r^{R}\left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)}d\,n(t;|\mu|)\leqslant n(R;|\mu|)-n(r;|\mu|)\leqslant n(R;|\mu|). \tag{22}$$

Крім того, зауважимо, що

$$\log n(R;|\mu|)\leqslant(\log n(r;|\mu|))^2,\qquad r\notin\mathcal{E}. \tag{23}$$

Для цього достатньо застосувати теорему Бореля-Неванлінни з [27, с. 140] до функції $u(r)=\log n(e^r;|\mu|)$ з $\varphi(t)=1/\psi(t)$ та вибрати $\varepsilon=1$ (див. також [7]).

Далі

$$\int\limits_R^{+\infty}\left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)}d\,n(t;|\mu|)\leqslant\int\limits_R^{+\infty}\frac{d\,n(t;|\mu|)}{\exp\left(\frac{2\psi(\log n(t;|\mu|))\log n(t;|\mu|)}{\psi(\log n(r;|\mu|))}\right)}\leqslant\int\limits_r^{+\infty}\frac{d\,n(t;|\mu|)}{n^2(t;|\mu|)}\leqslant 1 \tag{24}$$

при $r>0$.

Враховуючи (21), (22) і (24), одержимо $\int_r^{+\infty}(r/t)^{p(t)}d\,n(t;|\mu|)<+\infty$ для всіх $r>0$. За теоремою 1 існує канонічний інтеграл Вейєрштрасса w (див. співвідношення (4)) такий, що $\mu_w=\mu$ і для всіх $r\geqslant 1$

$$\log T(r,w)=C(\log N(r;|\mu|)+\log\lambda(r;g,p_g)), \tag{25}$$

де C – деяка додатна стала.

Маємо

$$\log N(r;|\mu|)=\log\int\limits_1^{r}\frac{n(t;|\mu|)}{t}d\,t\leqslant\log n(r;|\mu|)+\log\log r.$$

Тоді з умови (8) негайно випливає, що

$$\log N(r;|\mu|)=o((\log n(r;|\mu|))^2),\qquad r\to+\infty. \tag{26}$$

Зрештою,

$$\int\limits_0^{r}\left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)-1}d\,n(t;|\mu|)=\int\limits_1^{r}\left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)-1}d\,n(t;|\mu|)\leqslant r^{p(r)-1}n(r;|\mu|).$$

Отже, враховуючи співвідношення (20) та умову (8), при $r\to+\infty$ одержуємо

$$\log\int\limits_0^{r}\left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)-1}d\,n(t;|\mu|)\leqslant\log n(r;|\mu|)+2\psi(\log n(r;|\mu|))\log n(r;|\mu|)\log r\leqslant$$

$$\leqslant(2+o(1))\psi(\log n(r;|\mu|))\log n(r;|\mu|)\log r=o((\log n(r;|\mu|))^2\phi(\log n(r;|\mu|))). \tag{27}$$

Отож, зі співвідношень (21)–(27) випливає асимптотична рівність (9). Теорему 2 доведено.

Зауваження 4. *Частковий випадок теореми 2, коли $w = \log|f|$, де f – ціла в $\mathbb{C}$ функція, розглянуто в працях* [6, 7, 8]. *Зокрема, (див. теореми 1 і 2 та зауваження до теореми 2) в* [7] *з'ясовано, що асимптотичне співвідношення типу (9) зовні виняткової множини $\mathcal{E}$ скінченної логарифмічної міри є найкращим із можливих у випадку, коли $w = \log|f|$, f – ціла в $\mathbb{C}$ функція з заданою послідовністю нулів $\mathcal{Z}$, лічильна функція $n(r;\mathcal{Z})$ яких задовольняє умову (8).*

Доведення теореми 3. Для доведення цієї теореми використаємо методику, подібну до застосованої при доведенні твердження 4 з [9].

Приймемо $R = r + 1/N(r;|\mu|)$. Для $r\,N(r;|\mu|) > 1$ маємо

$$\log\left(1+\frac{1}{r\,N(r;|\mu|)}\right) \geqslant \frac{1}{2r\,N(r;|\mu|)},$$

звідки

$$N(R;|\mu|) \geqslant \int\limits_r^R \frac{n(t;|\mu|)}{t}d\,t \geqslant n(r;|\mu|)\log\left(1+\frac{1}{r\,N(r;|\mu|)}\right) \geqslant \frac{n(r;|\mu|)}{2r\,N(r;|\mu|)}.$$

Отже,

$$n(r;|\mu|) \leqslant 2\,r\,N(r;|\mu|)\,N(R;|\mu|),$$

$$n(R;|\mu|) \leqslant 2\,R\,N(R;|\mu|)\,N(R+1/N(r;|\mu|);|\mu|).$$

За теоремою Бореля-Неванлінни [5, с. 120]

$$n(r;|\mu|) \le A_1\,r\,N^2(r;|\mu|), \qquad r \notin E, \tag{28}$$

$$n(R;|\mu|) \le A_2\,r\,N^2(r;|\mu|), \qquad r \notin E, \tag{29}$$

де E – деяка множина скінченної міри, а A_1, A_2 – деякі додатні сталі.

Нехай функція $\lambda(r;g,p_g)$ задана співвідношенням (2) з $g(t) = n(t;|\mu|)$ і $p_g(t) = [n(t;|\mu|)] + 1$.

Враховуючи нерівність $N(r;|\mu|) \geqslant \int_t^r n(t;|\mu|)t^{-1}d\,t \geqslant n(t;|\mu|)\log(r/t)$ та співвідношення (28), при $r \notin E$ знаходимо

$$\int\limits_0^r \left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)-1} d\,n(t;|\mu|) = \int\limits_1^r \left(\frac{r}{t}\right)^{[n(t;|\mu|)]} d\,n(t;|\mu|) \le \int\limits_1^r \exp\left(n(t;|\mu|)\log\frac{r}{t}\right) d\,n(t;|\mu|) \leqslant$$

$$\leqslant n(r;|\mu|)\exp(N(r;|\mu|)) \leqslant 2A_1 r N^2(r;|\mu|)\exp(N(r;|\mu|)) \le \exp(B_1 N(r;|\mu|)), \tag{30}$$

де E – множина скінченної міри, а B_1 – деяка додатна стала.

Далі маємо

$$\int\limits_r^{+\infty} \left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)} d\,n(t;|\mu|) = \int\limits_r^R \left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)} d\,n(t;|\mu|) + \int\limits_R^{+\infty} \left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)} d\,n(t;|\mu|). \tag{31}$$

З огляду на співвідношення (29) правильні такі нерівності:

$$\int\limits_r^R \left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)} d\,n(t;|\mu|) \leqslant n(R;|\mu|) \leqslant A_2 r N^2(r;|\mu|) \leqslant \exp(B_2 N(r;|\mu|)), \quad r \notin E. \tag{32}$$

Також маємо

$$\int\limits_R^{+\infty} \left(\frac{r}{t}\right)^{p(t)} d\,n(t;|\mu|) \leqslant \int\limits_R^{+\infty} \frac{d\,n(t;|\mu|)}{\exp\left(\log\left(1+\frac{1}{r\,N(r;|\mu|)}\right) n(t;|\mu|)\right)} \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{+\infty} \exp\left(-\log\left(1+\frac{1}{r\,N(r;|\mu|)}\right)x\right) d\,x = \frac{1}{\log\left(1+\frac{1}{r\,N(r;|\mu|)}\right)} \leqslant$$

$$\leqslant 2\,r\,N(r;|\mu|) \leqslant \exp(B_3\,N(r;|\mu|)), \qquad B_3 > 0. \tag{33}$$

Для завершення доведення теореми 3 треба врахувати твердження пункту i) теореми 1, співвідношення (30)–(33) та очевидну нерівність

$$N(r;|\mu|) \leqslant \exp(N(r;|\mu|)).$$

Зауваження 5. *В* [9] *показано, що для канонічного добутку Вейєрштрасса (1) з нулями* $\mathcal{Z} = \{a_j\}$, $1 \leqslant |a_j|$, *і* $p_j = n(|a_j|;\mathcal{Z})$ *існують сталі* A, $B > 0$ *та множина* E *скінченної міри такі, що*

$$T(r,\Pi) \leqslant A\,\exp(B\,N(r;\mathcal{Z})), \qquad 0 < r \notin E. \tag{34}$$

Як зазначено в [2], *оцінка (34) зовні виняткової множини* E *скінченної міри для деяких сталих* A *і* B *є найкращою з можливих у такому розумінні: величину* $A\exp(B\,N(r;\mathcal{Z}))$ *не можна замінити на* $\exp(\Phi(N(r;\mathcal{Z})))$ *для жодної фіксованої функції* $\Phi(t)$ *такої, що* $\lim\limits_{t\to+\infty} \Phi(t)/t = 0$.

4. Висновки. На підставі методу рядів Фур'є для субгармонійних на площині функцій, розробленого в працях [21, 22, 23, 24], запропоновано універсальний спосіб побудови канонічних інтегралів Вейєрштрасса для δ-субгармонійних в $\mathbb{C}$ функцій з апріорі найкращими з можливих мажорантами на зростання неванліннових характеристик таких функцій. Такі апріорні мажоранти зростання природно виникають у точних оцінках зверху модулів коефіцієнтів Фур'є канонічних інтегралів Вейєрштрасса, побудованих за довільним борелевим в $\mathbb{C}$ зарядом $\mu \in \mathcal{M}$ (або $\mu \in \mathcal{M}^*(\nu) \subset \mathcal{M}(\nu) \subset \mathcal{M}$). Як застосування наведено δ-субгармонійні аналоги двох точних результатів з [7, 9], які стосуються випадку цілих в $\mathbb{C}$ функцій. Отримані результати надалі можна використовувати для розв'язання проблеми відшукання так званих мінімальних мажорант зростання (див. [6, 13, 15, 22]) для цілих і субгармонійних в $\mathbb{C}$ функцій та тісно пов'язаною із цією проблемою задачею (див. [6, 13, 22]) про канонічне зображення мероморфних функцій часткою цілих функцій (відповідно – канонічною декомпозицією δ-субгармонійних функцій різницею субгармонійних функцій). Згадані вище проблеми плануємо розглянути в наступних працях.

1. *Weierstraß K.* Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen / *Weierstraß K.* // Math.–phys. Abh. Königl. Preuss. Akad. Wiss., Berlin. – 1876. – P. 11-60.
2. *Bergweiler W.* Canonical products of infinite order / *Bergweiler W.* // J. reine angew. Math. – 1992. – Vol. 430. – P. 85-107.
3. *Borel É.* Sur les zéros des fonctions entiéres / *Borel É.* // Acta Math. – 1897. – Vol. 20. – P. 357-396.
4. *Хейман У.К.* Мероморфные функции / *Хейман У.К.* – М.: Мир, 1966.
5. *Гольдберг А.А.* Распределение значений мероморфных функций / *Гольдберг А.А., Островский И.В.* – М.: Наука, 1970.
6. *Гольдберг А.А.* О представлении мероморфной функции в виде частного целых функций / *Гольдберг А.А.* // Изв. Высш. Учебн. Завед., Математика. – 1972. – Т. 10. – С. 13-17.
7. *Bergweiler W.* A question of Gol'dberg concerning entire functions with prescribed zeros / *Bergweiler W.* // J. d'Analyse Math. – 1994. – Vol. 63. – P. 121-129.
8. *Хирівський I.В.* Мінімальне зростання цілих функцій із заданою послідовністю нулів / *Хирівський I.В.* // Математичні Студії. – 1994. – Т. 4. – С. 49-51.
9. *Frank G.* Über die Nullstellen meromorpher Funktionen und deren Ableitungen / *Frank G., Hennekemper W., Pollaczek G.* // Math. Ann. – 1977. – Vol. 225. – P. 145-154.
10. *Winkler J.* Über minimale Maximalbeträge kanonischer Weierstrassprodukte unendlicher Ordnung / *Winkler J.* // Result. Math. – 1981. – Vol. 4:1. – P. 102-116.
11. *Jank G.* Abschätzungen eines Weierstrassproduktes und Anwendungen auf meromorphe Funktionen endlicher iterierter Ordnung / *Jank G., Volkman L.* // Complex Variables. – 1983. – Vol. 1. – P. 181-194.
12. *Васильків Я.В.* Про мажоранти зростання цілих функцій / *Васильків Я.В., Лизун О.Я.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2001. – Вип. 59. – С. 51-56.
13. *Kondratyuk A.A.* Growth majorants and quotient representations of meromorphic functions / *Kondratyuk A.A., Vasyl'kiv Ya.V.* // Comp. Meth. and Func. Theory. – 2001. – Vol. 1:2. – P. 595-606.
14. *Sheremeta M.M.* A remark to the construction of canonical products of minimal growth / *Sheremeta M.M.* // Mat. Fis. Anal. Geom. – 2004. – Vol. 11, №2. – P. 243-248.
15. *Бродяк О.Я.* Зростання та розподіл нулів цілих функцій скінченного λ-типу / *Бродяк О.Я.* Дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.01, Львів, 2007. – 115 с.
16. *Valiron G.* Sur les fonctions entieéres d'ordre fini et d'ordre nul, et en particulier les fonctions à correspondence réguliére / *Valiron G.* // Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse (3). – 1914. – Vol. 5. – P. 117-257.
17. *Valiron G.* Sur la distribution des valeurs des fonctions méromorphes / *Valiron G.* // Acta Math. – 1926. – Vol. 47. – P. 117-142.
18. *Хейман У.* Субгармонические функции / *Хейман У., Кеннеди П.* – М.: Мир, 1980.
19. *Hayman W.K.* Subharmonic functions. Vol. 2 / *Hayman W.K.* // London Mathematical Society Monographs, 20. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], London, 1989.
20. *Васильків Я.В.* Некоторые свойства δ-субгармонических функций конечного λ-типа / *Васильків Я.В.* // В сб. "Материалы 9 Конф. мол. ученых Ин-та прикл. пробл. мех. и мат. АН УССР, Львов, 10–14 мая 1982 г., ч. 2". – 1982. – С. 16–22. – Деп. в ВИНИТИ 10.01.1984, №324–84.
21. *Процик Ю.С.* Субгармонійні функції скінченного (λ, ε)-типу / *Процик Ю.С.* // Математичні студії. – 2005. – Т. 24. – №1. – С. 39–56.

22. *Васильків Я.В.* Розвиток методів гармонійного аналізу дослідження асимптотичних властивостей мероморфних та субгармонійних функцій / *Васильків Я.В.* // Дис. ... докт. фіз.-мат. наук: 01.01.01, Львів, 2008. – 317 с.
23. *Noverraz P.* Fonctions plurisoushamoniques et analytiques dans les espaces vectoriels topologiques complexes / *Noverraz P.* // Ann. Inst. Fourier. – 1969. – Vol. 19:2. – P. 419-493.
24. *Васильків Я.В.* Исследование асимптотических свойств целых и субгармонических функций методом рядов Фурье / *Васильків Я.В.* // Дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.01, Львов, 1986. – 129 с.
25. *Arsove M.G.* Function representable as differences of subharmonic functions / *Arsove M.G.* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1953. – Vol. 75. – P. 327-365.
26. *Васильків Я.В.* Співвідношення між величиною роду і порядками Пойя цілих функцій з асиметричним розподілом нулів / *Васильків Я.В., Бродяк О.Я.* // Математичні Студії. – 2009. – Т. 31, №1. – С. 56-64.
27. *Nevanlinna R.* Remarques sur les fonctions monotones / *Nevanlinna R.* // Bull. Sci. Math. – 1931. – Vol. 55. – P. 140-144.

GENERALIZED WEIERSTRASS THEOREM FOR A δ-SUBHARMONIC ON $\mathbb{C}$ FUNCTIONS

Oksana BRODYAK[1], **Yaroslav VASYL'KIV**[2]

[1]*L'viv Polytechnic National University, 79013, L'viv, St. Bandera Str., 12*
[2]*Ivan Franko National University of L'viv, 79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1*
e-mail: yavvasylkiv@gmail.com

The universal construction method of canonical Weierstrass integrals with the best possible growth upper estimates of their Nevanlinna characteristic is proposed. Such estimates appear naturally into the strictly upper estimates of the modulus of Fourier coefficients $c_k(r;\mu,\alpha),\ r>0,\ k\in\mathbb{Z}$ of pair (μ,α), where μ is charge (real-valued measure) in $\mathbb{C}$ such, that $\mathbb{D}:=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}\cap \cap\operatorname{supp}\mu=\emptyset$, and α is some sequence of complex numbers namely α is a sequence of development into the power series coefficients of the canonical Weierstrass integral in $\mathbb{D}$. Canonical Weierstrass integral is constructed by charge μ.

Key words: a δ-subharmonic function, canonical Weierstrass integral, a best possible growth majorant, Fourier series method, Fourier coefficients.

ОБОБЩЁННАЯ ТЕОРЕМА ВЕЙЕРШТРАССА ДЛЯ δ-СУБГАРМОНИЧЕСКИХ В $\mathbb{C}$ ФУНКЦИЙ

Оксана БРОДЯК[1], Ярослав ВАСЫЛЬКИВ[2]

[1] *Национальный университет "Львовская политехника", 79013, Львов, ул. Степана Бандеры, 12*

[2] *Львовский национальный университет имени Ивана Франко, 79000, Львов, ул. Университетская, 1*

e-mail: yavvasylkiv@gmail.com

Предложен универсальный метод построения канонических интегралов Вейерштрасса с лучшыми оценками сверху на рост их неванлинновой характеристики. Такие оценки появляются в точных оценках сверху модулей коэффициентов Фурье $c_k(r;\mu,\alpha)$, $r > 0$, $k \in \mathbb{Z}$, в паре (μ,α), где μ – произвольный борелевый заряд (вещественная мера) в $\mathbb{C}$ такой, что $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \cap \operatorname{supp}\mu = \emptyset$, а α – некоторая последовательность комплексных чисел (а именно, последовательность коэффициентов разложения в степенной ряд в $\mathbb{D}$ канонического интеграла Вейерштрасса, построенного по заряду μ).

Ключевые слова: δ-субгармонические функции, канонический интеграл Вейерштрасса, наилучшие мажоранты роста, метод рядов Фурье, коэффициенты Фурье.

Стаття надійшла до редколегії 19.11.2009

Прийнята до друку 16.12.2009